

Casion fx-CG20 ylioppilaskirjoituksissa apuna

Grafiikkalaskin on oivallinen apuväline ongelmien ratkaisun tukena. Sen avulla voi piirtää kuvaajat, ratkaista yhtälöt ja yhtälöryhmät, suorittaa funktioanalyysin ja ratkoa esim. vektoreihin liittyviä laskuja. **Tässä ohjeessa on ratkaistu ne tehtävät, joissa graafisesta laskimesta on suuri hyöty.**

Natural Textbook Display tarkoittaa sitä, että voit syöttää lausekkeet juuri sen näköisinä kuin ne esiintyvät oppikirjoissa ja kokeissa.

Kommentteja ja vaihtoehtoisia ratkaisutapoja otetaan mielellään vastaan tämän tukimateriaalin kehittämiseksi ja opettajien tukemiseksi! Tätä materiaalia saa hyödyntää omassa opetuksessa ja opiskelijoiden tukemisessa matematiikan opinnoissa.



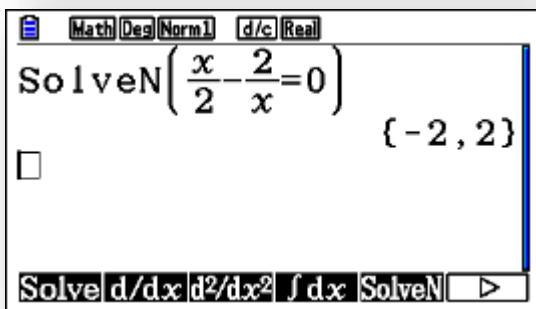
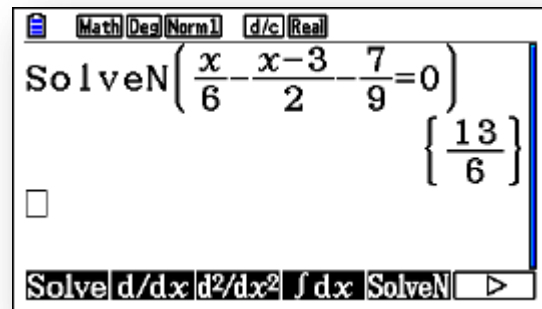
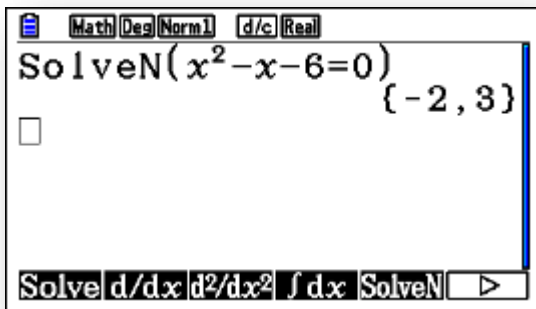
1. Ratkaise yhtälöt

a) $x^2 - x - 6 = 0$

b) $\frac{x}{6} - \frac{x-3}{2} - \frac{7}{9} = 0$

c) $\frac{x}{2} - \frac{2}{x} = 0$

Ratkaisu: Laskimesta



vastaukset alakohtiin ovat

a) $x = -2$ tai $x = 3$

b) $x = \frac{13}{6}$

c) $x = -2$ tai $x = 2$

2. a) Laske lausekkeen $\frac{15}{4} - \left(\frac{6}{3}\right)^2$ arvo.
 b) Laske lausekkeen $\sqrt{6 \cdot (3!)} - 6$ arvo.
 c) Sievennä lauseke $\ln \frac{x}{2} + \ln 2$.
 d) Sievennä lauseke $\sin^2 x + \cos^2(x + 2\pi)$.
 e) Laske integraali $\int_0^1 (x+1) dx$.
 f) Laske funktion $f(x) = 4e^{2x}$ derivaatta kohdassa $x = 0$.

Ratkaisu: Laskimesta saadaan vastaukset kohtiin a), b), e) ja f). Sen sijaan c) – ja d) –kohdat ovat symbolista laskentaa ja niiden ratkaisu edellyttäisi laskimelta CAS-toimintoa.

Calculator screen showing the calculation of $\frac{15}{4} - \left(\frac{6}{3}\right)^2$ resulting in $-\frac{1}{4}$. The screen displays the input expression and the result $-\frac{1}{4}$ on the right side. The bottom menu shows JUMP, DELETE, MAT, and MATH.

Calculator screen showing the calculation of $\sqrt{6 \times (3!)} - 6$ resulting in 0. The screen displays the input expression and the result 0 on the right side. The bottom menu shows x!, nPr, nCr, and RAND.

Calculator screen showing the calculation of the integral $\int_0^1 (x+1) dx$ resulting in $\frac{3}{2}$. The screen displays the input expression and the result $\frac{3}{2}$ on the right side. The bottom menu shows $\int dx$ and $\Sigma($.

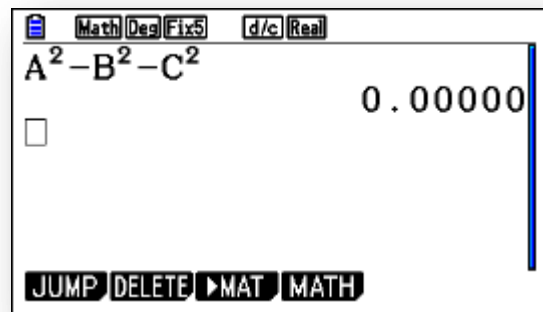
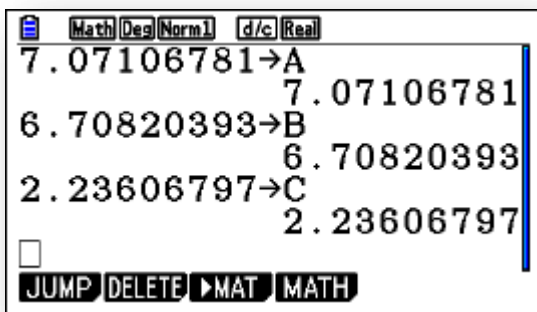
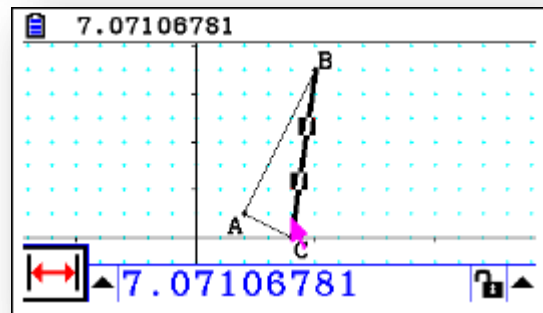
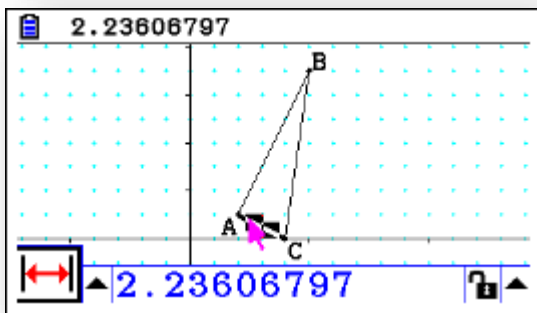
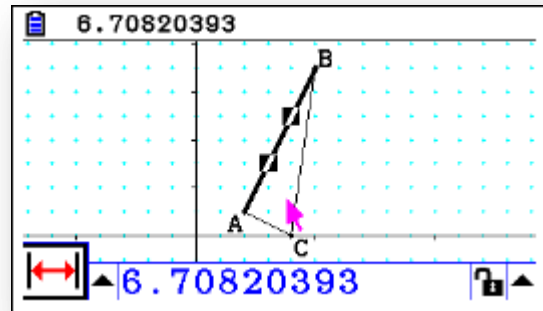
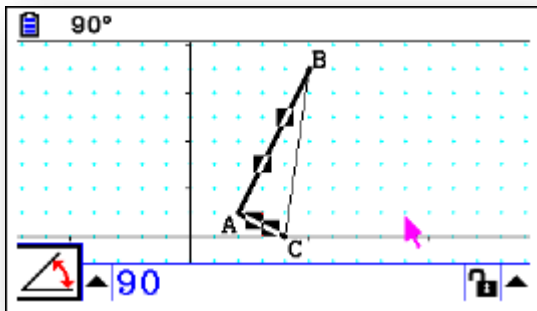
Calculator screen showing the calculation of the derivative $\frac{d}{dx}(4e^{2x})|_{x=0}$ resulting in 8. The screen displays the input expression and the result 8 on the right side. The bottom menu shows MAT, logab, Abs, d/dx, d^2/dx^2, and a right arrow.

Vastaukset ovat

- a) $-\frac{1}{4}$
 b) 0
 e) $\frac{3}{2}$
 f) 8

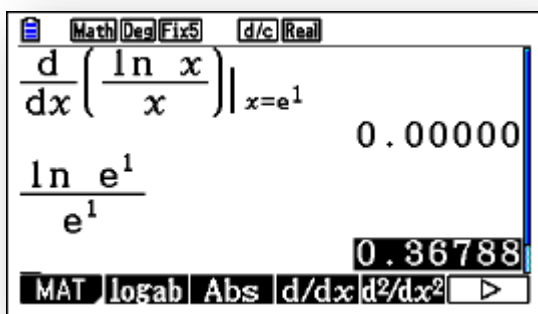
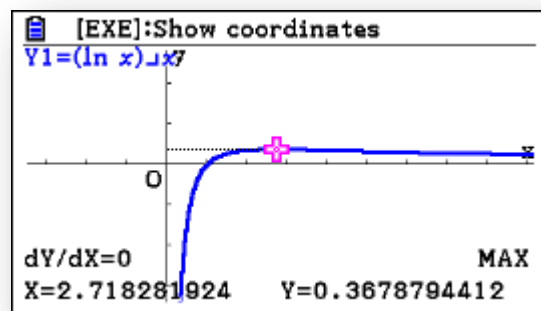
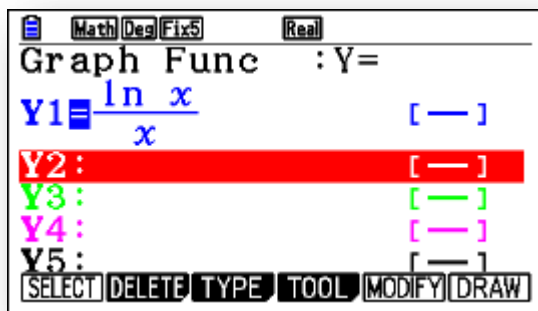
3. Näytä, että pisteet $A = (2,1)$, $B = (4,0)$ ja $C = (5,7)$ ovat suorakulmaisen kolmion kärjissä.

Ratkaisu: Käytetään Geometry –sovellusta kolmion tarkkaan piirtämiseen. Piirroksen jälkeen voi tutkia, että kulma A on suora. Laskimesta voi katsoa sivujen pituudet ja osoittaa esim. Pythagoraan lauseella, että kolmio on suorakulmainen. Tässä mallissa sivujen pituudet on sijoitettu muistipaikkoihin A, B ja C.



5. Määritä funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ suurin arvo, kun $x > 0$.

Ratkaisu: Funktio on jatkuva ja derivoituva kun $x > 0$. Laskimesta saadaan grafiikkasovelluksen avulla funktiolle yksi maksimiarvo suoraan painikkeesta F5 (G-Solv) ja F2 (Max). Tästä voi tehdä johtopäätöksen funktion maksimiarvosta ja laskea sille likiarvon 0,36788 myös laskentasovelluksessa.



6. Ringettejoukkueen kolmen hyökkääjän todennäköisyydet tehdä maali rangaistuslaukauksella ovat 65 %, 75 % ja 54 %. Kukin kolmesta hyökkääjästä saa yhden yrityksen.
- Millä todennäköisyydellä ainakin yksi hyökkääjä tekee maalin?
 - Laske rangaistuslaukausmaalien lukumäärän odotusarvo.

Ratkaisu: Sjoitetaan laskujen yksinkertaistamiseksi annetut todennäköisyydet muuttujiin P, Q ja R. Komplementin kautta kysytty todennäköisyys on $1 - P$ ("Kukaan hyökkääjästä ei tee maalia").

Tämä arvo laskimesta on n. 0,960.

Satunnaismuuttujan $X =$ "maalien lukumäärä" arvojoukko on $\{0, 1, 2, 3\}$. Vastaavat pistetodennäköisyydet ovat laskimesta

Math Deg Fix5 d/c Real
 $1 - ((1-P)(1-Q)(1-R))$
 0.95975
 JUMP DELETE MAT MATH

Math Deg Fix5 d/c Real
 $(1-P)(1-Q)(1-R)$
 0.04025
 JUMP DELETE MAT MATH

Math Deg Fix5 d/c Real
 $P(1-Q)(1-R) + (1-P)Q(1-R)$
 0.24275
 JUMP DELETE MAT MATH

Math Deg Fix5 d/c Real
 $PQ(1-R) + P(1-Q)R + (1-P)QR$
 0.45375
 JUMP DELETE MAT MATH

Math Deg Fix5 d/c Real
 PQR
 0.26325
 JUMP DELETE MAT MATH

Täten, odotusarvo on laskimen mukaan n. 1.94 maalia.

Math Deg Fix5 d/c Real
 $0 \times 0.04025 + 1 \times 0.24275 + 2 \times 0.45375 + 3 \times 0.26325$
 1.94000
 JUMP DELETE MAT MATH

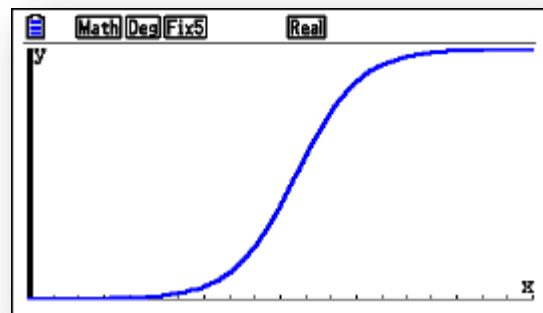
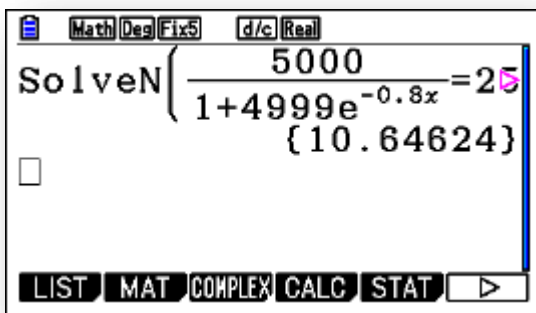
8. Eräessä huippuyliopistossa on 5 000 opiskelijaa, joista yksi sairastuu hiihtolomalta palattuana influenssaan. Virus alkaa levitä kampuksella, ja siihen sairastuneiden opiskelijoiden lukumäärää kuvaa funktio

$$f(t) = \frac{5000}{1 + 4999e^{-0.8t}},$$

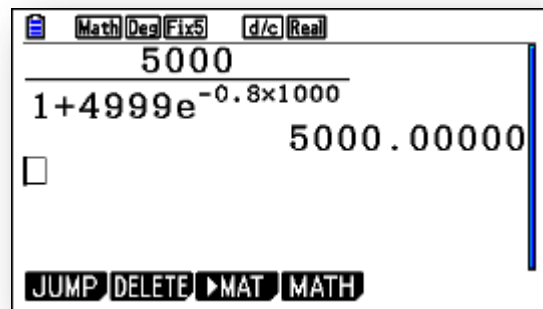
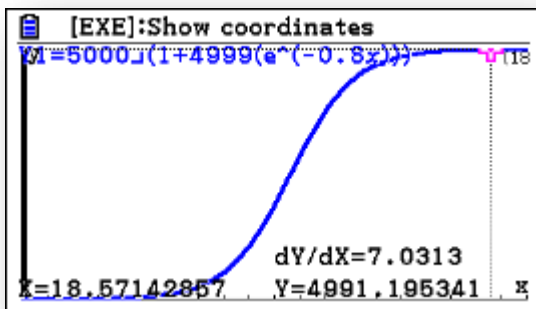
jossa aika $t \geq 0$ lasketaan vuorokausina ensimmäisestä sairastumisesta alkaen.

- Luennot peruutetaan, jos yli 50 % opiskelijoista on sairaana. Kuinka monen vuorokauden kuluttua ensimmäisestä sairastumisesta näin tapahtuu?
- Näytä, että $f(t)$ on kasvava funktio, kun $t > 0$.
- Laske $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$.

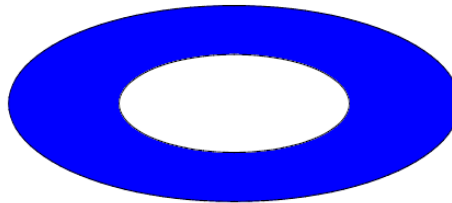
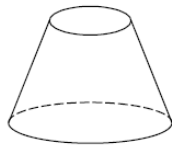
Ratkaisu: Funktio f on jatkuva ja derivoituva. Laskimesta saadaan ratkaisuksi a) –kohtaan 11 vuorokauden kuluttua. Laskin ei löydä grafiikkasovelluksessa funktiolle minimi- eikä maksimikohtia, mikä ei todista funktion monotonisuutta, mutta antaa asiasta hyvän kuvan.:



Raja-arvoa voi tutkia antamalla x :lle isoja arvoja tai seuraamalla kuvaajan pisteitä Trace –toiminnolla. Raja-arvo näyttää asettuvan 500:een.



9. Suoran ympyräkartion korkeus on 5,0 cm, ja sen pohjan säde on 2,0 cm. Kartio katkaistaan niin, että yläreunan säde on 1,0 cm. Tämän jälkeen katkaistun kartion vaippa maalataan siniseksi ja sitä pyöritetään kyljellään paperilla. Määritä näin saadun sinisen rengasalueen pinta-ala yhden neliösenttimetrin tarkkuudella.



Ratkaisu: Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan suhdeluvuksi 2,5. Nyt pyörähtäneen kappaleen pohjaympyröiden säteet ovat Pythagoraan lausetta soveltaen laskimella $\sqrt{29}$ ja $\frac{\sqrt{29}}{2}$ ja kysytty pinta-ala laskimella on $\frac{87}{4}\pi$ cm² eli pyöristettynä 68,3 cm².

Calculator screen showing the calculation of the slant height of the truncated cone. The input is $\sqrt{1^2 + \left(5 - \frac{5}{2}\right)^2}$ and the result is $\frac{\sqrt{29}}{2}$.

Calculator screen showing the calculation of the lateral surface area of the truncated cone. The input is $\pi\sqrt{29}^2 - \pi\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2$ and the result is $\frac{87}{4}\pi$.

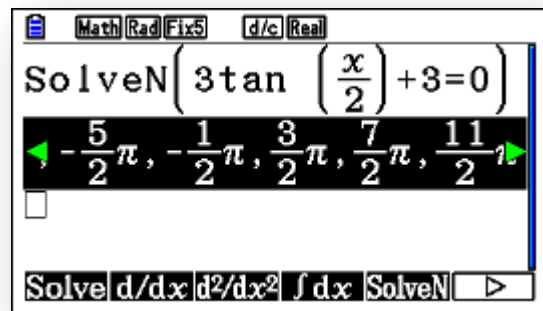
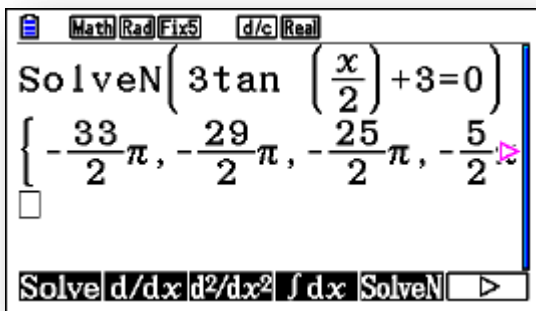
Calculator screen showing the numerical value of the lateral surface area. The input is $\pi\sqrt{29}^2 - \pi\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2$ and the result is 68.32964.

10. Ratkaise yhtälöt

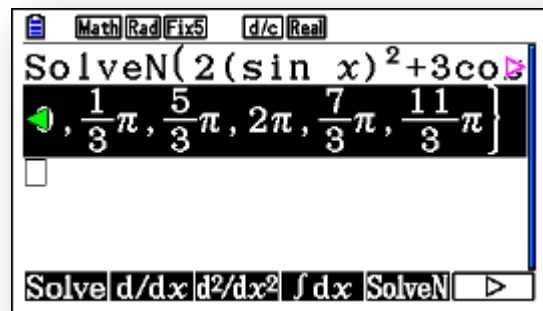
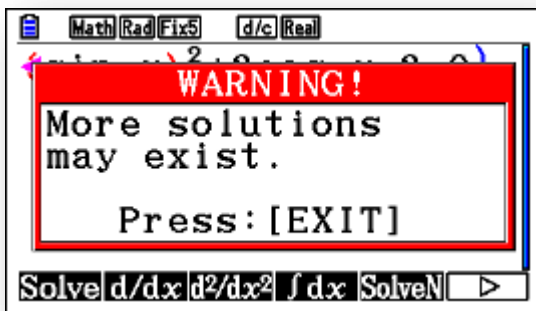
a) $3 \tan \frac{x}{2} + 3 = 0$

b) $2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0$

Ratkaisu: Koska kyseessä ei ole symbolinen laskin, jaksollinen vastaus jää saamatta. FX-CG20 ilmoittaa tosin laskijalle, että useampia vastauksia löytyy ja antaa niistä orion ympärille 10 ratkaisun joukon malliksi. Ratkaisut näyttävät menevän 2π -jaksoissa, joten vastaus a) – kohtaan on $\frac{3}{2}\pi + n2\pi, n \in \mathbb{Z}$.



b) –kohdassa käytetään myös SolveN –komentoa, joka ratkaisee kaikki juuret tai jaksollisissa tapauksissa 10 juuren malliratkaisujoukon. Jälleen laskin huomauttaa, että enemmänkin ratkaisuita voi löytyä.



Ratkaisujoukko on laskimesta päättelemällä

$$x = n2\pi \text{ tai } x = \frac{\pi}{3} + n2\pi \text{ tai } x = \frac{5\pi}{3} + n2\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

12. Tuotteen hinta- ja muut tiedot voidaan tallentaa viivakoodiin (UPC = Universal Product Code). Numeerisessa muodossa viivakoodi on lukujono $(d_1, d_2, \dots, d_{12})$, jossa kukin $d_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Viimeinen luku d_{12} on tarkistusmerkki, joka määräytyy ehdosta

$$3(d_1 + d_3 + d_5 + d_7 + d_9 + d_{11}) + d_2 + d_4 + d_6 + d_8 + d_{10} + d_{12} \equiv 0 \pmod{10}.$$

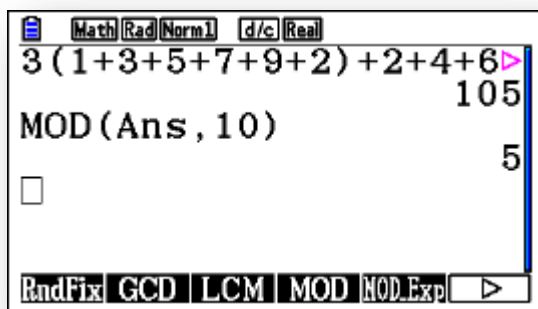
- a) Tuotteen viivakoodi on $(1, 4, 2, 6, 8, 2, 5, 9, 0, 3, 2, d_{12})$. Mikä on tarkistusmerkki d_{12} ?
b) Näytä, että viivakoodi $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3)$ on virheellinen.
c) Määritä b-kohdan oikea koodi, kun tiedetään, että virhe on kolmannessa merkissä.



Esimerkki viivakoodista

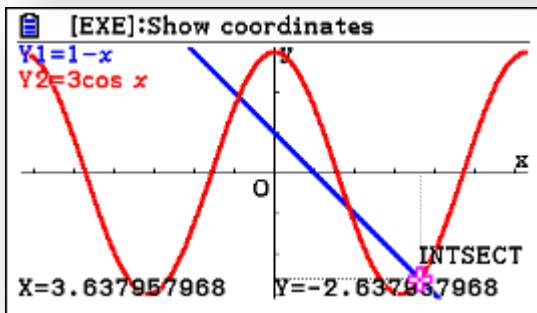
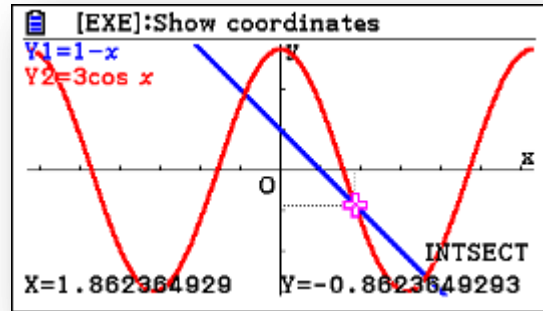
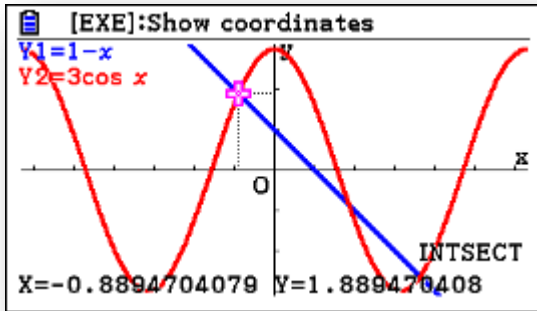
<http://en.wikipedia.org/wiki/Barcode>. Luettu 29.3.2011.

Ratkaisu: Laskimella voidaan ratkaista b-kohta, josta päätelmä kymmenellä jaottomuudesta.



13. Funktioiden $f(x)=1-x$ ja $g(x)=3\cos x$ kuvaajilla on kolme leikkauspistettä. Laske niiden koordinaateille kaksidesimaaliset likiarvot valitsemallasi numeerisella menetelmällä.

Ratkaisu: Muodostetaan annettujen funktioiden erotusfunktio ja lasketaan sille nollakohtat laskimella käyttämällä Newtonin menetelmää. Ensin voidaan kuitenkin piirtää annetut funktiot ja tutkia ratkaisujen likiarvot kuvaajasta:



Newtonin kaavaa varten pitää derivaatta osata laskea erotusfunktiolle käsin. Lähdetään alkuarvauksesta $x = -1$. Iterointi suppenee nopeasti ja kolmannen askeleen jälkeen ei desimaalit enää muutu.

Math Rad Norm1 d/c Real

$$-1 \rightarrow x$$

$$x - \frac{1-x-3\cos x}{-1+3\sin x} \rightarrow x$$

-0.89243795

JUMP DELETE ▶MAT MATH

Math Rad Norm1 d/c Real

$$x - \frac{1-x-3\cos x}{-1+3\sin x} \rightarrow x$$

-0.8894704079

$$x - \frac{1-x-3\cos x}{-1+3\sin x} \rightarrow x$$

-0.8894704079

JUMP DELETE ▶MAT MATH

Laskimesta pitää vain painaa EXE –nappulaa toistuvasti iteroinnin tarkentamiseksi. Muut leikkauspisteet saadaan käyttämällä laskimen laskumuistia hyväksi. Selataan ensimmäinen alkuarvaus esille ja vaihdetaan se ensin arvoon 2 ja sitten arvoon 4:

Math Rad Norm1 d/c Real
 $x - \frac{1-x-3\cos x}{-1+3\sin x} \rightarrow x$
1.862364929
 $x - \frac{1-x-3\cos x}{-1+3\sin x} \rightarrow x$
1.862364929
JUMP DELETE ▶MAT MATH

Math Rad Norm1 d/c Real
 $x - \frac{1-x-3\cos x}{-1+3\sin x} \rightarrow x$
3.637957968
 $x - \frac{1-x-3\cos x}{-1+3\sin x} \rightarrow x$
3.637957968
JUMP DELETE ▶MAT MATH

Koska y-koordinaatti lasketaan funktion $f(x) = \frac{1-x-3\cos x}{-1+3\sin x}$ mukaan vähentämällä saadut likiarvot ykkösestä, niin koordinaateiksi ja tehtävän ratkaisuiksi saadaankahden desimaalin tarkkuudella $(-0,89; 1,89)$, $(1,86; -0,86)$ ja $(3,64; -2,64)$.