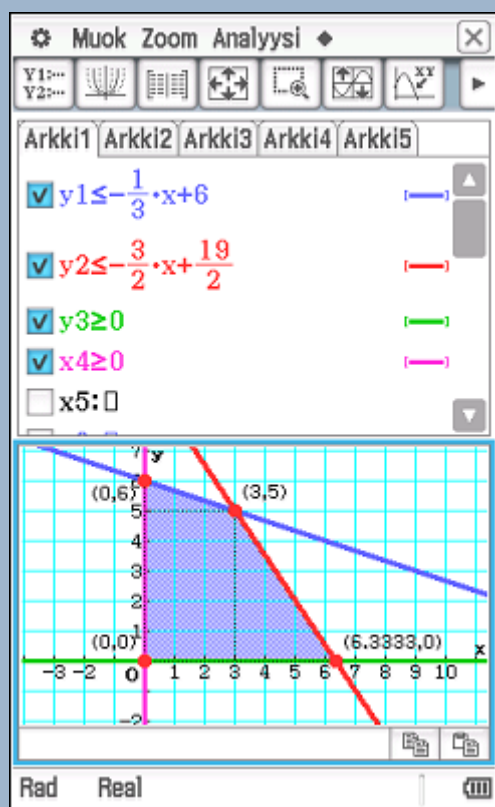


Laske Laudatur ClassPadilla

- Lyhyt matematiikka, syksy 2014 -



*”Enemmän aikaa matematiikan opiskeluun,
vähemmän aikaa laskimen opetteluun.”*

Hyvä Matemaatikko,

Paljon on taas ehtinyt tapahtua kevään yo-kokeista tähän päivään. YTL on vienyt eteenpäin sähköisen koeympäristön teknisiä ratkaisuja, kaksiosaisuus vuoden 2016 muutoksissa alkaa olla rakenteeltaan selvä ja erilaisia pilottihankkeita pyöritetään useissa lukioissa.

Myös Casion puolella on tapahtunut uudistuksia. ClassPad II Manager ohjelma on mukana vuoden 2019 sähköisessä koeympäristössä ja sekä ClassPad II Manager että symbolinen fx-CP400 laskin saivat uudet käyttöjärjestelmäversiot. Päivitykset voi ladata maksutta osoitteesta <http://edu.casio.com>.

Casion tukimuodot opettajille ja opiskelijoille ovat myös kehittyneet. ClassPadin YouTube-kanava on kerännyt tuhansia katselukertoja (<http://bit.ly/fx-cp400>) ja workshoppien syventävät kurssit ovat keränneet satoja opettajia tutkimaan matematiikkaa symbolisen laskennan keinoin. Myös ClassPadin peruskursseilla riittää väkeä.

Casio onkin saanut lisää taitavia kouluttajia antamaan opettajille täydennyskoulutusta. Joko sinun koulusi on kysynyt maksutonta koulutusta tai ilmaista lainalaskinsalkkua? Onko sinulla halua ryhtyä kouluttamaan kollegoitasi symbolisessa laskennassa? Ota yhteyttä info@casio.fi ja kysy lisää!

Hyödyllisiä linkkejä opetuksen tueksi ja esimerkiksi tutkielmien ja ryhmätöiden valmiita aiheita perehdytyksineen löydät sivuiltamme

www.casio-laskimet.fi

Kädessäsi oleva vihkonen lyhyen matematiikan yo-tehtävien ratkaisuihin käsittää ratkaisut kaikkiin 15 tehtävään. Se on tehty kuten tuleva sähköinen yo-koekin: ottamalla sieppausnäyttöjä laskinohjelmasta ja liittämällä niitä perustelujen kanssa tekstiasiakirjaan.

Mukavia hetkiä symbolisen laskennan parissa,

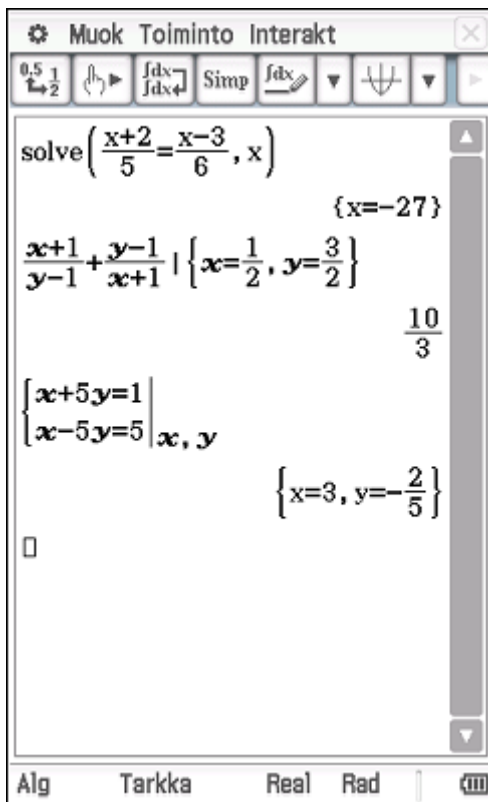
Espoossa 25.9.2014

Pepe Palovaara

1. a) Ratkaise yhtälö $\frac{x+2}{5} = \frac{x-3}{6}$.
- b) Laske lausekkeen $\frac{x+1}{y-1} + \frac{y-1}{x+1}$ arvo, kun $x = \frac{1}{2}$ ja $y = \frac{3}{2}$.
- c) Missä pisteessä suorat $x+5y=1$ ja $x-5y=5$ leikkaavat toisensa?

Tehtävän 1 ratkaisu:

ClassPadin Pääsovelluksessa ratkaistuna a-kohdan vastaus on -27, b-kohdassa $\frac{10}{3}$ ja c-kohdan leikkauspiste on $(3; -\frac{2}{5})$:



Opi nopeasti ClassPad fx-CP400 ja ClassPad II Manger-ohjelman käyttö YouTube-videoiden, opaskirjojen, ratkaisuvihkosten ja muun kirjallisuuden avulla! Katso lisää mm.

- <http://bitly.com/fx-cp400>
- <http://www.casio-laskimet.fi>
- <http://opetus.tv/tutoriaalit/casio-classpad/>

2. Mikä luku x toteuttaa annetun yhtälön?

a) $2^x = 2$

b) $2^x = \frac{1}{2}$

c) $2^x = 8^2$

d) $3^x = \frac{1}{3^5}$

e) $10^x = 1000$

f) $10^x = 0,01$.

Tehtävän 2 ratkaisu:

Symbolisesti yhtälönratkaisutoiminnolla saadaan vastaukset (jokainen kohdista on omalla rivillään):

Muok Toiminto Interakt

0.5 1/2 $\int dx$ $\int dx^4$ Simp $\int dx$ $\frac{d}{dx}$ $\frac{d}{dx}$

solve($2^x=2, x$) {x=1}

solve($2^x=\frac{1}{2}, x$) {x=-1}

solve($2^x=8^2, x$) {x=6}

solve($3^x=\frac{1}{3^5}, x$) {x=-5}

solve($10^x=1000, x$) {x=3}

solve($10^x=0.01, x$) {x=-2}

Alg Tarkka Real Rad



Oletko hyödyntänyt aiempien vuosien yo-kokeiden ratkaisut opetuksessasi? Esim. abien kertauskurssille harjoitustehtäviksi tai itseopiskeluun ja kertailuun sopivia vihkosia löydät linkistä

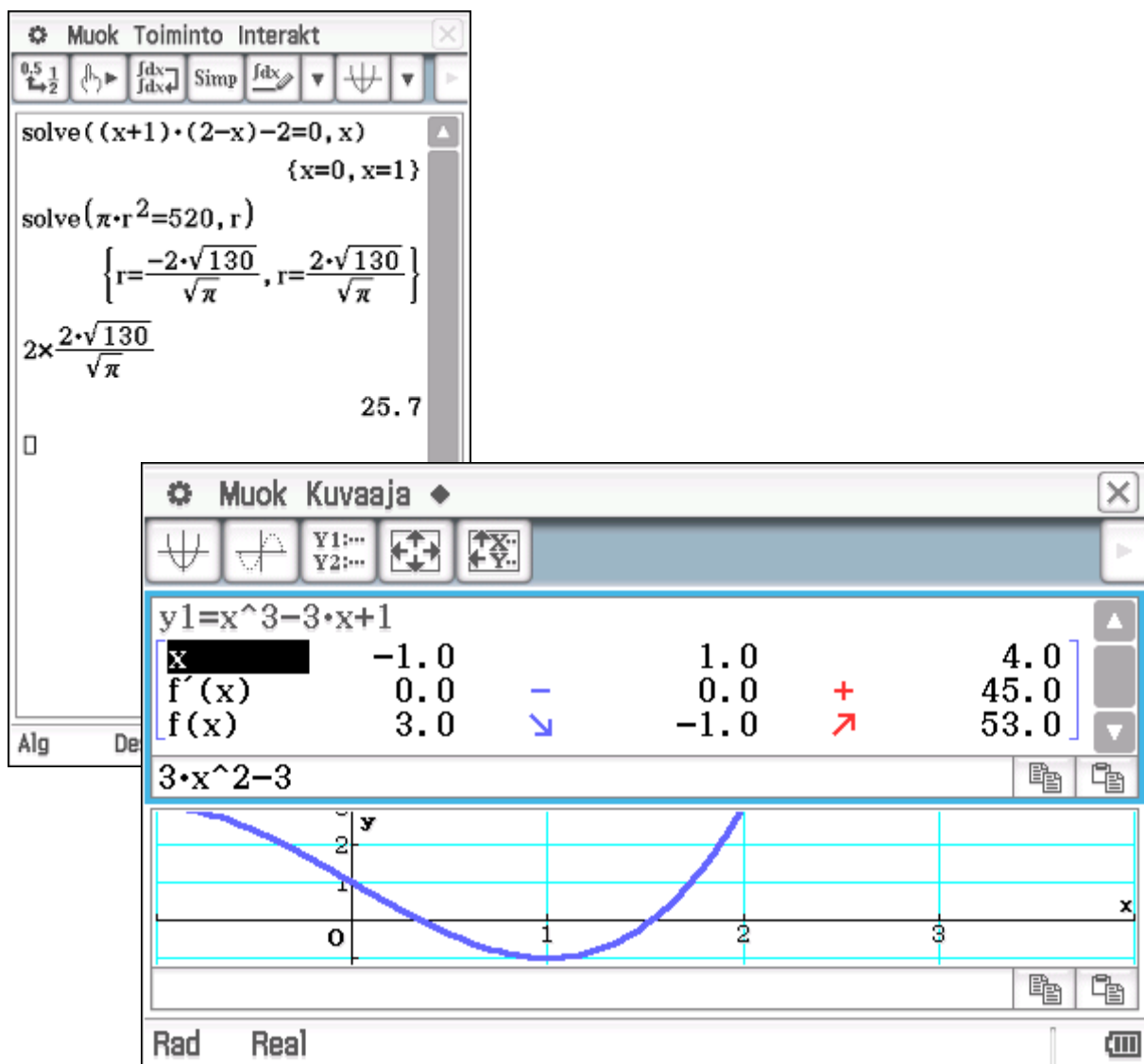
- <http://www.casio-laskimet.fi/fi/opettajakoulu/opetusmateriaalia/>

3. a) Määritä lausekkeen $(x+1)(2-x)-2$ nollakohdat.
 b) Millä kokonaisluvuilla $-1 \leq n \leq 4$ lauseke $n^3 - 3n + 1$ saa positiivisia arvoja?
 c) Ympyrän pinta-ala on 520 cm^2 . Laske sen halkaisijan pituus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

Tehtävän 3 ratkaisu:

Kohdissa a ja c ratkaistaan yhtälöt kuten edellä, tosin c-kohdassa säde kerrotaan vielä kahdella halkaisijan laskemiseksi. A-kohdan vastaus on $x = 0$ tai $x = 1$ ja c-kohdassa halkaisija on n. 25,7 cm.

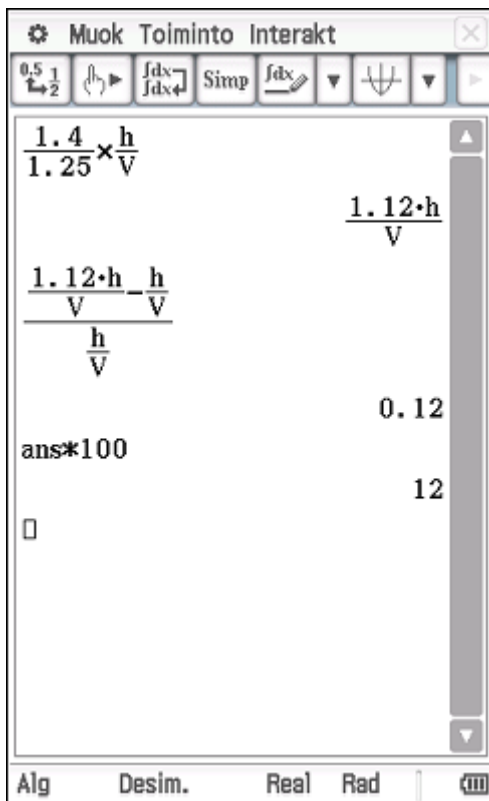
B-kohdassa voi esim. tutkia funktiota reaalisena ja selvittää kulkukaavion avulla positiiviset lukuvälit. Vastaukseen poimitaan näille väleille osuvat kokonaisluvut -1, 0, 2, 3 ja 4 (siis 1 on ainoa kokonaisluku annetulta väliltä, joka ei toteuta ehtoa).



4. Hammastahnaputkilon tilavuus on 100 ml ja hinta 1,50 €. Putkilon tilavuutta kasvatetaan 25 %, mutta samalla myyntihintaa korotetaan 40 %. Kuinka monta prosenttia kalliimpaa hammastahnaa on uudessa putkilossa millilitraa kohden?

Tehtävän 4 ratkaisu:

Merkitään alkuperäistä yksikköhintaa h/V . Lasketaan hinnan muutos suhteessa pakkauskoon muutokseen, jolloin nähdään tahnan yksikköhinnan kallistuneen 12%:



$$\frac{1.4 \times h}{1.25 \times V}$$

$$\frac{1.12 \cdot h}{V}$$

$$\frac{\frac{1.12 \cdot h}{V} - \frac{h}{V}}{\frac{h}{V}}$$

ans*100

0.12

12



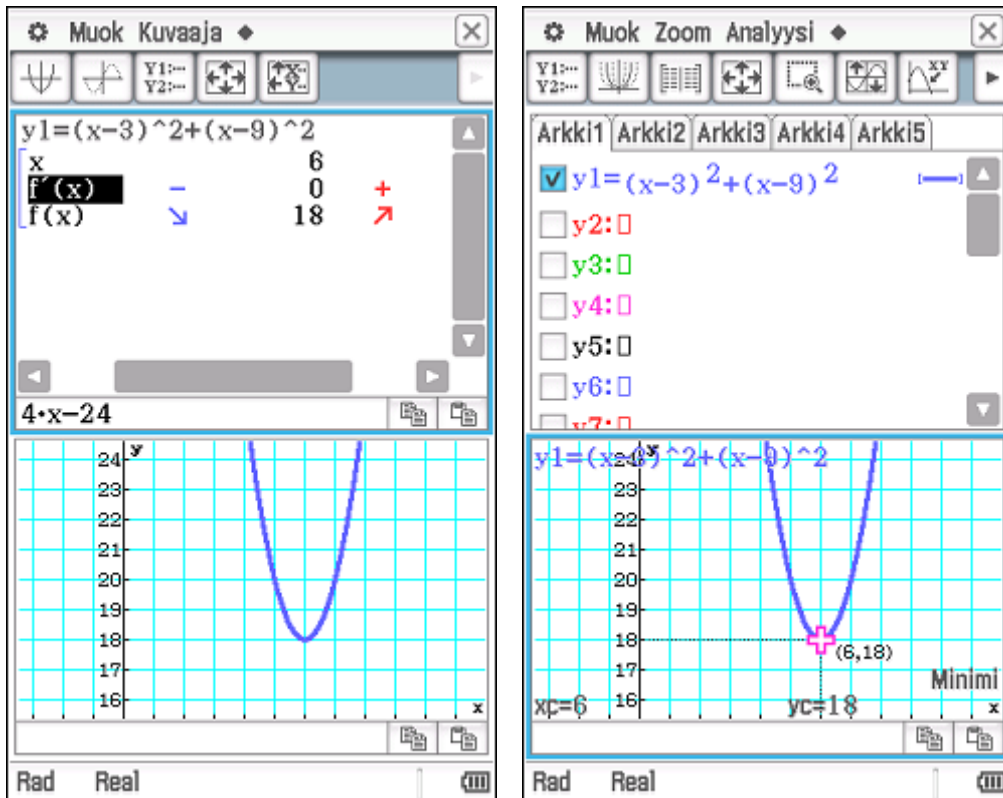
Voit tiedustella koulullesi jakson ajaksi lainaan salkullista ClasPadeja. Kysy saatavuus

- info@casio.fi

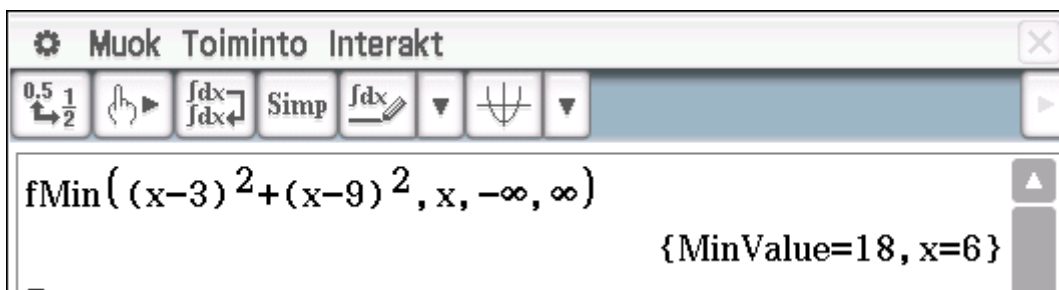
5. Millä muuttujan x arvolla summa $(x-3)^2 + (x-9)^2$ on mahdollisimman pieni?

Tehtävän 5 ratkaisu:

Tehtävää voi tutkia esim. kulkukaavion ja derivaatan avulla (vasen kuva) tai todeta ylöspäin avautuvan paraabelin pienimmän arvon löytyvän sen huipusta (oikea kuva):



Allaolevassa vaihtoehdossa on käytetty suoraan funktion pienimmän arvon määrittämistä, jolloin sen nähdään olevan 18 ja se saadaan kun muuttujan arvo on 6:



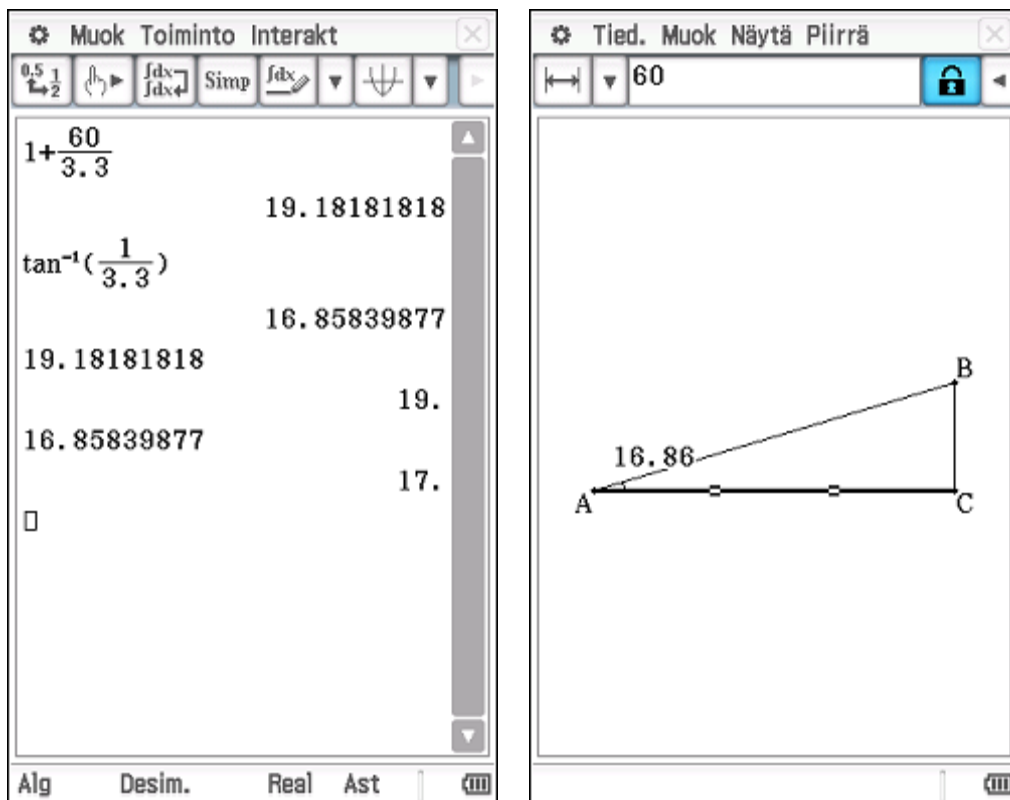
6. Liito-oravan vaakasuora siirtymä suoraviivaisessa liidossa on parhaimmillaan 3,3-kertainen korkeuden vähenemiseen verrattuna.
- a) Huippukuntoinen liito-orava aikoo liittää 60 metriä leveän aukion yli. Kuinka korkealta puusta sen täytyy ponnistaa, jotta se laskeutuisi aukion toisella puolella olevaan puuhun yhden metrin korkeudelle? Anna vastaus metrin tarkkuudella.
- b) Kuinka suuressa kulmassa vaakatasoon nähden a-kohdan liito-orava liittää? Anna vastaus asteen tarkkuudella.



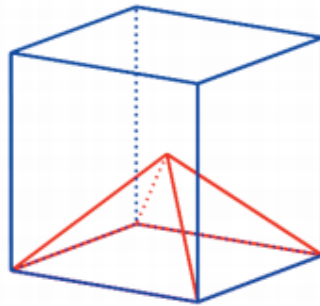
<http://webbi.meili.fi/kettu/RunotKaunisMetsakauris/Liito_oravaKuvaJaRuno.html>. Luettu 5.3.2013.

Tehtävän 6 ratkaisu:

Jokaista 3,3 metriä kohden liito-oravan pitää siis hypätä metrin korkeudelta. Kun vielä huomioidaan laskupaikan korkeus saadaan lähtökorkeudeksi n. 19 metriä. Liitokulma voidaan laskea liitosuunnan jyrkkyydestä (kulmakertoimesta) ja se on n. 17 asetta alaviistoon:



7. Kuution sisällä on pyramidi, jonka pohja yhtyy kuution pohjaan ja jonka korkeus on puolet kuution särmän pituudesta. Määritä pyramidin ja kuution tilavuuksien suhde. Kuution särmän pituus on s .



Tehtävän 7 ratkaisu:

Kuutio voidaan jakaa kuudeksi kuvan mukaiseksi pyramidiksi, joten kysytty suhde on 1:6.

Tämä voidaan myös laskea tilavuuksien suhteen laskimella:

Muok Toiminto Interakt

$\frac{1}{3} \times s^2 \times \frac{1}{2} s$

s^3

$\frac{1}{6}$

Casio ja YTL pääsivät lisenssineuvotteluissa sopimukseen toukokuussa 2014 ja ClassPad II Manager-ohjelma on osana sähköistä koeympäristöä vuoden 2019 yo-kokeissa.

Tarvitsetko tukea käyttöönotossa tai haluatko koulullesi maksuttoman workshopin aiheesta?

- info@casio.fi

8. Alla olevassa taulukossa ovat jääkiekon SM-liigan kuuden seuratuimman joukkueen keskimääräiset kotiottelujen katsojaluvut liigakaudella 2011–2012.

a) Laske katsojalukujen keskiarvo ja keskihajonta.

b) Minkä joukkueiden katsojaluvut poikkeavat keskiarvosta enemmän kuin keskihajonnan verran?

Jokerit	9 173
HIFK	8 266
Kärpät	5 821
TPS	5 534
Tappara	5 359
Ilves	5 177

Tehtävän 8 ratkaisu:

Laskimen Taulukkolaskentasovelluksella saadaan keskiarvoksi 6555 katsojaa ja keskihajonnaksi n. 1565 katsojaa. Vain Jokereilla ja HIFK:lla katsojaluvut ovat yli 1565 katsojaa keskiarvon ylä- tai alapuolella.

The screenshot shows the ClassPad II Manager interface. On the left, a table displays the attendance data for six hockey teams. On the right, a list shows the deviation of each team's attendance from the mean (6555). Below the table, a statistics window displays the mean, sum, sum of squares, and standard deviation for the data set.

Team <th>Attendance <th>Deviation from Mean</th> </th>	Attendance <th>Deviation from Mean</th>	Deviation from Mean
Jokerit	9173	2618
HIFK	8266	1711
Kärpät	5821	-734
TPS	5534	-1021
Tappara	5359	-1196
Ilves	5177	-1378

Statistics window (YKSI MUUTTOJA):

- $\bar{x} = 6555$
- $\Sigma x = 39330$
- $\Sigma x^2 = 272500092$
- $\sigma_x = 1564.8185$

Buttons: Lähtö>> Linkki Sulje

Mode: Alg Tarkka Real Rad

9. Painonhallintaa varten kehitetty painoindeksi I on laskettu kaavalla $I = \frac{m}{h^2}$ jo 1830-luvulta lähtien. Kaavassa henkilön massan m yksikkönä on kilogramma ja pituuden h yksikkönä metri. Vuonna 2013 Nick Trefethen Oxfordin yliopistosta ehdotti uutta indeksiä J , joka lasketaan kaavalla $J = \frac{1,3m}{h^{2,5}}$.
- a) Raimo on 193 cm pitkä ja painaa 102 kg. Laske hänen painoindeksinsä I ja J yhden desimaalin tarkkuudella.
- b) Hannan pituus on 160 cm ja hänen I -indeksinsä on 25. Laske hänen J -indeksinsä.
- c) Kuinka pitkän henkilön painoindeksit I ja J ovat yhtä suuret?

Tehtävän 9 ratkaisu:

Tässä ratkaisussa on käytetty numeerista ratkaisinta, jolloin annetuista suureista yksi voidaan ratkaista muiden ollessa tunnettuja. C-kohdan ratkaisu on tehty Pääsovelluksessa tavallisen yhtälön ratkaisimen avulla.

Vastauksiksi Raimon kohdalta saadaan a-kohtaan I -indeksiksi n. 27,4 ja J -indeksiksi n. 25,6. B-kohtaan Hannan massaksi saadaan 64 kg ja J -indeksiksi n. 25,7. C-kohdan yhtälön ratkaisuna kysytyksi pituudeksi saadaan 1,69 metriä.

The image shows two screenshots of the ClassPad II Manager interface, each displaying a 'Muok Ratkaise' (Edit Solve) window. The left window shows the equation $J = \frac{1.3 \cdot m}{h^{2.5}}$ and the solution $J = 25.6241962332618$ with radio buttons for $m = 102$ and $h = 1.93$. The right window shows the equation $I = \frac{m}{h^2}$ and the solution $I = 27.3832854573277$ with radio buttons for $m = 102$ and $h = 1.93$. Both windows also show 'Alempi = -9E+999' and 'Ylempi = 9E+999' at the bottom.

The image shows three overlapping screenshots of the ClassPad II Manager interface, demonstrating the process of solving an equation for h .

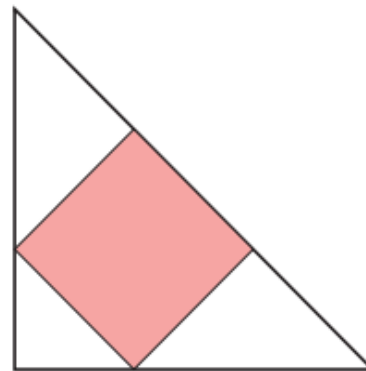
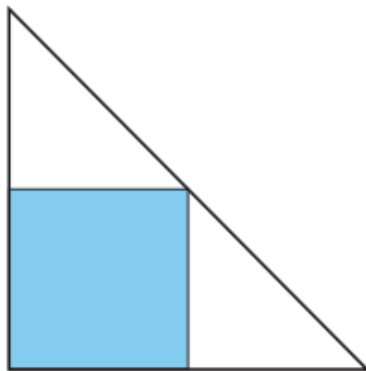
Top-left screenshot: The 'Muok Ratkaise' (Edit Solve) window shows the equation $I = \frac{m}{h^2}$. The variable m is set to 64. The lower and upper bounds are $-9E+999$ and $9E+999$ respectively. The mode is set to 'Rad' and 'Real' with a tolerance of $1E-10$.

Middle screenshot: The 'Muok Ratkaise' window shows the equation $J = \frac{1.3 \cdot m}{h^{2.5}}$. The variable J is set to 25.69350598888681. The mode is set to 'Rad' and 'Real' with a tolerance of $1E-10$.

Bottom-right screenshot: The 'Muok Toiminto Interakt' (Edit Function Interact) window shows the solve command: $\text{solve}\left(\frac{1.3 \cdot m}{h^{2.5}} = \frac{m}{h^2}, h\right)$. The result is $\{h=1.69\}$. The mode is set to 'Alg', 'Desim.', 'Real', and 'Rad'.

Vinkki: Tehtävässä käytetty numeerinen ratkaisin sopii todella hyvin fysiikan ja kemian sovellukseksi, kun ratkaistavana on numeerinen arvo jollekin suurelle.

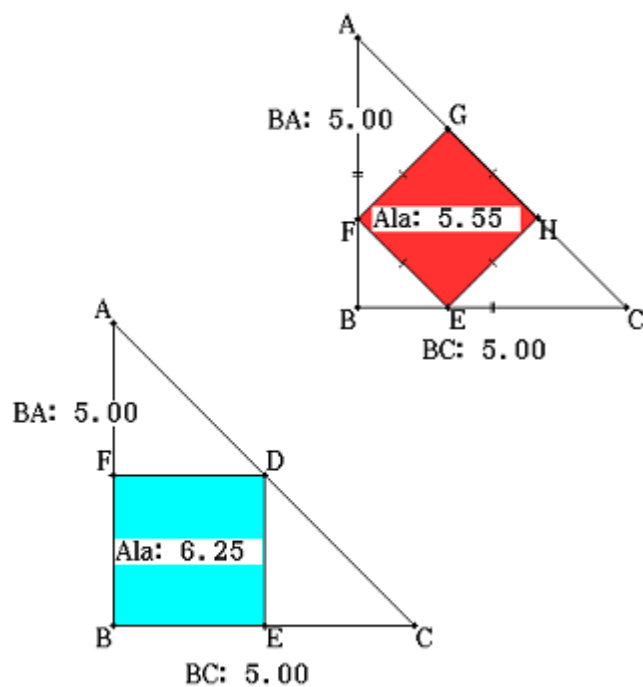
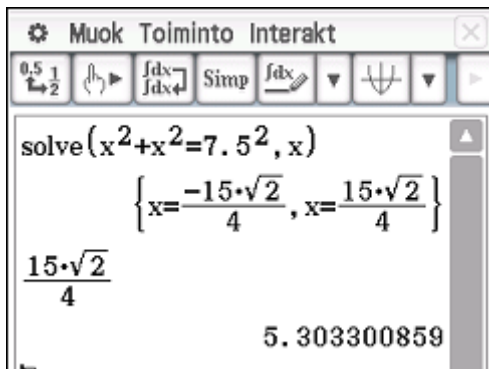
10. Suorakulmaisen kolmion kummankin kateetin pituus on 5. Sen sisään on piirretty neliö kahdella eri tavalla kuvioiden mukaisesti. Kumman neliön pinta-ala on suurempi?



Tehtävän 10 ratkaisu:

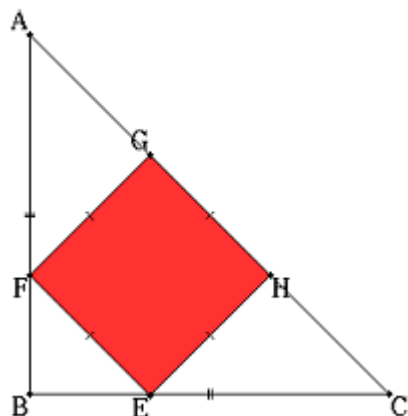
Sininen neliö on tasan puolet kolmion pinta-alasta eli 6,25 pay ja sen sivun pituus on 2,5. Jos punaisen neliön sivu olisi myös 2,5, niin kolmion hypotenuusa olisi kolme kertaa pidempi eli 7,5 ja kolmion sivun pituuden pitäisi olla n. 5,3 (lasku alla).

Siis punaisen neliön sivu ei voi olla yhtä pitkä kuin sinisen neliön sivu ja myös sinisen neliön alan on oltava suurempi. Ohessa vielä geometrisesti pinta-alojen likiarvot ClassPadin Geometria-sovelluksella tehtyinä.



Tehtävän voi ratkaista myös laskemalla punaisen neliön pinta-alan tarkan arvon.

Muistikolmioiden avulla neliön sivun pituudelle $a = FE = EH$ voidaan tehdä kaksi esitystä ja ratkaista niistä sekä sivun pituus että neliön pinta-ala:



Muok Toiminto Interakt

$\text{solve}\left(\frac{5-BE}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\cdot BE, BE\right)$

$\left\{BE=\frac{5}{3}\right\}$

$\left(\sqrt{2}\cdot\frac{5}{3}\right)^2$

$\frac{50}{9}$

$\frac{50}{9}$

5.555555556

11. Taikinasta leivotaan pallonmuotoisia munkkeja, joiden pinta sokeroidaan. Tarvittavan sokerin määrä on suoraan verrannollinen pallon pinta-alaan. Vaihtoehtona on leipoa 24 pientä tai 3 isoa munkkia. Laske sokerin kokonaismäärien suhde näille kahdelle vaihtoehdolle.

Tehtävän 11 ratkaisu:

Pallot ovat keskenään yhdenmuotoiset. Koska taikinasta tulee joko 24 pientä tai 3 isoa munkkia on niiden taikinamäärät eli tilavuudet samat. Yksi iso munkki vastaa siis tilavuudeltaan 8 pientä.

Tilavuuksien suhteen kuutiojuuri on mittakaava ja sen neliönä saadaan pinta-alojen eli sokerimäärien suhde. Siis yhteen isoon munkkiin menee 4-kertainen määrä sokeria yhteen pieneen munkkiin verrattuna.

Sokerin kokonaismäärien suhde saadaan munkkien määrän avulla ja se on 2:1 eli pieniin munkkeihin menee kaikkiaan 2-kertainen määrä sokeria verrattuna isoihin munkkeihin:

Muok Toiminto Interakt

$\left(3\sqrt{\frac{24}{3}}\right)^2$

4

$\frac{24}{3\times 4}$

2

Alg Tarkka Real Rad

12. Yhdistyneet kansakunnat asetti vuosituhannen vaihteessa yhdeksi tavoitteekseen, että maailman hiilidioksidipäästöt olisivat vuonna 2015 merkittävästi pienemmät kuin vuonna 1990. Tavoite ei näytä toteutuvan, sillä vuosina 1990–2008 päästöjen määrä kasvoi 39 %. Oletetaan, että päästöjen vuotuinen kasvuprosentti on ollut aikavälillä 1990–2008 vakio. Kuinka monta prosenttia päästöt kasvavat yhteensä vuosina 1990–2015, jos niiden vuotuinen kasvuprosentti pysyy edelleen samana? Anna vastaus prosenttiyksikön tarkkuudella.

Tehtävän 12 ratkaisu:

Merkitään hiilidioksidipäästöjen määrää vuonna 1990 symbolilla a . 18 vuoden ajalta geometrinen keskiarvo kasvukertoimelle 1,39 korotetaan potenssiin 25, jolloin saadaan kasvukerroin koko kysytylle ajanjaksolle. Muutetaan kasvukerroin prosenteiksi ja pyöristetään vaadittuun tarkkuuteen. Hiilidioksidipäästöt ovat siis kasvaneet n. 58%.

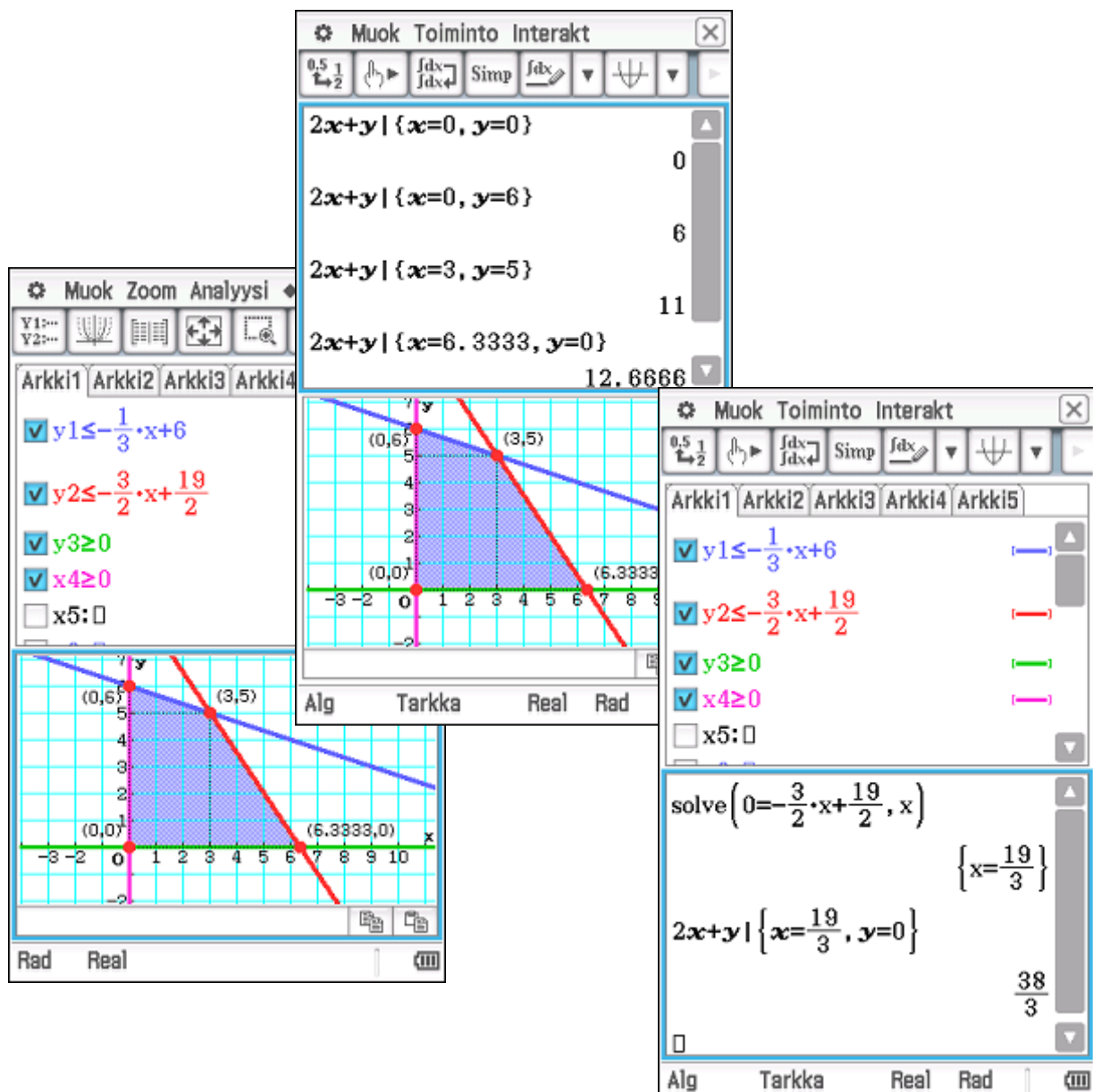
The screenshot shows a Casio ClassPad calculator window titled "Muok Toiminto Interakt". The calculator is in the "Algebra" mode. The input expression is $(18\sqrt{1.39})^{25} \cdot a$. The calculator displays the result as $1.579907523 \cdot a$. Below this, the percentage increase is calculated as $\frac{(ans-a)}{a} \times 100$, resulting in 57.99075228 . The final result is rounded to $58.$. The calculator interface includes a toolbar with various mathematical functions and a mode selector at the bottom.

13. a) Epäyhtälöt $x+3y \leq 18$, $3x+2y \leq 19$, $x \geq 0$ ja $y \geq 0$ määrittelevät nelikulmion N . Piirrä sen kuva xy -koordinaatistossa ja laske kärkien koordinaatit.
- b) Määritä lausekkeen $2x+y$ suurin ja pienin arvo nelikulmiossa N .

Tehtävän 13 ratkaisu:

Ratkaistaan ehdot y :n suhteen ja piirretään niistä kuva. Lasketaan leikkauspisteiden koordinaateiksi $(0, 0)$, $(0, 6)$, $(3, 5)$ ja $(6,3333\dots; 0)$. Sijoitetaan ne vuorollaan optimoitavaan lausekkeeseen.

Koska graafisesta ratkaisusta ei saada tarkkaa arvoa yhdelle pisteistä, niin lasketaan tuo arvo tarkkana arvona erikseen ja sijoitetaan optimoitavaan lausekkeeseen. Pienin arvo on 0 ja suurin arvo on $38/3$.



14. Kristian aikoo vaihtaa autoa ja hakee pankilta 8 000 euron lainaa. Pankki tarjoaa hänelle tasaerälainaa, joka maksetaan takaisin kahdessa vuodessa. Lainan vuotuinen korko on 6,6 % koko takaisinmaksukauden ajan. Muita kuluja ei oteta huomioon.
- Määritä lainan kuukausittaisen tasaerän suuruus.
 - Kuinka paljon lainaa on jäljellä silloin, kun puolet takaisinmaksuajasta on kulunut?
 - Kuinka paljon korkoa Kristian maksaa yhteensä koko kahden vuoden laina-aikana?

Tehtävän 14 ratkaisu:

Talousovelluksessa annuiteetiksi saadaan 356,73 euroa ja soveltamalla esim. MAOLin taulukkirjasta löytyvää jäljellä olevan lainamäärän kaavaa saadaan laskettua b-kohdan vastaukseksi 4131,61 euroa.

Korkoja tulee maksettavaksi annuiteettien kokonaissumman ja lainamäärän erotuksen verran eli 561,52 euroa.

The image shows three screenshots from the ClassPad II Manager software interface:

- Top Left:** A window titled "Muok Laskenta(1) Laskenta(2)" showing input fields for a financial calculation. The "Koronkorko" (Interest Rate) section is active, with values: N=24, I%=6.6, PV=8000, PMT=-356.7316965, FV=0, P/Y=12, C/Y=12.
- Top Right:** A window titled "Muok Laskenta(1) Laskenta(2)" showing the "Kuoletus" (Payment) section. Values: PM1=1, PM2=12, I%=6.6, PV=8000, PMT=-356.7316965, P/Y=12, C/Y=12, BAL=4131.590823.
- Bottom:** A window titled "Muok Toiminto Interakt" showing a mathematical formula for calculating the remaining balance (BAL) and the total interest paid. The formula is:

$$8000 \times \left(1 + \frac{0.066}{12}\right)^{12} - 356.73 \times \frac{1 - \left(1 + \frac{0.066}{12}\right)^{12}}{1 - \left(1 + \frac{0.066}{12}\right)}$$
 The result of this calculation is 4131.61. Below it, the calculation for total interest is shown:

$$24 \times 356.73 - 8000$$
 The result is 561.52.

15. Jonna ampuu uudenvuodenraketin katolta koordinaatiston pisteestä $(20,10,5)$ vektorin $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ suuntaan. Raketti lentää suoraviivaisesti 105 metriä, kunnes se räjähtää. Koordinaatiston yksikkönä on metri.
- a) Missä pisteessä raketti räjähtää?
- b) Kuinka kaukana koordinaatiston origossa seisovista katsojista räjähdyspiste on?

Tehtävän 15 ratkaisu:

Lasketaan yksikkövektorin avulla raketin räjähdyspaikaksi $(50, -35, 95)$. Etäisyys katsojista saadaan räjähdyspisteen paikkavektorin pituutena ja se on n. 113 metriä.

The screenshot shows the following steps in the calculator's algebra mode:

- Input: $\text{unitV}([2 \ -3 \ 6]) \Rightarrow v_0$
- Result: $\left[\frac{2}{7} \ -\frac{3}{7} \ \frac{6}{7} \right]$
- Input: $[20 \ 10 \ 5] + 105v_0$
- Result: $[50 \ -35 \ 95]$
- Input: $\text{norm}(\text{ans})$
- Result: $5 \cdot \sqrt{510}$
- Input: $5 \cdot \sqrt{510}$
- Result: 112.9158979

The calculator interface includes a menu bar with 'Muok', 'Toiminto', and 'Interakt', and a bottom status bar with 'Alg', 'Desim.', 'Real', 'Rad', and a calculator icon.