”Enemmän aikaa matematiikan opiskeluun,
vähemmän aikaa softan opetteluun.”

Laske Laudatur ClassPadilla

Pitkä matematiikka, kevät 2016

Casio Scandinavia

Keilalahdentie 2-4 | 02150 Espoo | info@casio.fi

Hyvä lukija,

Ensimmäinen kaksiosainen yo-koe on nyt tehty!

Käsissäsi on ratkaisut kevään 2016 pitkän matematiikan A- ja B-osion tehtäviin. A-osa ratkaistaan kokeessa ilman laskinta, mutta tässä vihkosessa vastauksia on perusteltu laskimen avulla. Ratkaisut ovat ladattavissa pdf-muodossa ja eActivity-tiedostoina (.xcp) myös suomenkielisiltä Casion tukisivuilta

http://www.casio-laskimet.fi

Tukea

Edellisten vuosien ratkaisut ovat suosittuja kertausmateriaaleja abien valmistautumisessa tuleviin kirjoituksiin. Laskuteknisiä vinkkejä sisältävä YouTube –kanava on osa opiskelijoiden ja opettajien tukemista ja kanava onkin kerännyt lyhyessä ajassa yli 30 000 katselukertaa! Kanavan nimi on fx-CP400 ja lyhennetty linkki siihen on http://bit.ly/fx-cp400.

ClassPad II Manager

Ratkaisut kevään yo-kokeisiin on tehty ClassPad II Manager –ohjelmalla. Samat laskut voidaan tehdä myös laskimella fx-CP400 ja vastaustiedostotkin käyvät molempiin. Tämä tukee siirtymistä laskimista ohjelmien käyttöön. Casion ajatus helppokäyttöisyydestä sisältää sen, että laskimen käytön osaavat voivat suoraan siirtyä käyttämään ohjelmaa ilman erillistä opettelua tai perehdytystä.

ClassPad II Manager-ohjelma tulee laskimen mukana ja sen voi halutessaan hankkia myös ilman laskinta, oman koulun käytännön mukaisesti. Ohjelma sopii erinomaisesti opetuksen tueksi älytaulun tai projektorin kaveriksi ja ohjelman käyttö kotitehtävien laskemisessa ja sähköisissä kurssikokeissa auttaa siirtymisessä kohti sähköisiä kokeita.

Mikäli et ole vielä ehtinyt kokeilemaan ohjelmaa, niin sen 90 päivän ilmaisen trial-version voit ladata osoitteesta https://edu.casio.com. Tältä sivulta löydät myös mm. uusimmat käyttöjärjestelmien päivitykset ja usein kysytyt kysymykset vastauksineen.

Aurinkoisia kevätpäiviä,

Espoossa 23.3.2016 Pepe Palovaara

A-osio

1. Täydennä oikeiden vaihtoehtojen numerot alempaan taulukkoon.

		1	2	3
A	Lausekkeen $1{,}1^3$ arvo on	1,13	3,3	1,331
B	Tilavuus $0{,}5\ \mathrm{m}^3$ on sama kuin	50 l	500 l	5 000 l
C	Luvuista $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{7}$ ja $\frac{16}{21}$ suurin on	$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{16}{21}$
D	Luvun $-a+b$ vastaluku on	$b-a$	$a-b$	$-a-b$
E	Yhtälön $x^2-3x+1=0$ juurten summa on	3	4	5
F	Tuotteen hinta nousee ensin 10 % ja laskee sitten 10 %, joten lopullinen hinta on … alkuperäisestä hinnasta.	99 %	100 %	101 %

1) Tutkitaan kohdat A–F:

A)

1.1^3

1.331

B) 1 m^3 = 1000 dm^3 = 1000 litraa, joten 0,5 m^3 = 500 litraa.

C) Lavennetaan lukujen nimittäjäksi 21, jolloin osoittajat ovat 14, 18 ja 16. Koska luvut ovat positiivisia, niin suurin luvuista on se, jossa on suurin osoittaja eli keskimmäinen $\frac{6}{7}$.

D) Lasketaan vastaluku

$-(-a+b)$

a−b

E) Juurten summa on $-\frac{b}{a}$ eli $-\frac{-3}{1}=3$.

F) Kokonaismuutosta kuvaa kerroin

1.1*0.9

0.99

mikä vastaa 99% alkuperäisestä hinnasta.

Oikea rivi on siis A=3, B=2, C=2, D=2, E=1, F=1.

2. **a)** Sievennä lauseke $x - \left(2x^2 - (3x - 4x^2)\right)$.

b) Osoita, että luvut

$$\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ ja } \frac{\sqrt{6}}{2}$$

ovat toistensa käänteislukuja.

c) Osoita, että $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$, kun $a > 0$ ja $b > 0$.

$x-(2x^2-(3x-4x^2))$

$$-6\cdot x^2+4\cdot x$$

b) Luvut ovat toistensa käänteislukuja, mikäli niiden tulo on 1:

$\frac{\sqrt{6}}{3} * \frac{\sqrt{6}}{2}$

$$1$$

c) Koska epäyhtälön molemmat puolet ovat > 0, niin ne voidaan korottaa toiseen potenssiin

$(\sqrt{a+b})^2$

$$a+b$$

expand$((\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$$a+b+2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$$

Koska $2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}>0$, niin väite on todistettu.

3. **a)** Laske vektoreiden $\overline{a} = 2\overline{i} - 3\overline{j}$ ja $\overline{b} = -\overline{i} - 7\overline{j}$ pituudet ja pistetulo $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

b) Laske integraali

$$\int_0^9 \left(3 + \sqrt{x}\right)\, dx.$$

a) Vektorien pituudet ovat

norm([2 −3])

$$\sqrt{13}$$

norm([−1 −7])

$$5\cdot\sqrt{2}$$

ja niiden välinen pistetulo on

dotP([2 −3],[−1 −7])

$$19$$

b) Määrätyn integraalin arvo on

$\int_0^9 (3+\sqrt{x})dx$

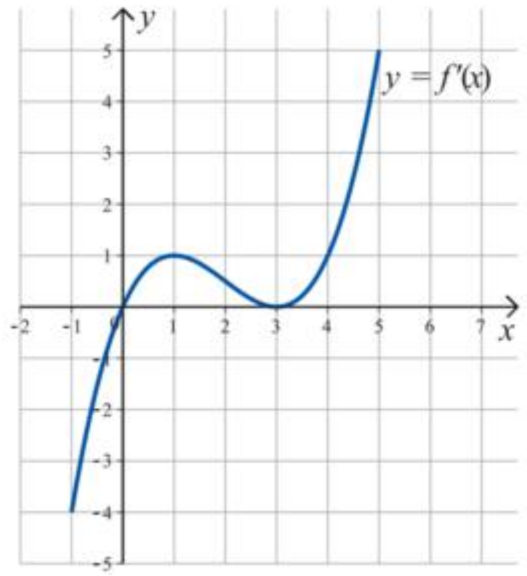
$$45$$

4. Alla olevassa kuviossa on erään funktion $f(x)$ derivaattafunktion $f'(x)$ kuvaaja välillä $-1 < x < 5$.

a) Määritä kuvaajan perusteella derivaattafunktion $f'(x)$ nollakohdat.

b) Määritä kuvaajan perusteella ne välit, joilla funktio $f(x)$ on kasvava.

c) Määritä kuvaajan perusteella funktion $f(x)$ paikalliset ääriarvokohdat ja niiden tyypit.



a) f'(x)=0 kun x≈0 tai x≈3.

b) Funktio kasvaa kun f'(x)≥0 (yhtäsuuruus vain yksittäisissä pisteissä) eli välillä 0≤x<5.

c) Ainoa paikallinen ääriarvokohta on x≈0. Se on paikallinen minimikohta, koska derivaatan arvo muuttuu negatiivisesta positiiviseksi.

Vinkki: Taulukkolaskentaan on syötetty lukupareja derivaatan kuvaajalta ja sovitettu niihin 3. asteen regressio.

Näin saatu funktio on integroitu pääasovelluksessa ja molempien kuvaajat piirretty Käyrä&Taulukko –sovelluksessa.

3. asteen regr

$y=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$

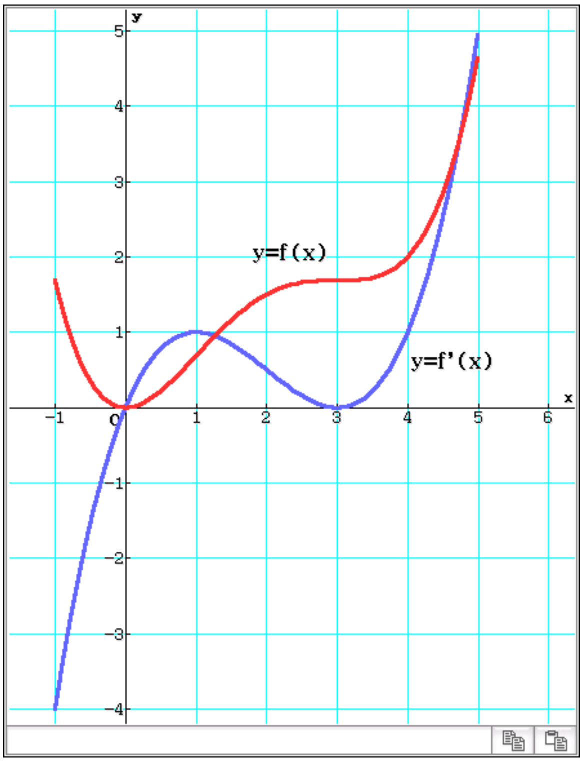
$a = 0.25$

$b = -1.5$

$c = 2.25$

$d = 0$

$r^2 = 1$



B1-osio

5. Eurooppalaisessa ruletissa kierroksen tulos on yksi luvuista $0, 1, 2, 3, \ldots, 35, 36$, jotka kaikki ovat yhtä todennäköisiä. Luku 0 on musta, ja muista luvuista puolet on punaisia ja puolet valkoisia. Laske seuraavien pelitapojen voittojen odotusarvot, kun panoksena on 1 euro.

a) Pelaaja valitsee yhden luvuista $0, 1, 2, 3, \ldots, 35, 36$. Jos kierroksen tulos on tämä luku, niin pelaaja saa takaisin oman panoksensa ja voittaa 35 euroa. Muissa tapauksissa hän häviää panoksensa.

b) Pelaaja valitsee vaakarivin

$$\boxed{7}\boxed{8}\boxed{9}.$$

Jos kierroksen tulos on jokin näistä luvuista, niin pelaaja saa takaisin oman panoksensa ja voittaa 11 euroa. Muissa tapauksissa hän häviää panoksensa.

c) Pelaaja valitsee valkoisen värin. Jos kierroksen tulos on jokin valkoinen luku, niin pelaaja saa takaisin oman panoksensa ja voittaa 1 euron. Muissa tapauksissa hän häviää panoksensa.

a) Merkitään X="voiton suuruus", jolloin sen arvojoukko on {−1, 35} ja odotusarvo E(X) on

$$\frac{1}{37}*35+\frac{36}{37}*(-1)$$

$$-\frac{1}{37}$$

b) Voiton todennäköisyys kolminkertaistuu a-kohtaan verrattuna, mutta vastaavasti voiton arvojoukkokin muuttuu {−1, 11}. Odotusarvo on

$$\frac{3}{37}*11+\frac{34}{37}*(-1)$$

$$-\frac{1}{37}$$

c) Voiton arvojoukko on nyt {−1, 1} ja odotusarvo

$$\frac{18}{37}*1+\frac{19}{37}*(-1)$$

$$-\frac{1}{37}$$

Voiton odotusarvo on siis kaikissa kohdissa $-\frac{1}{37}$ euroa eli n. −3 senttiä.

YO-ratkaisut netissä: http://www.casio-laskimet.fi/fi/opettajakoulu/opetusmateriaalia/

Laskuvinkkejä YouTubessa: http://bit.ly/fx-cp400

6. Maapallon säde on 6 371 km, ja sen pohjoisen napapiirin leveysaste on 66,5. Pohjoiselta napapiiriltä valitaan pisteet A ja B, joiden pituusasteiden erotus on 90 astetta.

a) Määritä pisteiden A ja B välisen viivasuoran tunnelin pituus.

b) Määritä pisteiden A ja B välisen lyhyemmän napapiirin kaaren pituus.

Pohjoisen napapiirin säde on r=sin(23.5)*6371 km.

a) Tunnelin pituus on hypotenuusa suorakulmaisessa r-kylkisessä kolmiossa:

$\sqrt{2}*\sin(23.5)*6371$

3592.71101

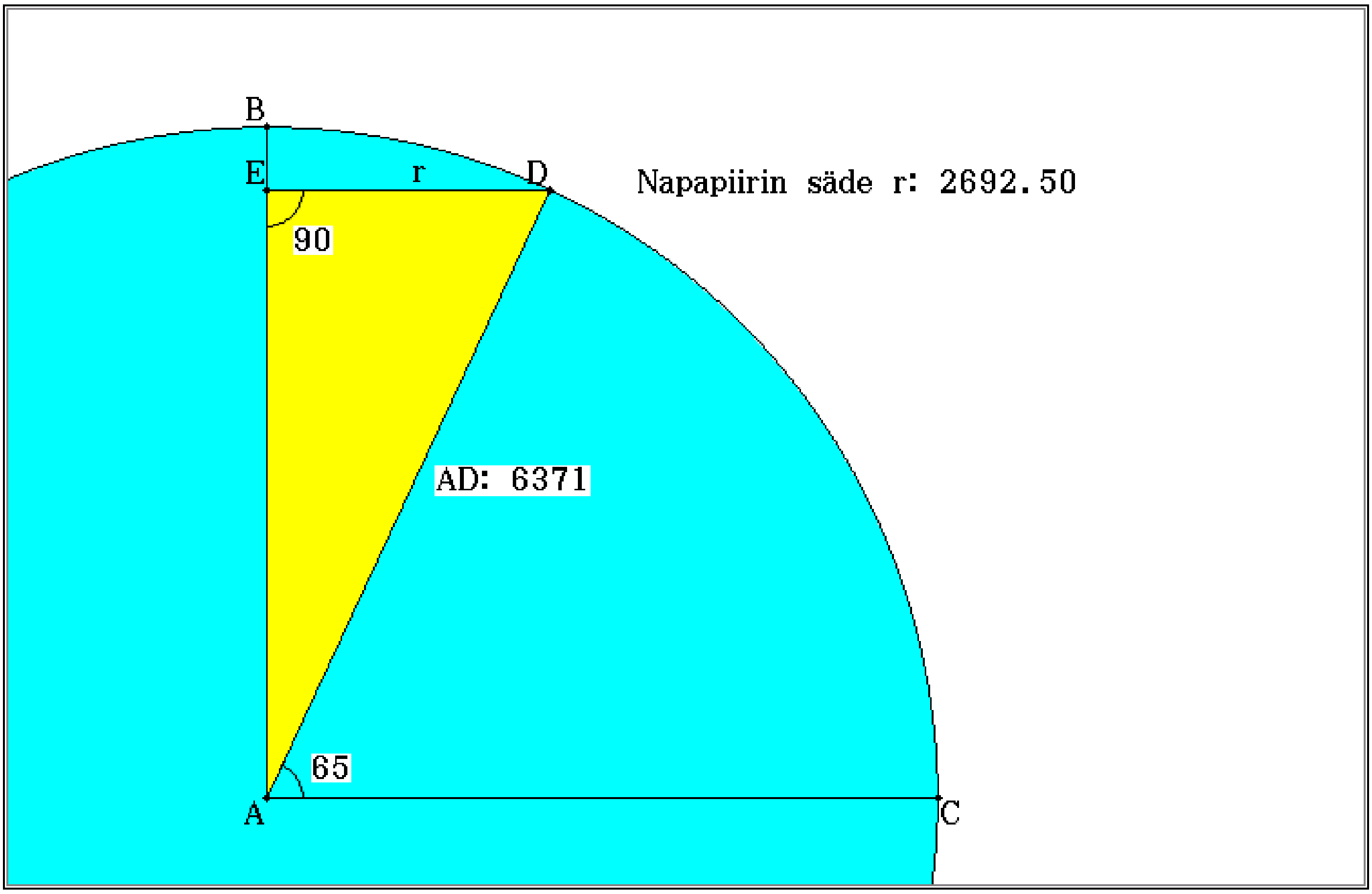
eli tunneli olisi noin 3593 km pitkä.

b) Napapiirin lyhemmän kaaren pituus on neljännesympyrän kaari:

$\frac{1}{4}*2\pi*\sin(23.5)*6371$

3990.498612

eli noin 3990 km.



7. Kolme ympyrää sivuaa toisiaan oheisen kuvion mukaisesti. Ympyröiden keskipisteet ovat A, B ja C ja niiden säteet samassa järjestyksessä 3, 3 ja 2. Kuinka suuri ympyrä mahtuu näiden kolmen ympyrän väliin jäävään alueeseen? Anna vastauksena tämän ympyrän säteen tarkka arvo.

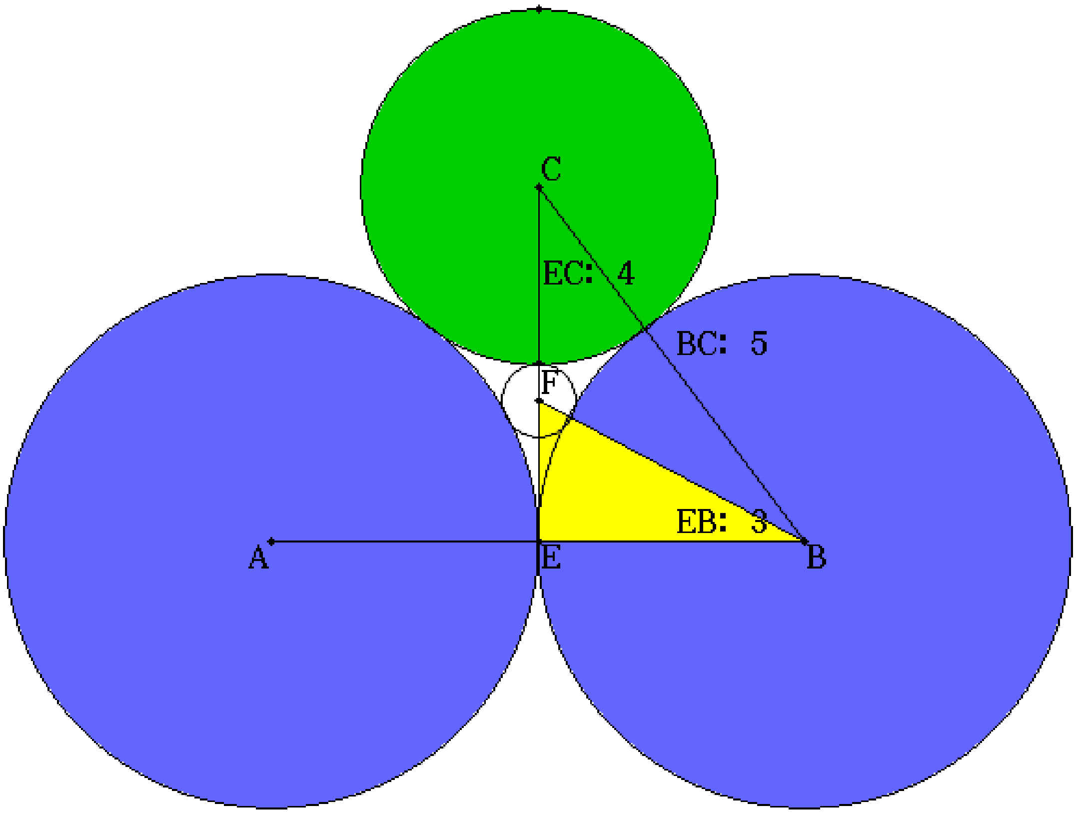
Pythagoraan kolmiosta EBC (kuva alla) saadaan sivun EC pituudeksi 4. Merkitään keskimmäisen ympyrän keskipistettä F ja sädettä r.

Suorakulmaisessa kolmiossa EBF on sivut EF=2−r, EB=3 ja FB=3+r. Pythagoraan lauseella voidaan ratkaista kysytty säde r:

solve$(3^2+(2-r)^2=(3+r)^2, r)$

$$\left\{r=\frac{2}{5}\right\}$$

Ympyrän säteen pituus on siis $\frac{2}{5}$.



CASIO

8. **a)** Muodosta sen tason yhtälö, joka kulkee pisteen $(2, 4, 6)$ kautta ja leikkaa xy-tason pitkin suoraa $x + 2y = 3$.

b) Missä pisteissä a-kohdan taso leikkaa koordinaattiakselit?

Ratkaistaan leikkaussuoralta koordinaattiakselien ja tason leikkauspisteet. Samalla saadaan tason kolme pistettä:

$x+2y=3 \mid x=0$

$$2\cdot y=3$$

$\mathrm{solve}(2\cdot y=3, y)$

$$\left\{y=\frac{3}{2}\right\}$$

$x+2y=3 \mid y=0$

$$x=3$$

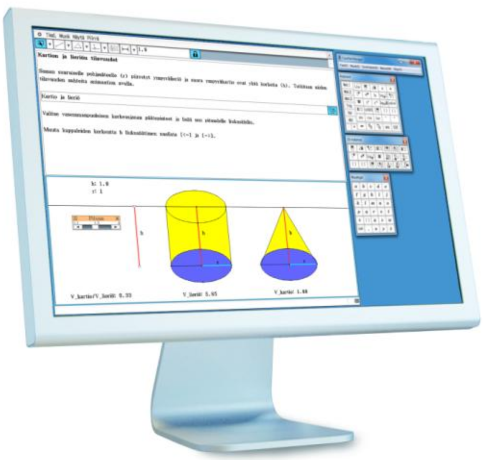
Siis tasossa on pisteet $A(0, \frac{3}{2}, 0)$, $B(3, 0, 0)$ ja $C(2, 4, 6)$. Tason virittää vektorit AB ja AC:

$\begin{bmatrix} 3-0 & 0-\frac{3}{2} & 0-0 \end{bmatrix} \Rightarrow AB$

$$\begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 2-0 & 4-\frac{3}{2} & 6-0 \end{bmatrix} \Rightarrow AC$

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} & 6 \end{bmatrix}$$



Lataa ilmainen testiversio ClassPad II Managerista

https://edu.casio.com/freetrial/fi/freetrial_list.php

Tason yhtälö vektorimuodossa on OP=OA+tAB+sAC eli sievennettynä

$$\begin{bmatrix}0 & \frac{3}{2} & 0\end{bmatrix}+t*\begin{bmatrix}3 & -\frac{3}{2} & 0\end{bmatrix}+s*\begin{bmatrix}2 & \frac{5}{2} & 6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2\cdot s+3\cdot t & \frac{5\cdot s}{2}-\frac{3\cdot t}{2}+\frac{3}{2} & 6\cdot s\end{bmatrix}$$

Koska z−akselilla x=0 ja y=0, niin saadaan

$$\left\{\begin{array}{l}2\cdot s+3\cdot t=0\\ \frac{5\cdot s}{2}-\frac{3\cdot t}{2}+\frac{3}{2}=0\end{array}\right|_{s,\,t}$$

$$\left\{s=-\frac{3}{7},\ t=\frac{2}{7}\right\}$$

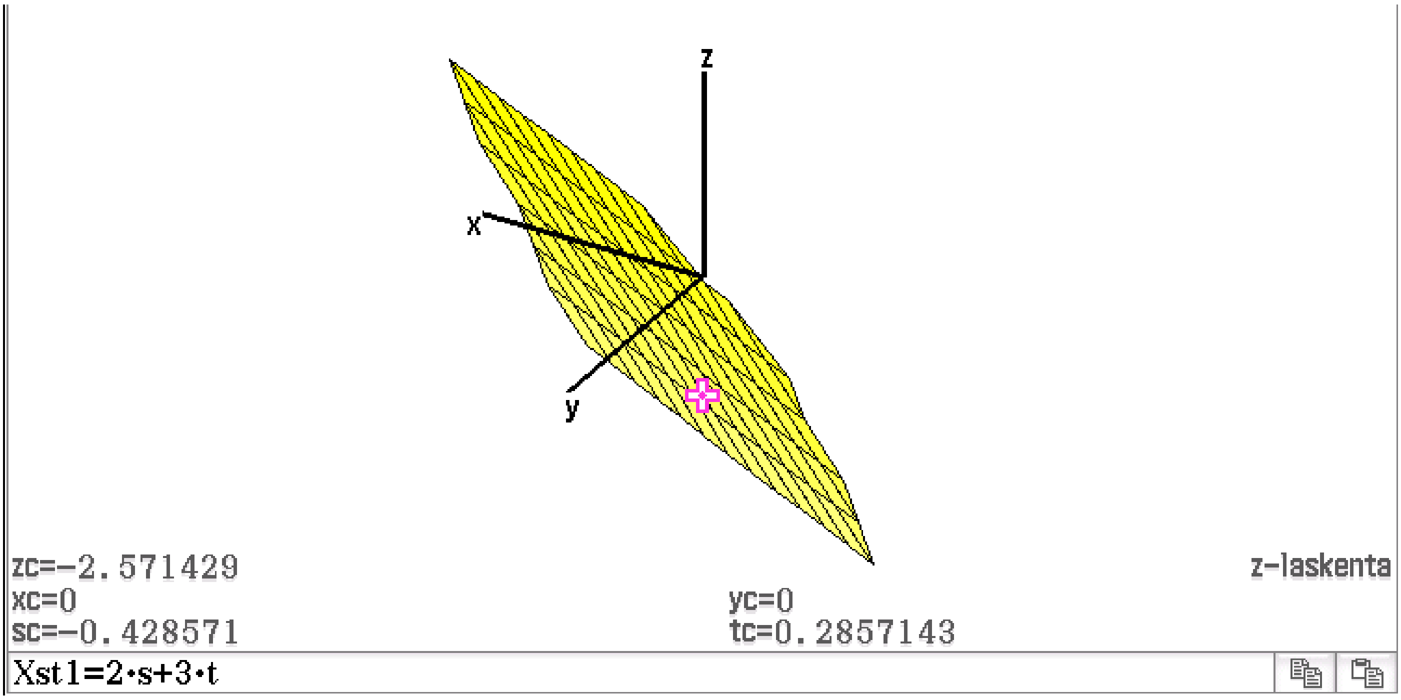
ja z−koordinaatiksi

$$6\cdot s\,|\,s=-\frac{3}{7}$$

$$-\frac{18}{7}$$

Kysytyt akselien leikkauspisteet ovat $(0,\frac{3}{2},0)$, $(3,0,0)$ ja $(0,0,-\frac{18}{7})$ ja

tason yhtälö on $OP=(2\cdot s+3\cdot t)i+\left(\frac{5\cdot s}{2}-\frac{3\cdot t}{2}+\frac{3}{2}\right)j+(6\cdot s)k$, missä $s,t \in \mathbf{R}$.



CASIO

9.1. Luvun $\sqrt{20}$ likiarvoja voidaan laskea tarkastelemalla jonoa suorakulmioita, joiden pinta-ala on 20. Aloitetaan suorakulmiosta S_1, jonka sivujen pituudet ovat

$$x_1 = 1 \quad \text{ja} \quad y_1 = \frac{20}{x_1}.$$

Seuraavan suorakulmion S_2 yhden sivun pituus x_2 saadaan laskemalla lukujen x_1 ja y_1 keskiarvo, jolloin toisen sivun pituus on

$$y_2 = \frac{20}{x_2}.$$

Tiedetään, että jatkamalla tällä tavalla saadaan jono suorakulmioita $S_1, S_2, S_3, \ldots,$ joiden muoto lähestyy neliötä. Tämän neliön sivun pituus on silloin $\sqrt{20}$. Määritä approksimaation x_5 suhteellinen virhe oikeaan 8-desimaaliseen likiarvoon $\sqrt{20} \approx 4{,}47213596$ verrattuna. Anna vastaus prosenttiyksikön kymmenesosan tarkkuudella.

	A	B	C
1	i	xi	yi
2	1	1	20
3	2	10.5	1.904761905
4	3	6.202380952	3.224568138
5	4	4.713474545	4.243154346
6	5	4.478314445	4.465965989
7			
8			
9			

=(B5+C5)/2

Käytetää iteroinnissa taulukkolaskentaa. Sarake x_i koostuu edellisen rivin keskiarvosta ja sarake y_i luvusta $20/x_i$.

Virhetermin lasku kuten iterointikin näkyy taulukon alapuolen kaavarivillä.

	A	B	C
1	i	xi	yi
2	1	1	20
3	2	10.5	1.904761905
4	3	6.202380952	3.224568138
5	4	4.713474545	4.243154346
6	5	4.478314445	4.465965989
7			
8			
9			

=20/B5

	A	B	C
1	i	xi	yi
2	1	1	20
3	2	10.5	1.904761905
4	3	6.202380952	3.224568138
5	4	4.713474545	4.243154346
6	5	4.478314445	4.465965989
7			
8		Virhe%	Likiarvo
9		0.138155135	0.1

=(B6-4.47213596)·100/4.47213596

9.2. Funktion $g(x)$ arvoille on voimassa $-20 \leq g(x) \leq 16$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Osoita, että funktio $f(x) = x^2 g(x)$ on derivoituva kohdassa $x = 0$.

Muodostetaan erotusosamäärä $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ funktiolle f kohtaan x=0. Koska

$f(0)=0^2*g(x)$ ja g(x) saa vain äärellisiä arvoja, niin f(0)=0. Erotusosamäärä saadaan muotoon

$$\frac{h^2*g(h)-0}{h}$$

$$h\cdot g(h)$$

Edelleen, koska aina $-20 \leq g(h) \leq 16$, niin $\lim_{h \to 0} (h\cdot g(h))=0$. Koska erotusosamäärälle löytyi raja-arvo, niin f on derivoituva kohdassa x=0.

B2-osio

10. Lauseke 2016^{2016} esitetään kymmenjärjestelmän lukuna.

a) Mikä on luvun viimeinen numero?

b) Mitkä ovat luvun kaksi ensimmäistä numeroa?

c) Kuinka monta numeroa luvussa on?

a) Koska ykkösten paikalle tuleva luku on aina kertolaskun 6*6 tulos, niin viimeinen numero on 6.

Tämän voi laskea myös kongruenssin avulla modulo 10:

$\mathrm{mod}(2016^{2016}, 10)$

$$6$$

b) Kirjoitetaan luku 10-potenssimuotoon käyttämällä logaritmia. Koska $2016^{2016} = 10^{2016\log_{10}(2016)}$, niin luvun kymmenenpotenssimuodon eksponentti on

$2016\log_{10}(2016)$

$$6661.852904$$

ja luku voidaan kirjoittaa muotoon $10^{6661.852904} = 10^{0.852904}*10^{6661}$. Lasketaan kerroin

$10^{0.852904}$

$$7.126954727$$

jolloin nähdään luvun alkavan numeroilla 71.

c) Luvun kymmenenpotenssimuodosta nähdään, että numeroita on 6662 kpl.

11. Tehtaassa valmistetaan tölkitettyjä säilykehedelmiä. Päärynänpuolikkaita pakataan suoran ympyrälieriön muotoiseen peltitölkkiin. Tölkin pohja- ja kansilevyjen materiaalin hinta on 2,00 €/m^2 ja vaipan materiaalin hinta 1,00 €/m^2. Suunnittele materiaalikustannuksiltaan mahdollisimman halpa peltitölkki, jonka tilavuus on 1 000 cm^3. Anna vastauksena tölkin korkeuden ja pohjan halkaisijan suhteen tarkka arvo.

Tilavuuden yhtälöstä voidaan ratkaista korkeus h:

solve($\pi * r^2 * h = 1000$, h)

$$\left\{h=\frac{1000}{r^2\cdot\pi}\right\}$$

ja pinta-alojen avulla saadaan hinnalle funktion lauseke muuttujan r avulla, jossa pohjien arvo on kerrottu kahdella materiaalin hinnan takia:

$$2*\pi*r^2*2+\frac{1000}{r^2\cdot\pi}*2*\pi*r$$

$$4\cdot r^2\cdot\pi+\frac{2000}{r}$$

Lasketaan hinnan funktiolle pienin arvo sillä ehdolla, että r>0.

$$\text{fMin}\left(4\cdot r^2\cdot\pi+\frac{2000}{r}, r, 0.00000001, \infty\right)$$

$$\left\{\text{MinValue}=300\cdot(4\cdot\pi)^{\frac{1}{3}}, r=\frac{5\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}}\right\}$$

Tällöin tölkin korkeudeksi saadaan

$$\frac{1000}{r^2\cdot\pi}\,\Big|\,r=\frac{5\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{40}{(4\cdot\pi)^{\frac{1}{3}}}$$

ja korkeuden ja pohjan halkaisijan suhteeksi saadaan

$$\left(\frac{40}{(4\cdot\pi)^{\frac{1}{3}}}\right)\Big/\left(2*\frac{5\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}}\right)$$

$$2$$

Vastaus: Kysytty suhde on 2:1.

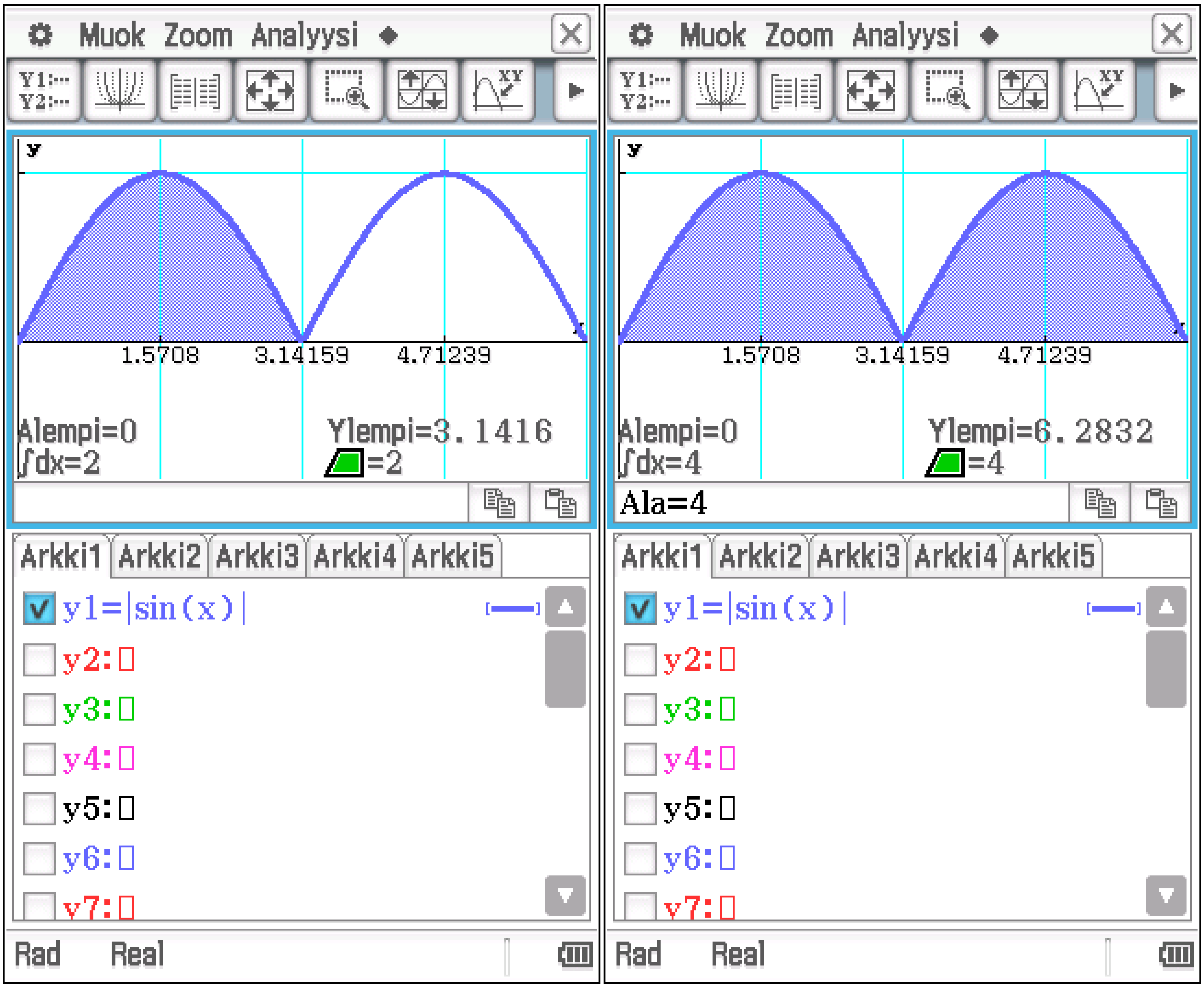
12. Tarkastellaan funktiota
$$f(x) = \int_0^x |\sin t|\,dt,$$
kun $0 \le x \le 2\pi$.

a) Perustele geometrisesti kaava $f(2\pi) = 2f(\pi)$.

b) Laske $f(x)$, kun $0 \le x \le 2\pi$.

a) f(2π) tarkoittaa käyrän y=|sin(x)| määräistä integraalia välillä [0,2π]. Koska itseisarvot ovat aina epänegatiiviset, niin samalla kyseessä on käyrän ja x-akselin välinen pinta-ala välillä [0,2π]. Koska sinifunktion peräkkäiset nollakohdat ovat 0, π ja 2π, niin alue muodostuu kahdesta x-akselin yläpuolella olevasta symmetrisestä pallukasta.

2f(π) tarkoittaa geometrisesti yhden edellä kuvatun pallukan pinta-alaa kerrottuna kahdella. Koska pallukat ovat symmetriset, niin f(2π)=2f(π). Siis $\int_0^{2\pi}|\sin(t)|dt = 2\int_0^{\pi}|\sin(t)|dt$. Katso kuva alla.



b) Tapaus 1: $0 \le x \le \pi$. Koska tällä välillä $|\sin(t)| = \sin(t)$, niin funktioksi $f(x)$ saadaan

$$\int_0^x \sin(t)\,dt$$

$$-\cos(x)+1$$

Tapaus 2: Kohdassa $x=\pi$ sinifunktion merkki vaihtuu ja välillä $\pi \le x \le 2\pi$ $|\sin(t)| = -\sin(t)$. Tämä pitää huomioida itseisarvojen poistossa. Funktioksi $f(x)$ saadaan

$$\int_0^\pi \sin(t)\,dt + \int_\pi^x -\sin(t)\,dt$$

$$\cos(x)+3$$

Funktio on siis $f(x) = \begin{cases} -\cos(x)+1, & 0 \le x \le \pi \\ \cos(x)+3, & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$

Katso lisää mielenkiintoisia teemaosioita

http://www.casio-laskimet.fi/fi/opettajakoulu/opettajalle5/

13. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Tetraedrin kolme kärkeä ovat koordinaattiakseleiden pisteissä $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ ja $(0, 0, c)$, ja neljäs kärki on origossa $(0, 0, 0)$. Kärkien vastaisten tetraedrin tahkojen pinta-aloja merkitään samassa järjestyksessä kirjaimilla A, B, C ja D, jossa D tarkoittaa origon vastaisen tahkon pinta-alaa. Osoita, että

$$A^2 + B^2 + C^2 = D^2.$$

Tahkot A, B ja C ovat suorakulmaisia kolmioita ja niiden pinta−alat ovat vastaavasti A: $\frac{1}{2}*b*c$, B: $\frac{1}{2}*a*c$ ja C: $\frac{1}{2}*a*b$. Näiden toisten potenssien summaksi saadaan

$$\left(\frac{1}{2}*b*c\right)^2+\left(\frac{1}{2}*a*c\right)^2+\left(\frac{1}{2}*a*b\right)^2$$

$$\frac{a^2\cdot b^2}{4}+\frac{a^2\cdot c^2}{4}+\frac{b^2\cdot c^2}{4}$$

simplify(ans)

$$\frac{a^2\cdot b^2+c^2\cdot(a^2+b^2)}{4}$$

Tahkon D kolmion virittää vektorit

[−a 0 c]⇒ac

[−a 0 c]

[−a b 0]⇒ab

[−a b 0]

Tahkon D pinta−ala on puolet virittäjävektorien ristitulon pituudesta:

$\frac{1}{2}$norm(crossP(ac, ab))

$$\frac{\sqrt{a^2\cdot b^2+c^2\cdot(a^2+b^2)}}{2}$$

ja tällöin D^2 on

$$\left(\frac{\sqrt{a^2\cdot b^2+c^2\cdot(a^2+b^2)}}{2}\right)^2$$

$$\frac{a^2\cdot b^2+c^2\cdot(a^2+b^2)}{4}$$

jolloin saadaan $A^2+B^2+C^2=D^2$.