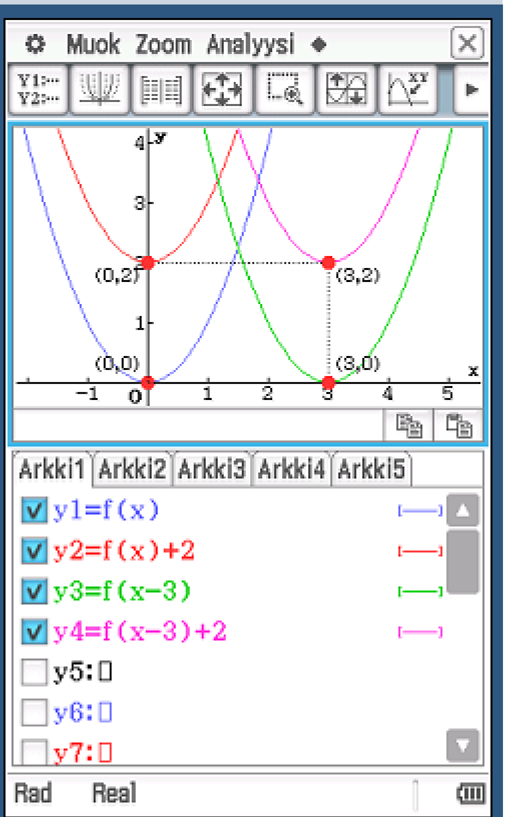
CASIO

Laske Laudatur ClassPadilla

- Pitkä matematiikka, syksy 2014 -



”Enemmän aikaa matematiikan opiskeluun, vähemmän aikaa laskimen opetteluun.”

Casio Scandinavia

Keilaranta 4 | 02150 Espoo | info@casio.fi

Hyvä Matemaatikko,

Paljon on taas ehtinyt tapahtua kevään yo-kokeista tähän päivään. YTL on vienyt eteenpäin sähköisen koeympäristön teknisiä ratkaisuja, kaksiosaisuus vuoden 2016 muutoksissa alkaa olla rakenteeltaan selvä ja erilaisia pilottihankkeita pyöritetään useissa lukioissa.

Myös Casion puolella on tapahtunut uudistuksia. ClassPad II Manager ohjelma on mukana vuoden 2019 sähköisessä koeympäristössä ja sekä ClassPad II Manager että symbolinen fx-CP400 laskin saivat uudet käyttöjärjestelmäversiot. Päivitykset voi ladata maksutta osoitteesta http://edu.casio.com.

Casion tukimuodot opettajille ja opiskelijoille ovat myös kehittyneet. ClassPadin YouTube-kanava on kerännyt tuhansia katselukertoja (http://bit.ly/fx-cp400) ja workshoppien syventävät kurssit ovat keränneet satoja opettajia tutkimaan matematiikkaa symbolisen laskennan keinoin. Myös ClassPadin peruskursseilla riittää väkeä.

Casio onkin saanut lisää taitavia kouluttajia antamaan opettajille täydennyskoulutusta. Joko sinun koulusi on kysynyt maksutonta koulutusta tai ilmaista lainalaskinsalkkua? Onko sinulla halua ryhtyä kouluttamaan kollegoitasi symbolisessa laskennassa? Ota yhteyttä info@casio.fi ja kysy lisää!

Hyödyllisiä linkkejä opetuksen tueksi ja esimerkiksi tutkielmien ja ryhmätöiden valmiita aiheita perehdytyksineen löydät sivuiltamme

www.casio-laskimet.fi

Kädessäsi oleva vihkonen pitkän matematiikan yo-tehtävien ratkaisuista käsittää 10 vastausta 6 pisteen tehtäviin. Se on tehty kuten tuleva sähköinen yo-koekin: ottamalla sieppausnäyttöjä laskinohjelmasta ja liittämällä niitä perustelujen kanssa tekstiasiakirjaan.

Mukavia hetkiä symbolisen laskennan parissa,

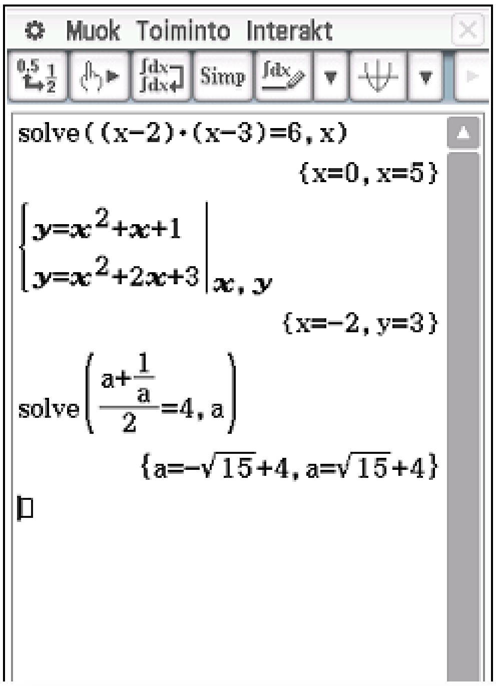
Espoossa 24.9.2014

Pepe Palovaara

1. a) Ratkaise yhtälö $(x-2)(x-3)=6$.

b) Missä pisteessä paraabelit $y=x^2+x+1$ ja $y=x^2+2x+3$ leikkaavat?

c) Määritä kaikki luvut, jotka toteuttavat seuraavan ehdon: Luvun ja sen käänteisluvun keskiarvo on 4.



Tehtävän 1 ratkaisu:

a) Laskimen Pääsovellukseen kirjoitetaan tehtävän mukainen yhtälö. Tämän jälkeen maalataan se kynällä ja valitaan Interaktiivisesta valikosta Yhtälö/Epäyhtälö -> solve ja hyväksytään lasku koskemalla OK. Ratkaisuiksi saadaan x = 0 tai x = 5.

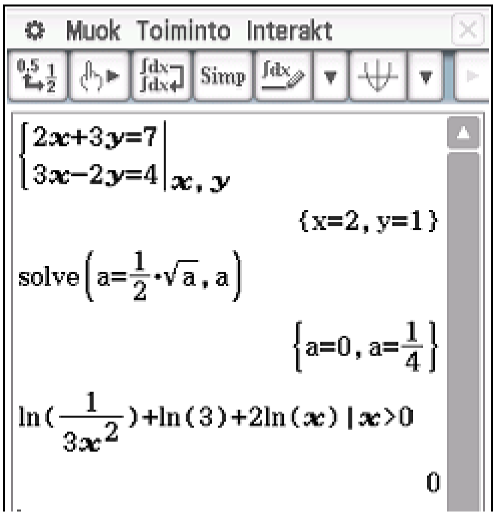
b) Paraabelien leikkauspiste saadaan yhtälöparin ratkaisuna. Leikkauspiste on (-2, 3).

c) Merkitään lukua a, jolloin muodostamalla annetun ongelman mukainen yhtälö ja ratkaisemalla kuten a-kohdan yhtälökin saadaan ratkaisuksi kaksi eri vaihtoehtoa luvuksi a: sekä $-\sqrt{15}+4$ että $\sqrt{15}+4$ toteuttavat ehdot.

2. a) Määritä suorien $2x+3y=7$ ja $3x-2y=4$ leikkauspiste.

b) Luku on yhtä suuri kuin puolet sen neliöjuuresta. Määritä kaikki tällaiset luvut.

c) Sievennä lauseke $\ln\left(\frac{1}{3x^2}\right)+\ln 3+2\ln x$, kun $x>0$.



Tehtävän 2 ratkaisu:

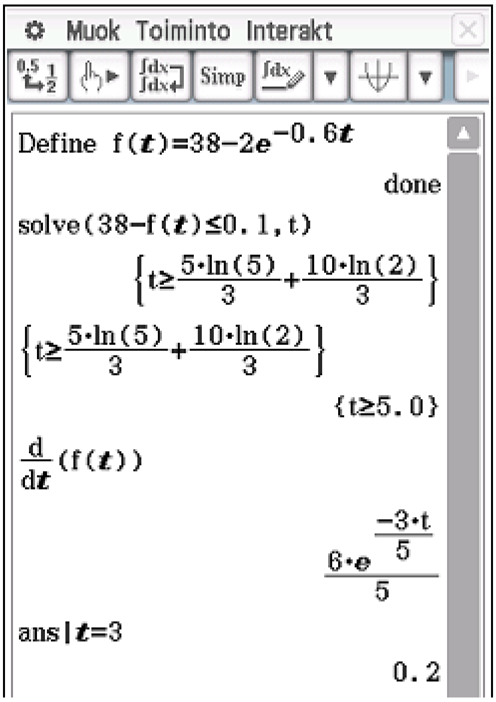
a) Suorien leikkauspiste saadaan yhtälöparin ratkaisuna. Suorat leikkaavat pisteessä (2, 1).

b) Merkitään lukua a ja muodostetaan ehdon mukainen yhtälö. Sen ratkaisu muuttujan a suhteen antaa kaksi eri ratkaisua: a = 0 tai a = $\frac{1}{4}$.

c) Lauseke sievenee muotoon 0.

3. a) Pekka aloittaa kuumeen mittaamisen ajanhetkellä $t=0$. Pekan käyttämän mittarin lukema $f(t)$ hetkellä t minuuttia saadaan kaavasta $f(t)=38-2e^{-0,6t}$ celsiusastetta. Kuinka kauan mittausta pitää jatkaa, jotta tulos poikkeaa enintään asteen kymmenesosan arvosta 38,0 celsiusastetta? Anna vastaus minuutin tarkkuudella.

b) Määritä lämpötilan muutosnopeus $f'(3)$. Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.



Tehtävän 3 ratkaisu:

a) Määritellään tehtävän mukainen funktio ja lasketaan luvun 38 ja funktion erotus pienemmäksi kuin 0,1 astetta. Likiarvoinen vastaus on 5 minuuttia.

b) Muutosnopeus on funktion derivaatta annetussa pisteessä. Yhden desimaalin tarkkuudella muutosnopeus on 0,2 astetta/min.

Tehtävän 4 ratkaisu (alempi kuva):

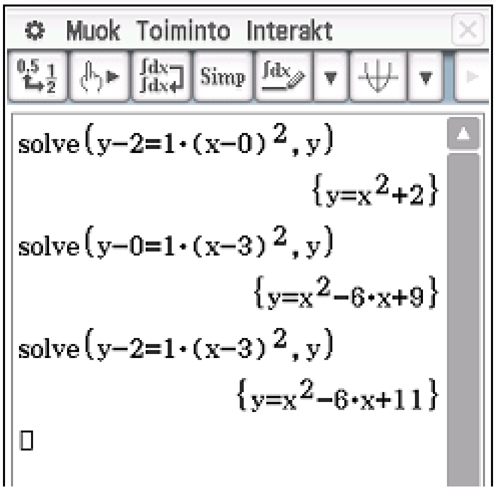
Muodostetaan paraabelin huippumuotoinen yhtälö ja siirretään huippua (0, 0) annettujen vektorien verran. Koska paraabelin jokainen piste siirtyy, niin myös sen huippu siirtyy.

4. Paraabelin $y=x^2$ jokaista pistettä siirretään vektorin $\overline{v}$ verran. Määritä näin syntyvän käyrän yhtälö muodossa $y=f(x)$, kun

a) $\overline{v}=2\overline{j}$

b) $\overline{v}=3\overline{i}$

c) $\overline{v}=3\overline{i}+2\overline{j}$.



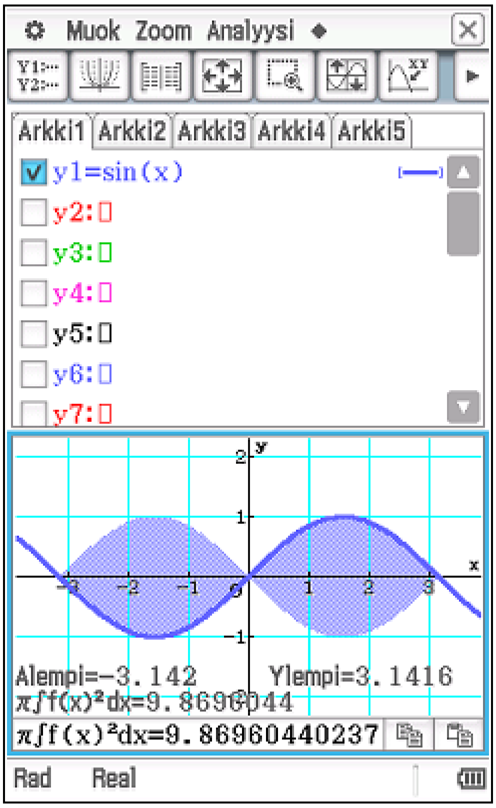
Ratkaistaan huippumuotoisista yhtälöistä paraabelin yhtälö muuttujan y suhteen.

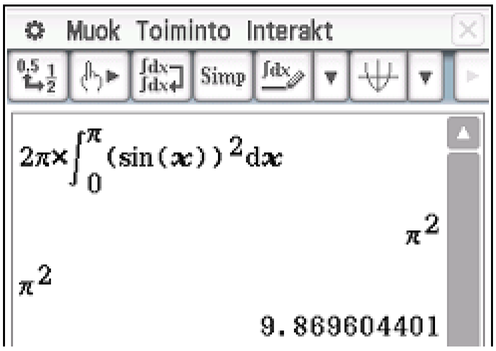
a) Huippu siirtyy kaksi yksikköä ylöspäin pisteeseen (0, 2). Yhtälö on $y = x^2 + 2$.

b) Huippu siirtyy kolme yksikköä oikealle pisteesen (3, 0). Yhtälö on $y = x^2 - 6x + 9$.

c) Huippu siirtyy kolme yksikköä oikealle ja kaksi ylöspäin pisteeseen (3, 2). Tällöin ratkaistavan paraabelin yhtälö on $y = x^2 - 6x + 11$.

5. Käyrä $y = \sin x$, $-\pi \le x \le \pi$, pyörähtää x-akselin ympäri. Laske näin syntyvän tiimalasia muistuttavan kappaleen tilavuuden tarkka arvo.



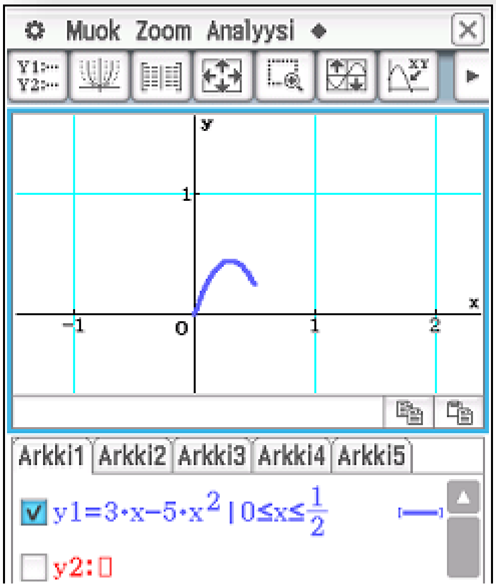


Tehtävän 5 ratkaisu:

Hahmotellaan ensin tilanne graafisesti ja lasketaan likiarvo pyörähdys-kappaleen tilaavuudelle ClassPadin graafisella integrointitoiminnolla.

Sinifunktio on pariton ja sen nollakohdat ovat muotoa nπ, joten kysytty pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan integroimalla toinen syntyvän kappaleen puolista ja kertomalla tulos kahdella. Vastaus on π^2.

6. Tarkastellaan paraabelin kaarta $y = 3x - 5x^2$, kun $0 \le x \le \frac{1}{2}$. Mikä kaaren piste on kauimpana origosta? Perustele vastauksesi myös muulla tavalla kuin laskimella, esim. derivaatan avulla.



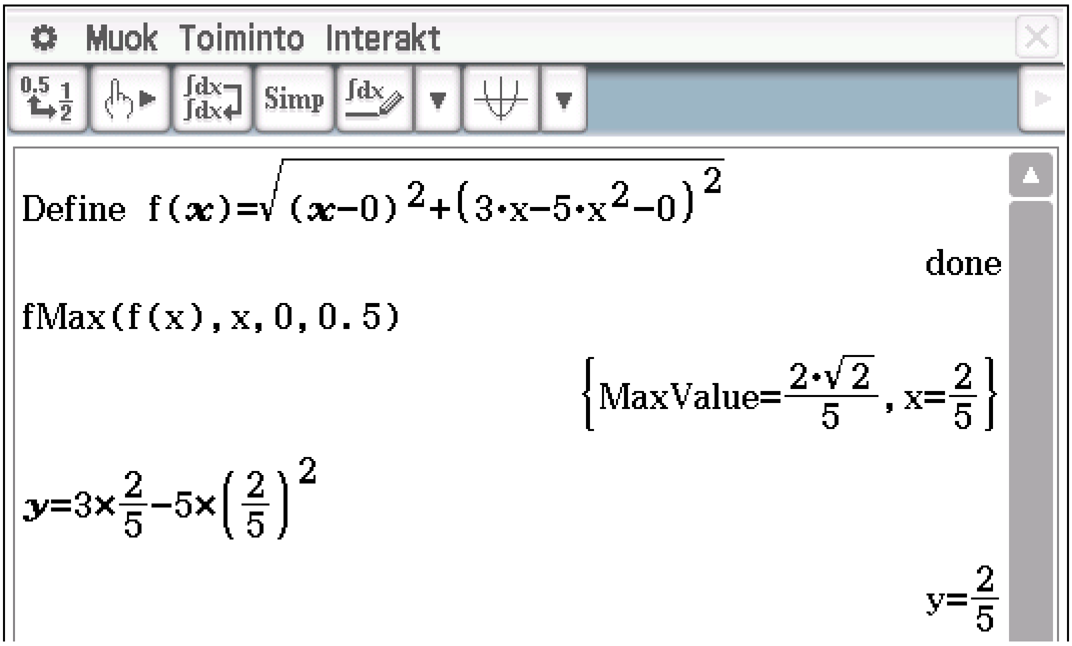
Tehtävän 6 ratkaisu:

Piirretään kaaren kuva tilanteen hahmottamiseksi. Muodostetaan seuraavaksi funktio, joka kuvaa paraabelin pisteen ja origon välistä etäisyyttä ja lasketaan sille suurin arvo tarkasteluvälillä.

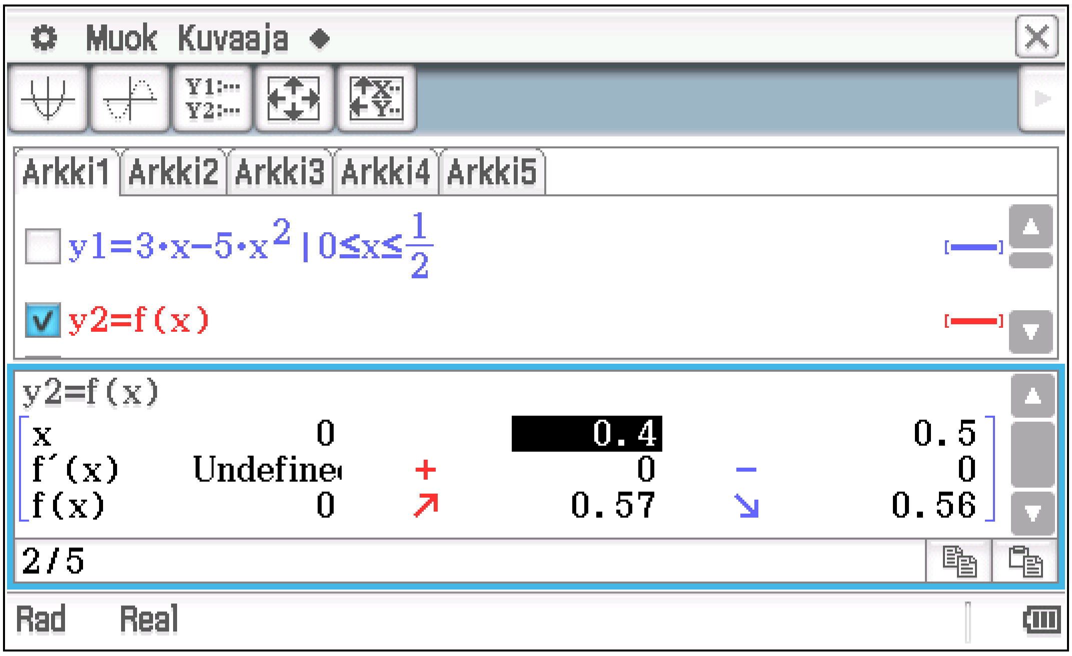
Suurin arvo pituudelle saadaan, kun $x = \frac{2}{5}$. Vastaava y-koordinaatin arvo saadaan sijoittamalla x-koordinaatti paraabelin yhtälöön.

Alla laskimen näyttökuvissa on laskut suurimman arvon määrittämiseksi ja perusteluna kulkukaavio pisteiden etäisyyttä kuvaavalle funktiolle, jonka suurin arvo saadaan kohdassa 0,4.

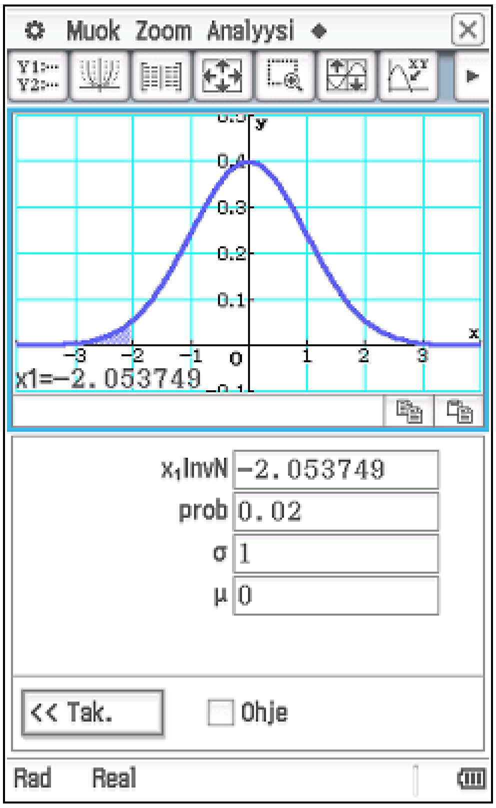
Vastaukseksi saadaan, että käyrän piste $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$ on kauimpana origosta.

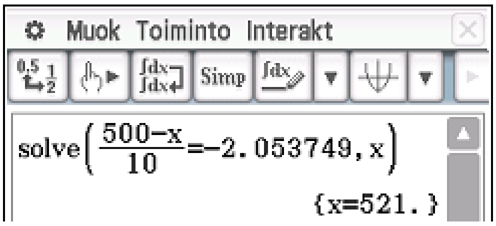


Ylemmässä kuvassa on käyrän pisteen ja origon välistä etäisyyttä kuvaava funktio ja sen suurin arvo. Alemmassa kuvassa on yllä määritellyn funktion f(x) kulkukaavio välille [0; 0,5].



7. Pakkausautomaatti täyttää kahvipaketteja. Kahvin määrä on normaalijakautunut, keskihajonta on 10 grammaa, mutta odotusarvoa voidaan säätää. Mikä pitäisi säätää odotusarvoksi, kun tavoitteena on valmistaa paketteja, joista enintään 2,0 % sisältää alle 500 grammaa kahvia? Anna vastaus gramman tarkkuudella.





Tehtävän 7 ratkaisu:

Lasketaan käänteisen jakauman avulla normitettu arvo kahvin määrälle. Tämän jälkeen ratkaistaan normituskaavasta odotusarvo x.

Vastaus on gramman tarkkuudella 521 g.

9. Oheisessa kuvassa on rakenteilla arkkitehti Eero Saarisen suunnittelema Gateway Arch Saint Louisissa USA:ssa. Se rakennettiin vuosina 1963–1965. Kaaren muotoa kuvaa yhtälö

$$y=-39f\left(\tfrac{x}{39}\right)+231.$$

Tässä $f(t)=\frac{1}{2}\left(e^{t}+e^{-t}\right)$, x-akseli kulkee maan pinnalla kaaren tyvien kautta ja y-akseli on kaaren symmetria-akseli. Mittayksikkönä on metri.

a) Määritä kaaren korkeus metrin tarkkuudella.

b) Määritä kaaren leveys metrin tarkkuudella.

c) Kuinka suuressa terävässä kulmassa kaari kohtaa maanpinnan? Anna vastaus asteen tarkkuudella.

<http://rememberingletters.wordpress.com/2012/01/12/gateway-arch/>. Luettu 12.2.2013.

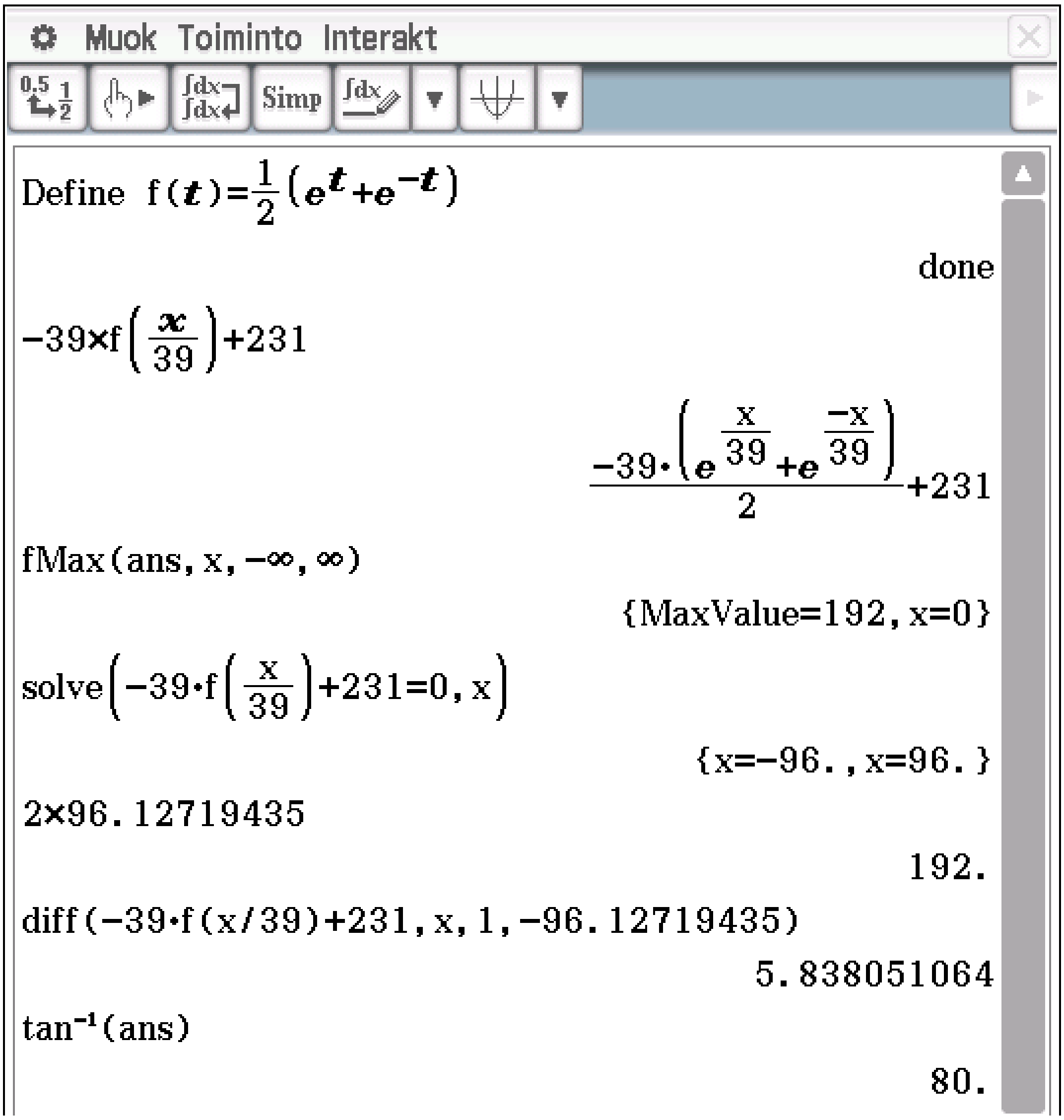
Tehtävän 9 ratkaisu:

a) Muodostetaan tehtävän mukainen yhdistetty funktio ja lasketaan sen suurin arvo. Kaaren korkeudeksi saadaan 192 metriä.

b) Ratkaistaan kaaren nollakohdat ja lasketaan niiden välimatka. Kaaren leveys on metrin tarkkuudella 192 metriä.

c) Kysytty kulma saadaan ratkaisemalla x-akselin ja käyrän leikkauskohtaan piirretyn tangentin kulmakertoimesta. Asteen tarkkuudella vastaus on 80°.

Laskut näkyvät ClassPad II Manager –ohjelmasta otetussa näyttökuvassa seuraavalla sivulla. ClassPad II Managerin näkymän voi laittaa joko laskimen näytön mittasuhteisiin kuten tehtävässä 7 tai vapaasti skaalattavan kokoiseksi kuten tässä tehtävässä.



11. **a)** Osoita, että funktio $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ on aidosti kasvava, kun $x \in \mathbf{R}$.

b) Määritä funktion $f(x)$ raja-arvo, kun x kasvaa rajatta.

c) Päteekö kaikilla $x \geq 10$ epäyhtälö $f(x) \geq 0{,}999$?

Tehtävän 11 ratkaisu:

a) Koska funktion derivaatalla ei ole nollakohtia, derivaattafunktio on kaikkialla jatkuva ja se saa positiivisen arvon jossain pisteessä, niin se on kaikkialla positiivinen funktio. Tällöin funktio on aidosti kasvava.

b) Raja-arvo muuttujan kasvaessa rajatta on 1.

c) Koska f(10) > 0,999 ja funktio on aidosti kasvava, niin väite pitää paikkansa.

ClassPadin laskut ovat seuraavalla sivulla.

Muok Toiminto Interakt

Simp

Define $f(x)=\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$

done

$\dfrac{d}{dx}(f(x))$

$$\frac{e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}$$

solve(ans=0, x)

No Solution

$\dfrac{e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}\Big|x=0$

$$\frac{1}{4}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))$

$$1$$

f(10)

$$\frac{e^{10}}{e^{10}+1}$$

$\dfrac{e^{10}}{e^{10}+1}$

$$0.9999546021$$

Voit tiedustella koulullesi jakson ajaksi lainaan salkullista ClasPadeja. Kysy saatavuus

- info@casio.fi

13. Tarkastellaan yhtälöä $x^5 - x = 1$.

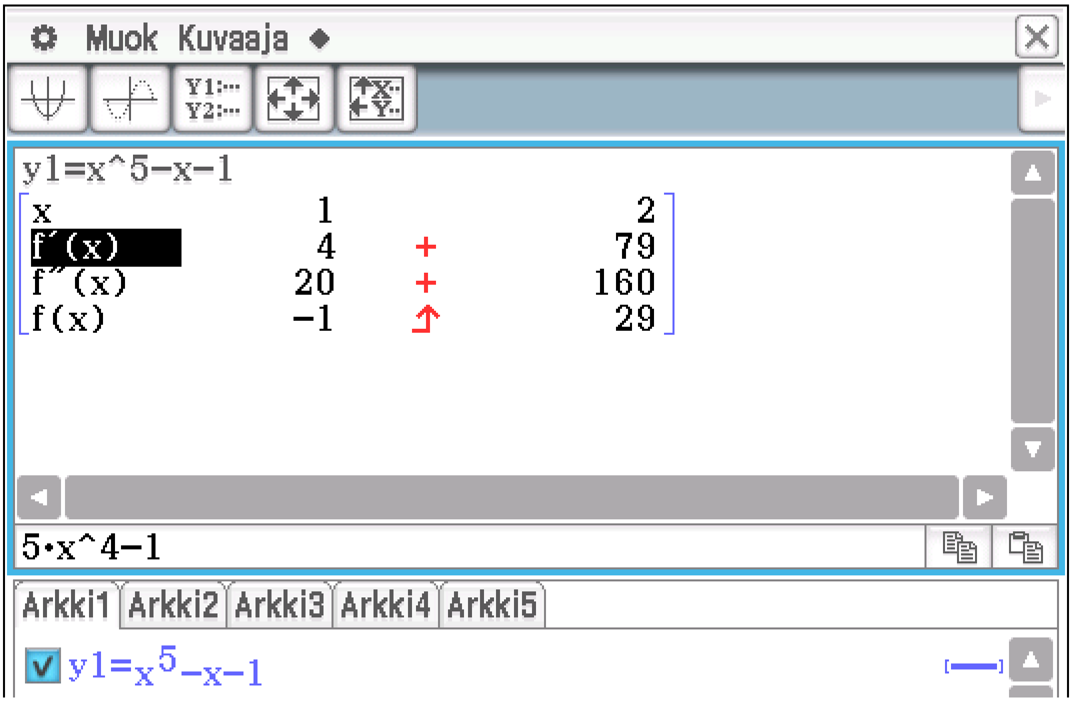
a) Osoita, että yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu välillä $1 \le x \le 2$.

b) Määritä a-kohdan ratkaisulle Newtonin menetelmän mukainen likiarvo x_4 käyttämällä alkuarvoa $x_0 = 1$. Anna vastaus kolmen desimaalin tarkkuudella.

Tehtävän 13 ratkaisu:

a) Koska yhtälöä vastaava erotusfunktio on aidosti kasvava (sen derivaattafunktio on positiivinen) välillä [1, 2] ja funktio saa välin päätepisteissä erimerkkiset arvot f(1) = -1 < 0 ja f(2) = 29 > 0, niin jatkuvana funktiona sillä on pakko olla tasan yksi nollakohta kyseisellä välillä.

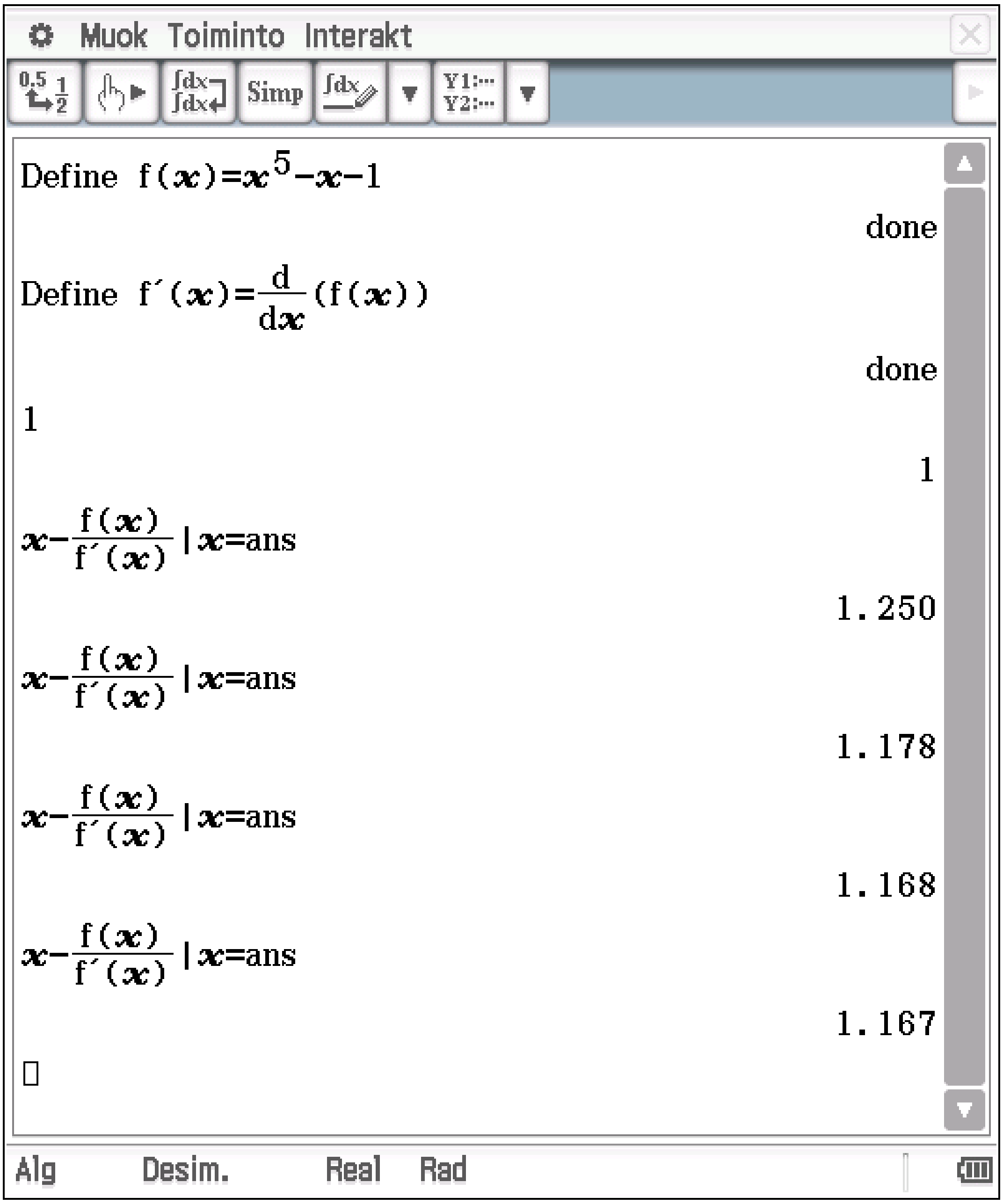
Alla on ClassPadin kulkukaavio välille [1, 2], josta kyseiset arvot löytyvät.



Oletko hyödyntänyt aiempien vuosien yo-kokeiden ratkaisut opetuksessasi? Esim. abien kertauskurssille harjoitustehtäviksi tai itseopiskeluun ja kertailuun sopivia vihkosia löydät linkistä

- http://www.casio-laskimet.fi/fi/opettajakoulu/opetusmateriaalia/

b) Alkuperäisen yhtälön ratkaisu on sama kuin erotusfunktion nollakohta. Muodostetaan Newtonin iterointikaava ClassPadilla, jolloin likiarvoksi x_4 saadaan kolmen desimaalin tarkkuudella 1,167.



Casio ja YTL pääsivät lisenssineuvotteluissa sopimukseen toukokuussa 2014 ja ClassPad II Manager-ohjelma on osana sähköistä koeympäristöä vuoden 2019 yo-kokeissa.

Tarvitsetko tukea käyttöönotossa tai haluatko koulullesi maksuttoman workshopin aiheesta?

- info@casio.fi