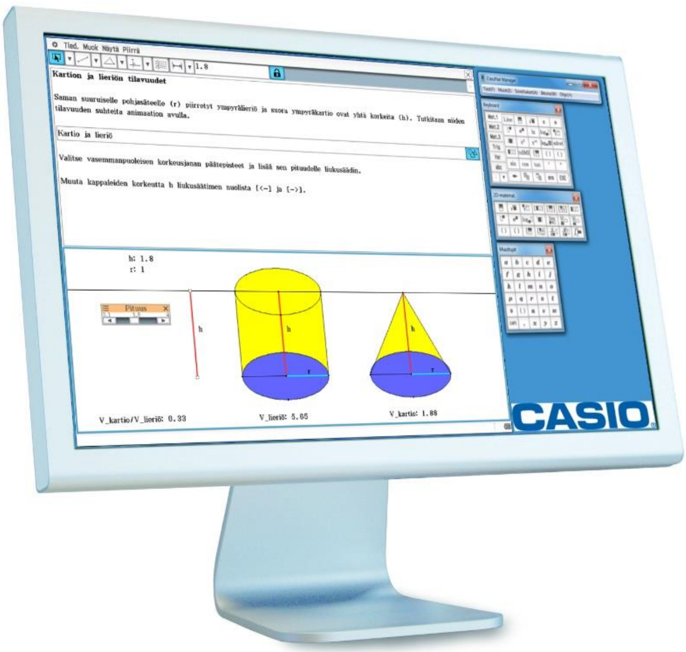
Laske Laudatur ClassPadilla



Pitkä matematiikka, syksy 2019

Tiivistelmä

Syksyn 2019 sähköisten yo-kokeiden ratkaisut ClassPad Managerilla laskettuina. Laskujen tiedostot ovat ladattavissa Casion tukisivuilta osoitteesta https://www.casio-laskimet.fi

Pepe Palovaara

pepe.palovaara@casio.fi

Hyvä lukija,

Kädessäsi on järjestyksessään toinen sähköinen matematiikan yo-koe. Kokeen rakenne oli entisellään ja jokaisen tehtävän maksimipistemäärä oli 12. Aiempaan tapaan A-osassa opiskelijoiden käytössä oli vain kaavaeditori ja B-osassa lisäksi laskinohjelmat. Tehtävissä oli hyödynnetty myös tehtäviä havainnollistavia aineistoja.

Tämä vihkonen on ladattavissa pdf-muodossa ja kaikki tehtävien ratkaisut ovat saatavilla myös ClassPadin tiedostoina (.xcp) Casion kotisivuilta. ClassPadin tiedostot aukeavat suoraan eActivity -sovellukseen kaksoisklikkaamalla. Tiedostoja voidaan hyödyntää myös esim. Abitti-kokeissa, tehtävien palautuksessa sähköiseen oppimisympäristöön tai jaettuun resurssiin (pilvipalveluun). Tukesi löytyy osoitteesta

http://www.casio-laskimet.fi

Casio Academy – videot soittolistalla

Casio tukee opiskelijoita matkalla ylioppilaiksi Casio Academy toiminnalla. Nyt päivitetystä YouTuben soittolistasta löytyy jo yli 30 yo-tehtävän ja esimerkin malliratkaisut reaaliajassa ratkaistuina videoina. Linkki soittolistaan on

https://bit.ly/casio-academy

ClassPad-perhe

Abitti-kokeen B-osan tehtävissä oli tätä koetta ratkoessa käytössä ClassPad Manager, jolla tämän vihkon ratkaisutkin on laadittu. Casion uusi selainpohjainen CAS-ohjelma ClassPad.net sopii jo hyvin sähköisten kokeiden ratkaisemiseen, matematiikan opettamisen välineeksi ja - ennen kaikkea - matematiikan hahmottamiseen ja oppimiseen. Tutustu uutuuteen osoitteessa

https://classpad.net/

Mukavia hetkiä sähköisten yo-kokeiden ratkaisujen parissa!

Espoossa 24.9.2019

Pepe Palovaara

Nordic School Coordinator
Casio Scandinavia

A-osa

Ratkaise kaikki tämän osan tehtävät 1–4.

---

1. Kolmio (12 p.)

Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 350 ja $1\ 200$. Kirjoita kohdissa 1.1.–1.3. pelkät vastausten lukuarvot annettuihin vastauskenttiin. Älä perustele tämän tehtävän vastauksia. Tässä tehtävässä ei voi käyttää kaavaeditoria. Kunkin vastauksen maksimipituus on 10 merkkiä.

1.1. Kolmion pinta-ala on ________________. (4 p.)

1.2. Kolmion hypotenuusan pituus on ________________. (4 p.)

1.3. Kolmion hypotenuusaa vasten piirretyn korkeusjanan pituus on ________________. (4 p.)

1. Kolmio

1.1. Kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2}*350*1200=210000$ pinta-alayksikköä.

1.2. Hypotenuusan pituus on $\sqrt{350^2+1200^2}=1250$ pituusyksikköä.

1.3. Hypotenuusalle piirretty korkeusjana jakaa suorakulmaisen kolmion yhdenmuotoisiin kolmioihin. Verrannon avulla saadaan $\frac{h}{350}=\frac{1200}{1250}$, josta korkeusjana h=336 pituusyksikköä.

2. Derivaatta ja integraali (12 p.)

Määritä seuraavien funktioiden derivaattafunktiot tai integraalifunktiot ja kirjoita pelkät vastaukset annettuihin vastauskenttiin. Älä perustele tämän tehtävän vastauksia.

2.1. Kun $f(x) = 4x + 3$, niin $f'(x) =$ ________________. (3 p.)

2.2. Kun $f(x) = x^3 + x^2$, niin $\int f(x)\,dx =$ ________________ $+ C$. (3 p.)

2.3. Kun $f(x) = (2x-1)^7$, niin $f'(x) =$ ________________. (3 p.)

2.4. Kun $f(x) = 12\sin(3x)$, niin $\int f(x)\,dx =$ ________________ $+ C$. (3 p.)

2. Derivaatta ja integraali

2.1. Polynomifunktion derivointisäännöllä vastaus on 4.

2.2. Polynomifunktion integrointisäännöllä vastaus on $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+C$.

2.3. Yhdistetyn funktion derivointisäännöllä vastaus on $7(2x-1)^6*2=14(2x-1)^6$.

2.4. Yhdistetyn funktion integrointisäännöllä muokataan sisäfunktion 3x derivaatta 3 kertoimeksi funktion eteen. Koska kertoimena on jo 12=4*3, niin kerroin 4 jää integraalifunktion kertoimeksi. Vastaus on $-4\cos(3x)+C$.

3. Pistetulo (12 p.)

Määritä kaikki tason vektorit $\overline{u}$, jotka toteuttavat ehdot

$$\left(\tfrac{3}{5}\,\overline{i}+\tfrac{4}{5}\,\overline{j}\right)\cdot\overline{u}=3 \quad \text{ja} \quad \overline{u}\cdot\overline{u}=25.$$

3. Pistetulo

Merkitään vektoria u=ai+bj, missä i ja j ovat x- ja y-akselin suuntaiset yksikkövektorit ja a ja b reaalilukukertoimet. Pistetulot laskemalla saadaan yhtälöpari $\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{5}a+\frac{4}{5}b=3\\ a^2+b^2=25\end{array}\right|_{a,\,b}$. Ylemmästä yhtälöstä saadaan $3a+4b=15 \Leftrightarrow a=5-\frac{4}{3}b$. Sijoitetaan tämä alempaan yhtälöön: $\left(5-\frac{4}{3}b\right)^2+b^2=25 \Leftrightarrow 25-\frac{40}{3}b+\frac{16}{9}b^2+b^2-25=0 \Leftrightarrow$ $b\left(\frac{25}{9}b-\frac{40}{3}\right)=0 \Leftrightarrow b=0$ tai $\frac{25}{9}b-\frac{40}{3}=0 \Leftrightarrow b=0$ tai $25b=120 \Leftrightarrow b=0$ tai $b=\frac{24}{5}$.

Sijoitetaan saadut b:n arvot yhtälöön $a=5-\frac{4}{3}b$, jolloin vastaavat a:n arvot ovat a=5 tai $a=5-\frac{4}{3}*\frac{24}{5}=\frac{75-96}{15}=-\frac{21}{15}=-\frac{7}{5}$.

Vektori u=5i tai $u=-\frac{7}{5}i+\frac{24}{5}j$.

4. Eksponentti- ja trigonometriset funktiot (12 p.)

Määritellään $f(x) = e^{\sin x}$, kun $x \in \mathbf{R}$.

4.1. Määritä funktion $f(x)$ suurin ja pienin arvo. (6 p.)

4.2. Osoita, että

$$f(x) \geq e^{1-\cos x}$$

kaikilla $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. (6 p.)

4. Eksponentti- ja trigonometriset funktiot

4.1. Koska $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ ja $x \in \mathrm{R}$, niin $\sin(x)$ saa kaikki arvot väliltä $[-1,1]$. Eksponenttifunktio on aidosti kasvava, joten se saa kaikki arvot väliltä $e^{-1} \leq f(x) \leq e^{1}$. Pienin arvo on siis e^{-1} ja suurin e.

4.2. $e^{\sin(x)} \geq e^{1-\cos(x)} \Leftrightarrow \sin(x) \geq 1-\cos(x)$ koska aidosti kasvava funktio säilyttää suuruusjärjestyksen $\Leftrightarrow \sin(x)+\cos(x) \geq 1$. Tarkasteluvälillä $[0, \frac{\pi}{2}]$ pätee $\sin(x) \geq (\sin(x))^2$ ja $\cos(x) \geq (\cos(x))^2$, joten $\sin(x)+\cos(x) \geq (\sin(x))^2+(\cos(x))^2=1$. mot.

Harjoittele tuleviin kokeisiin Casio Academy -videoiden avulla. Linkki soittolistaan on https://bit.ly/casio-academy

B1-osa

Ratkaise kolme tehtävistä 5–9. Tässä osassa saat käyttää kaikkia koejärjestelmän ohjelmia ja omaa laskintasi, kun olet palauttanut A-osan vastaukset.

5. Polynomiepäyhtälö (12 p.)

Ratkaise epäyhtälö $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 \geq 0$. Voit käyttää esimerkiksi laskinohjelmistoa. Selitä sanallisesti (enintään $1\ 000$ merkillä), miten polynomifunktion tulomuotoa $p(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ voidaan käyttää epäyhtälön $p(x) \geq 0$ ratkaisemiseen, kun $a < b < c$.

5. Polynomiepäyhtälö

Laskimella

solve$(x^3-2x^2-11x+12=0, x)$

$\{x=-3, x=1, x=4\}$

Polynomi voidaan jakaa tekijöihin nollakohtiensa avulla. Korkeimman asteen termin kerroin tulee tulomuodon kertoimeksi ja jokainen tulontekijä on muotoa $(x-x_i)$, missä x_i on polynomin nollakohta.

Esim. tehtävän polynomin tulomuoto on $1\cdot(x+3)(x-1)(x-4)$. Tulomuodon tekijöistä voidaan muodostaa merkkikaavio. Nyt kaikki tekijät ovat ensimmäistä astetta ja niiden kuvaajat ovat nousevia suoria. Tekijöiden merkit vaihtuvat vain nollakohdissa:

tekijä	merkki	−3	merkki	1	merkki	4	merkki
$x+3$	−	|	+	|	+	|	+
$x-1$	−	|	−	|	+	|	+
$x-4$	−	|	−	|	−	|	+
tulo	−	|	+	|	−	|	+

Tulon avulla epäyhtälön $p(x)\geq 0$ on tosi niillä lukuväleillä, joissa tekijöiden tulo on positiivinen tai nolla eli kun $-3\leq x\leq 1$ tai $x\geq 4$. Sovellettuna yleiseen tapaukseen $p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\geq 0$, missä $a<b<c$, vastaukseksi saadaan $a\leq x\leq b$ tai $x\geq c$.

CASIO

6. Kaksi paraabelia (12 p.)

Anna esimerkki kahdesta paraabelista, joilla on täsmälleen yksi sivuamispiste; sivuamispiste ei saa olla kummankaan paraabelin huippupiste. Anna paraabelit muodossa $y = ax^2 + bx + c$.

6. Kaksi paraabelia

Valitaan ensimmäiseksi paraabeliksi $y=x^2$ ja lasketaan sille kohtaan $x=1$ piirretyn tangentin yhtälö (paraabelin huippu on origossa).

Koska $y'=2x$, niin tangentin kulmakerroin kohdassa $x=1$ on $2*1=2$, Kun $x=1$, niin $y=1^2=1$ ja tangentin yhtälö on $y-1=2(x-1)$.

Koska paraabelit sivuavat toisiaan tangenttipisteessä (1, 1), tämä tangentti on myös toisen paraabelin tangentti kohdassa $x=1$. Tästä saadaan ehdot $y'(1)=2$ ja piste (1, 1) on paraabelin piste.

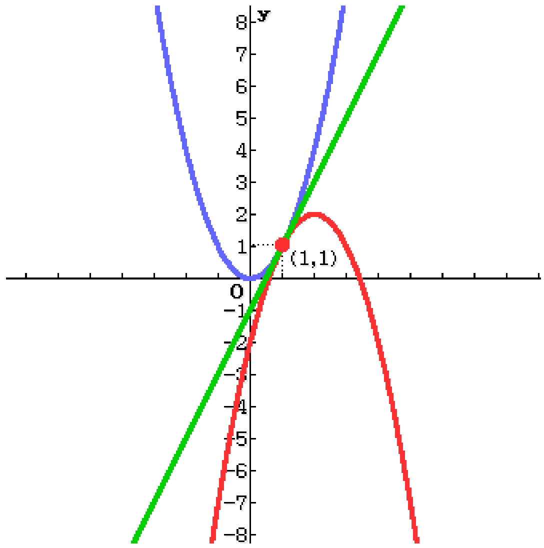
Sovelletaan ehtoja paraabelin yleiseen muotoon $y=ax^2+bx+c$, muodostetaan ehdoista yhtälöpari ja ratkaistaan se:

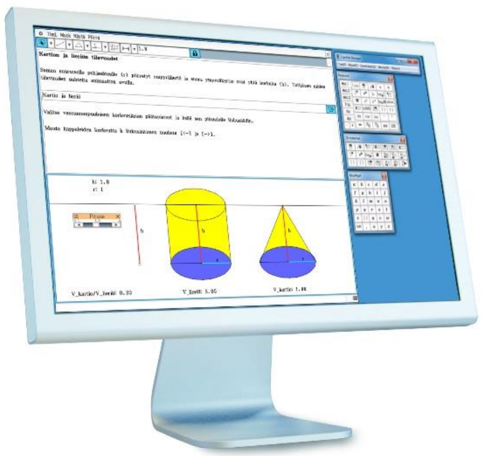
$$\left.\begin{cases} 2a*(1)+b=2 \\ 1=a*(1)^2+b*(1)+c \end{cases}\right|_{a,\,b,\,c}$$

$$\{a=a,\ b=-2\cdot a+2,\ c=a-1\}$$

Valitaan $a=-1$, jolloin paraabeli aukeaa alaspäin. Tällöin $b=-2*(-1)+2=4$ ja $c=-1-1=-2$. Toisen paraabelin huipun x–koordinaatti on derivaatan nollakohdassa: $y'=-2x+4=0 \Leftrightarrow x=2$ eli tangentti ei kulje huipun kautta.

Paraabelien yhtälöt ovat $y=x^2$ ja $y=-x^2+4x-2$.





7. Satunnaispolynomit (12 p.)

Toisen asteen polynomissa $x^2 - nx + n$ esiintyvä luku n arvotaan heittämällä tavallista 6-sivuista noppaa ja polynomissa $x^2 - mx + m$ esiintyvä luku m arvotaan heittämällä 8-sivuista noppaa, jonka silmäluvut ovat $1, 2, \ldots, 8$. Kuinka suurella todennäköisyydellä ainakin toisella polynomilla on kaksinkertainen nollakohta?

7. Satunnaispolynomit

2. asteen polynomilla on kaksinkertainen nollakohta, silloin kun polynomi on binomin neliö. Tällöin diskriminantin on oltava nolla. Tutkitaan, millä lukujen n ja m arvoilla diskriminantit saavat arvon nolla:

$(-n)^2-4*1*n|n=1$

$$-3$$

$(-n)^2-4*1*n|n=2$

$$-4$$

$(-n)^2-4*1*n|n=3$

$$-3$$

$(-n)^2-4*1*n|n=4$

$$0$$

$(-n)^2-4*1*n|n=5$

$$5$$

$(-n)^2-4*1*n|n=6$

$$12$$

8−sivuisen nopan osalta tulee kaksi tutkittavaa vaihtoehtoa lisää:

$(-m)^2-4*1*m|m=7$

$$21$$

$(-m)^2-4*1*m|m=8$

$$32$$

P("ainakin toisella polynomilla on kaksinkertainen nollakohta")
=1−P("kummallakaan polynomilla ei ole kaksinkertaista nollakohtaa")
$=1-\frac{5}{6}*\frac{7}{8}=\frac{13}{48}.$

Tukimateriaalit ja tuotetiedot löytyvät palvelevilta kotisivuiltamme

https://www.casio-laskimet.fi

8. Suuria lukuja (12 p.)

Mitkä luvuista

$$111\,111\,111, \quad 222\,222\,222 \quad \text{ja} \quad 333\,333\,333$$

ovat jaollisia yhdeksällä?

Onko luku

$$111\,111\,111^{111\,111\,111} + 222\,222\,222^{222\,222\,222} + 333\,333\,333^{333\,333\,333}$$

jaollinen yhdeksällä? Perustele vastauksesi.

T8. Suuria lukuja

Luku on yhdeksällä jaollinen, jos sen numeroiden summa on yhdeksällä jaollinen.

1+1+1+1+1+1+1+1+1=9 on jaollinen yhdeksällä.
2+2+2+2+2+2+2+2+2=18 on 2*9 eli jaollinen yhdeksällä.
3+3+3+3+3+3+3+3+3=27 on 3*9 eli jaollinen yhdeksällä.

Saman voi todeta laskemalla jakojäännökset modulo 9:

mod(111111111,9)

0

mod(222222222,9)

0

mod(333333333,9)

0

Jos luku on yhdeksällä jaollinen, myös sen positiiviset potenssit ovat jaollisia yhdeksällä. Niinpä 111111111^k on jaollinen yhdeksällä kaikille positiivisille kokonaisluvuille, etenkin luvulle k=111111111. Samoin 222222222^k ja 333333333^k ovat jaollisia luvulla yhdeksän.

Kolmen yhdeksällä jaollisen luvun summa on yhdeksällä jaollinen, joten ksysytty luku $111111111^{111111111}+222222222^{222222222}+333333333^{333333333}$ on yhdeksällä jaollinen.

9. Käänteisfunktio (12 p.)

Tarkastellaan funktiota $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

9.1. Osoita, että funktio f on aidosti kasvava, ja määritä sen arvojoukko tarkastelemalla raja-arvoja

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \text{ ja } \lim_{x\to\infty} f(x).$$

(6 p.)

9.2. Muodosta funktion f käänteisfunktion f^{-1} lauseke. (6 p.)

9. Käänteisfunktio.

9.1. $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x}, x\geq 0\\ \dfrac{x}{1-x}, x<0\end{cases}$. Funktio on kaikkialla määritelty, sillä nimittäjällä ei ole nollakohtia. Lasketaan toispuoleiset derivaatat osafunktioista:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x}\right)|x\geq 0$$

$$\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right)|x<0$$

$$\frac{1}{(x-1)^2}$$

Kun $x\geq 0$: $(x+1)^2>0$, joten $\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$ ja ensimmäinen osafunktio on aidosti kasvava.

Kun $x<0$: $(x-1)^2>0$, niin $\dfrac{1}{(x-1)^2}>0$ ja toinen osafunktio on aidosti kasvava.

Pisteessä $x=0$ funktion lausekkeiden raja-arvot ovat

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

$$0$$

$$\lim_{x\to 0-}\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

$$0$$

Lisäksi $f(0)=0$, joten funktio on jatkuva origossa. Täten koko funktio $f(x)$ on aidosti kasvava koko reaalilukujen joukossa.

Lasketaan raja-arvot, kun pienenee ja kasvaa rajatta:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{1+|x|}\right)$$

$$-1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+|x|}\right)$$

$$1$$

Funktion arvojoukko on siis $y\in]-1,1[$. Tämä arvojoukko on käänteisfunktion määrittelyjoukko.

9.2. Funktion käänteisfunktion lauseke saadaan ratkaisemalla funktion lausekkeesta muuttuja x ja tekemällä muuttujanvaihto:

$$\text{solve}\left(y=\frac{x}{1+x},x\right)\mid x\geq 0$$

$$\left\{x=\frac{-y}{y-1}\right\}$$

$$\text{solve}\left(y=\frac{x}{1-x},x\right)\mid x<0$$

$$\left\{x=\frac{y}{y+1}\right\}$$

Siis käänteisfunktio on $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{x-1}, & x\geq 0\\ \dfrac{x}{x+1}, & x<0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x}{1-x}, & x\geq 0\\ \dfrac{x}{1+x}, & x<0\end{cases}=\dfrac{x}{1-|x|}$, missä $x\in$ $]-1,1[$.

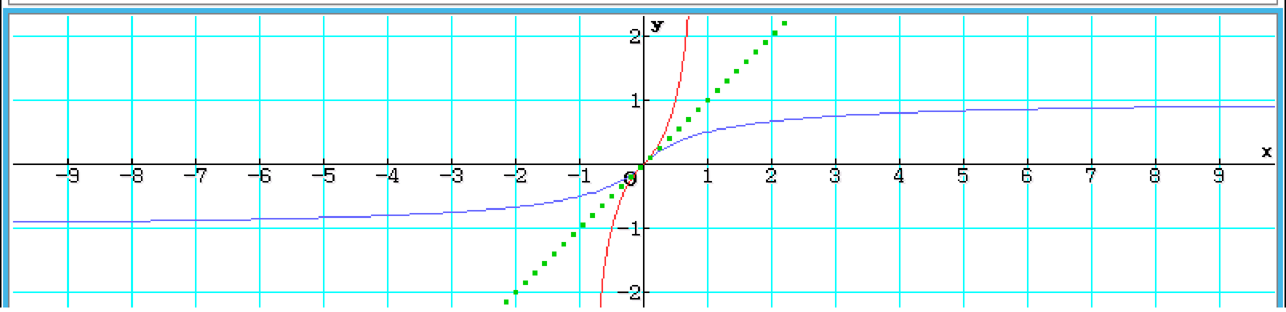
$y1=\dfrac{x}{1+|x|}$

$y2=\dfrac{x}{1-|x|}\mid -1<x<1$

$y3=x$

y4:

y5:



B2-osa

Ratkaise kolme tehtävistä 10–13. Tässä osassa saat käyttää kaikkia koejärjestelmän ohjelmia ja omaa laskintasi, kun olet palauttanut A-osan vastaukset.

---

10. Pomppiva pallo (12 p.)

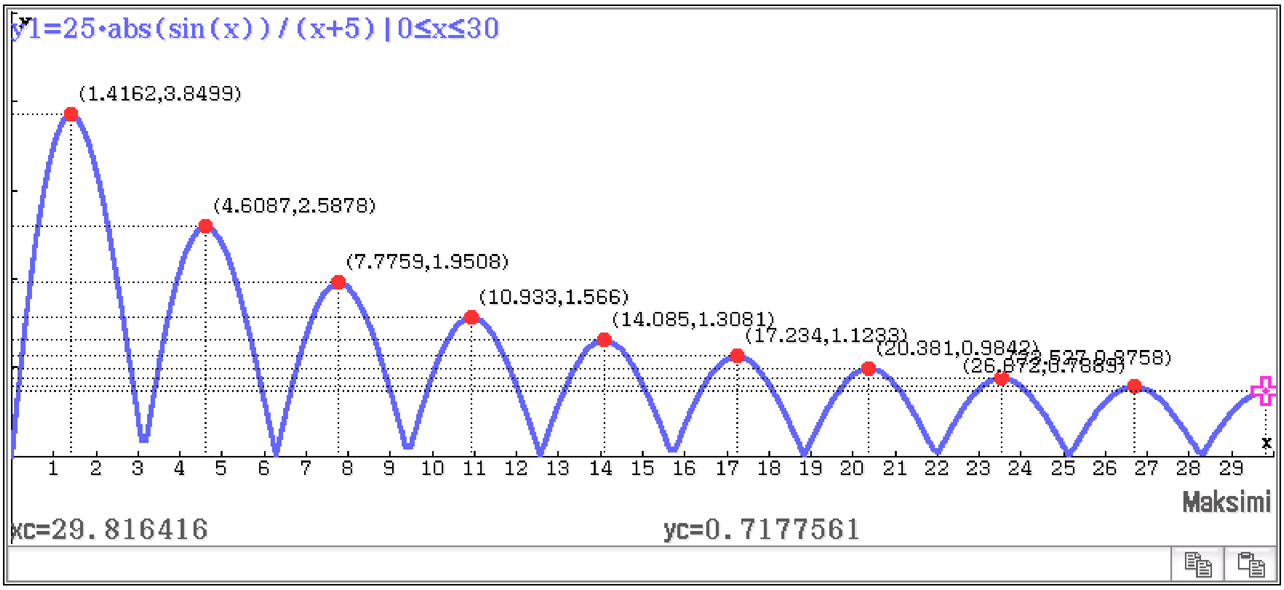
Pomppivan pallon korkeutta lattiasta kuvaa tietokonepelissä funktio

$$h(x) = \frac{25\,|\sin(x)|}{x+5}, \quad x \geq 0,$$

kun x on pallon vaakasuoraan kulkema matka ja $h(x)$ on pallon korkeus metreinä. Kuinka moni pomppu on yli metrin korkuinen?

10. Pomppiva pallo

Koska $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, niin $0 \leq |\sin(x)| \leq 1$. Osoittajan suurin arvo on täten 25. Lauseke ei voi saada arvoa 1 suurempaa arvoa, kun nimittäjä on suurempi kuin 25 eli $x+5>25$, josta saadaan $x>20$. Koska $\frac{20-0}{\pi}=6.366...$ niin välille $0 \leq x \leq 20$ sopii 6 sinifunktion paikallista maksimikohtaa. Siis 6 pomppua on yli metrin korkuisia.



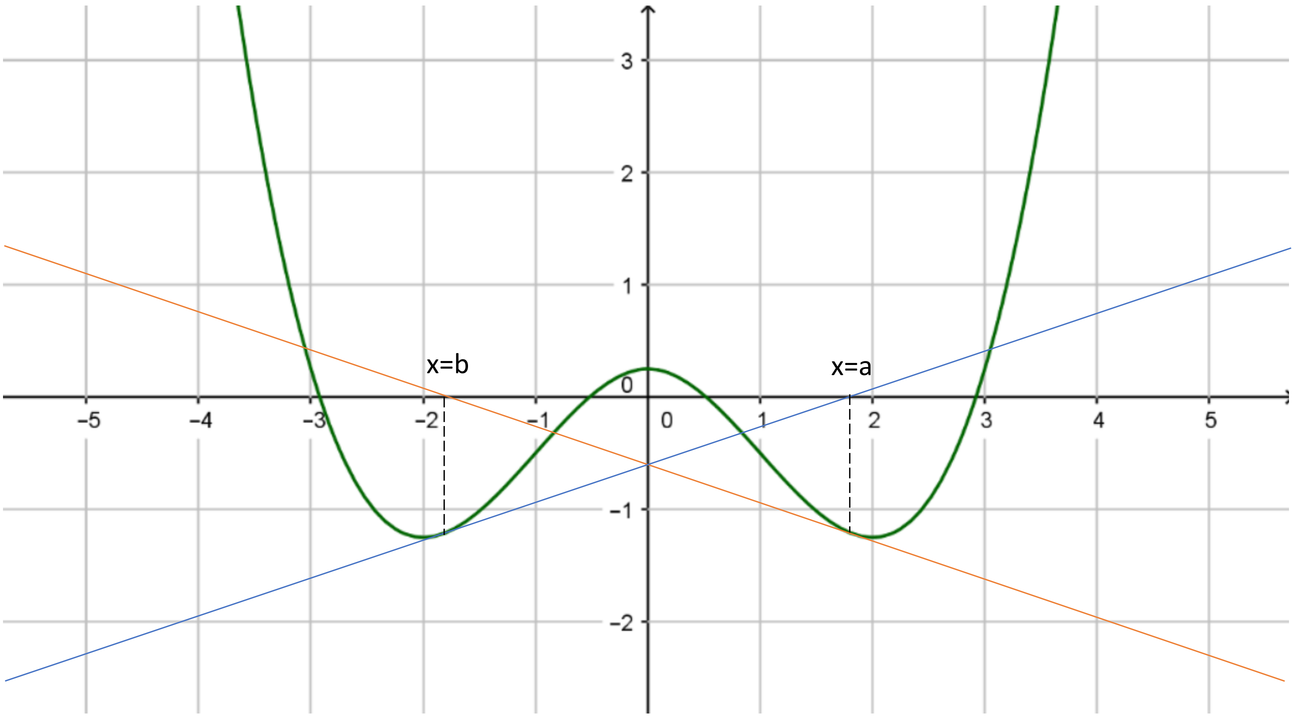
CASIO

11. Newtonin menetelmä (12 p.)

Aineisto:
11.A Kuva: Funktion kuvaaja

Toisinaan Newtonin menetelmä ei suppene kohti haluttua nollakohtaa, vaan juuttuu kahden eri pisteen välille: on olemassa sellaiset pisteet a ja b, että $a \neq b$, $x_{2n-1} = a$ ja $x_{2n} = b$ kaikille $n \geq 1$.

Esitä tilanne graafisesti funktion 11.A kuvaajan tapauksessa ja määritä pisteiden a ja b likiarvot. Voit tehdä piirto-ohjelmalla merkintöjä kuvaan 11.A ja liittää sen vastaukseesi. Selitä sanallisesti, missä tilanteessa edellä mainittu ilmiö esiintyy.



T11. Newtonin menetelmä

Jumiutuminen kahden pisteen välille johtuu siitä, että kohtaan x=a piirretty tangentti leikkaa x−akselin kohdassa x=b ja käyrän kohtaan x=b piirretty tangentti leikkaa x−akselin kohdassa x=a.

Kuvassa tällaiset pisteet ovat n. x=±1.8.

12. Summan arviointi (12 p.)

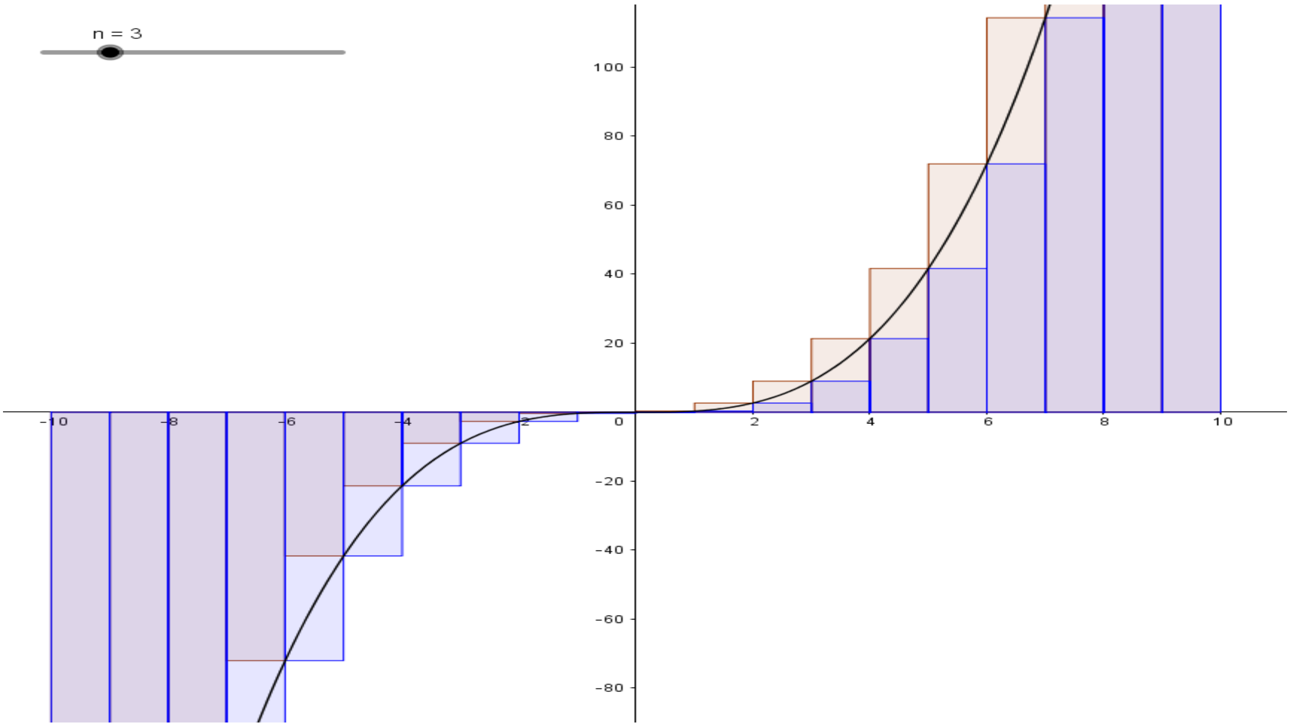
Aineisto:
12.A Tiedosto: Pylväät

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Osoita, että

$$\frac{127}{7}(n-1)^7 \leq \sum_{k=n}^{2n-1} k^6 \leq \frac{127}{7}n^7.$$

Voit käyttää aineistoa 12.A tehtävän tilanteen hahmottamiseksi, mutta tämä ei ole välttämätöntä ratkaisun kannalta. Muista myös, että pelkät kokeilut eivät riitä matemaattisen väitteen perusteluksi.

Ohessa aineisto arvolla n=3:



T12. Summan arviointi

Kyseessä on käyrän $y=x^6$ ja x–akselin rajoittaman alueen approksimaatio ala– ja yläsummien avulla. Merkitään $f(x)=x^6$. Kaikilla yhden mittaisilla osaväleillä $[k-1,k]$ funktion $f(x)$ arvot ovat välin minimin $f(k-1)$ ja maksimin $f(k)$ rajoittamassa lukuvälissä, koska $f(x)$ on aidosti kasvava funktio positiivisille luvuille x.

Siis $(k-1)^6 \le f(x) \le k^6$. Integroidaan kaksoisepäyhtälö osavälillä $[k-1,k]$:

$$\int_{k-1}^{k}(k-1)^6dx \le \int_{k-1}^{k}f(x)dx \le \int_{k-1}^{k}k^6dx$$

$$(k-1)^6*k-(k-1)^6*(k-1) \le \int_{k-1}^{k}f(x)dx \le k^6*k-k^6*(k-1)$$

$$(k-1)^6*(k-(k-1)) \le \int_{k-1}^{k}f(x)dx \le k^6*(k-(k-1))$$

$(k-1)^6 \le \int_{k-1}^{k}f(x)dx \le k^6$ Merkitään tätä kaksoisepäyhtälöä **(i)**.

Lasketaan alasummat ensimmäiseen epäyhtälöön ja sovelletaan ylläolevaa tulosta **(i)** arvioitaessa lauseketta ylöspäin:

$\sum_{k=n+1}^{2n}\left((k-1)^6\right) \le \sum_{k=n+1}^{2n}\left(\int_{k-1}^{k}f(x)dx\right)$ (lasketaan kaikki yhden mittaisten osavälien muodostamat alasummat yhteen) $= \int_{n+1-1}^{2n}f(x)dx = \int_{n}^{2n}x^6dx = \frac{1}{7}\left((2n)^7-n^7\right) = \frac{127}{7}n^7$.

Lasketaan vastaavasti yläsummat toiseen epäyhtälöön ja arvioidaan sitä alaspäin tuloksen **(i)** mukaan:

$\sum_{k=n}^{2n-1}\left(k^6\right) \ge \sum_{k=n}^{2n-1}\left(\int_{k-1}^{k}f(x)dx\right)$ (lasketaan kaikki yhden mittaisten osavälien muodostamat yläsummat yhteen) $= \int_{n-1}^{2n-1}x^6dx = \frac{1}{7}\left((2n-1)^7-(n-1)^7\right) >$

$\frac{1}{7}\left((2n-2)^7-(n-1)^7\right) = \frac{1}{7}\left(2^7(n-1)^7-(n-1)^7\right) = \frac{127}{7}(n-1)^7$.

Siis, $\frac{127}{7}(n-1)^7 \le \sum_{k=n}^{2n-1}\left(k^6\right)$ ja $\sum_{k=n+1}^{2n}\left((k-1)^6\right) \le \frac{127}{7}n^7$.

Koska $\sum_{k=n+1}^{2n}\left((k-1)^6\right) = \sum_{k=n}^{2n-1}\left(k^6\right)$, niin $\frac{127}{7}(n-1)^7 \le \sum_{k=n}^{2n-1}\left(k^6\right) \le \frac{127}{7}n^7$.

13. Joukon alkioiden summa (12 p.)

Tarkastellaan joukkoja

$$A_1 = \{0\},\ A_2 = \{1,2\},\ A_3 = \{3,4,5\},\ A_4 = \{6,7,8,9\},\ \ldots$$

Joukossa A_k on siis k alkiota, jotka ovat peräkkäisiä kokonaislukuja ja joista pienin on yhtä suurempi kuin joukon A_{k-1} suurin alkio. Joukon alkioiden summa tarkoittaa sitä, että joukkoon kuuluvat luvut lasketaan yhteen. Esimerkiksi joukon A_3 alkioiden summa on $3+4+5=12$.

Määritä joukon A_6 alkioiden summa sekä joukon A_{2019} alkioiden summa. Muodosta yleinen polynomifunktio $P(k)$, joka antaa joukon A_k alkioiden summan kaikilla $k = 1, 2, 3, \ldots$

T13. Joukon alkioiden summa

Joukko $A_5=\{10,11,12,13,14\}$ ja $A_6=\{15,16,17,18,19,20\}$, joten joukon A6 alkioiden summa on 15+16+17+18+19+20=105.

Joukon A_n ensimmäinen alkio on kokonaisluku 1+2+3+...+n−1. Esim. joukon A_6 ensimmäinen luku on 1+2+3+4+5=15. Lasketaan 2018 ensimmäisen kokonaisluvun summa aritmeettisen lukujonon summana:

$$\sum_{k=1}^{2018}(k)=2037171$$

Joukko $A_{2019}=\{2037171, 2037171+1, \ldots, 2037171+2018\}$ ja sen alkioiden summa on

$$\sum_{k=2037171}^{2037171+2018}(k)=4115085420.$$

Funktio $P(k)=\sum_{n=a}^{a+k-1}(n)$, missä $a=\sum_{m=1}^{k-1}(m)$ antaa joukon A_k alkioiden summan.

Muutetaan tämä polynomiksi:

$\sum_{m=1}^{k-1}(m)=\frac{k^2-k}{2}$. Sijoitetaan tämä summalausekkeeseen:

$\sum_{n=\frac{k^2-k}{2}}^{\frac{k^2-k}{2}+k-1}(n)=\frac{k^3-k}{2}$. Polynomi on $P(k)=\frac{k^3-k}{2}$.