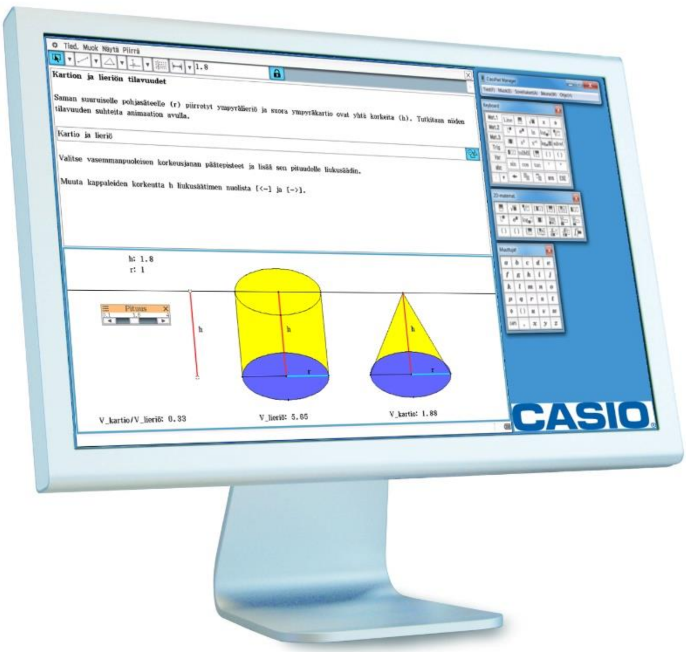
Laske Laudatur
ClassPad Managerin avulla
Pitkä matematiikka, kevät 2022



CASIO®

Tiivistelmä

Kevään 2022 sähköisten yo-kokeiden ratkaisut työasemalle ladattavalla ClassPad Managerilla laskettuina.

Pepe Palovaara

pepe.palovaara@fintegrity.fi

FI – Matematiikka, pitkä oppimäärä

23.3.2022

Koe koostuu 13 tehtävästä, joista vastataan kymmeneen. Tehtävät on jaettu kolmeen osaan. A-osassa on neljä kaikille pakollista tehtävää. B1-osassa on viisi tehtävää, joista vastataan kolmeen. B2-osassa on neljä tehtävää, joista vastataan kolmeen. Kaikki tehtävät arvostellaan pistein 0–12, joten kokeen maksimipistemäärä on 120.

A-osassa saat käyttää koejärjestelmässä olevaa taulukkokirjaa ja perusohjelmia. A-osa palautetaan tehtävän 4 jälkeen olevalla painikkeella. Tämän jälkeen A-osan vastauksia ei voi enää muokata. A-osan palauttamisen jälkeen kaikki koejärjestelmän ohjelmat ovat käytettävissäsi. Voit vastata B-osien tehtäviin myös ennen A-osan palauttamista.

Useimmissa tehtävissä kaikkien osatehtävien vastaukset kirjoitetaan samaan vastauskenttään. Jaottele vastauksesi osatehtävien mukaisesti. Halutessasi voit tuottaa vastausten tueksi piirroksia, kaavioita tai taulukoita ja liittää niistä kuvakaappauksen mihin tahansa tekstivastaukseen.

Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

A-osa

Vastaa neljään tehtävään.

1. Perustehtäviä 12 p.

Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset ilman välivaiheita ja perusteluja. Jokaisen kohdan vastaus on kokonaisluku.

Tehtävässä ei voi käyttää kuvakaappauksia eikä kaavaeditoria. Kunkin vastauksen maksimipituus on 5 merkkiä. Vastaukset arvostellaan tietokoneavusteisesti ja ohjeiden noudattamatta jättäminen voi johtaa pistevähennyksiin.

1.1 Polynomin $p(x) = x^2 - 6x$ suurempi nollakohta on 2 p.

$x =$ 6

1.2 Funktion $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ arvo kohdassa $x = 2$ on 2 p.

$f(2) =$ 5

1.3 Funktion $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ derivaatan arvo kohdassa $x = 2$ on 2 p.

$f'(2) =$ 8

1.4 Yhtälön $5^{k-5} = 25$ ratkaisu on 2 p.

$k =$ 7

1.5 Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$ raja-arvo kohdassa $x = 4$ on 2 p.

$\lim_{x \to 4} f(x) =$ 8

1.6 Määritä lausekkeen $x^3 + 1$ arvo, kun $x^2 + 1 = 26$ ja $x < 0$. 2 p.

$x^3 + 1 =$ -124

CASIO

2. Useita ratkaisutapoja 12 p.

Yhtälöitä ratkaistaessa käytetään usein osittelulakia eli kerrotaan sulkeet auki tai otetaan yhteinen tekijä;

$$4(x+1) = 4x+4$$

on esimerkki sulkeiden auki kertomisesta ja

$$4x+4 = 4(x+1)$$

on esimerkki yhteisen tekijän ottamisesta.

1. Ratkaise yhtälö

$$(2x+1)(x-6) = 0$$

ja yhtälö

$$(2y+1)(y-6) = -6$$

eri tavoilla niin, että toinen yhtälö ratkaistaan kertomalla sulkeet auki ja toinen niin, että sulkeita ei kerrota auki. **(6 p.)**

2. Ratkaise yhtälö

$$5(7x-2)+7(7x-2) = 12$$

ja yhtälö

$$5(7y-2)+7(7y+2) = 12$$

eri tavoilla niin, että toinen yhtälö ratkaistaan kertomalla sulkeet auki ja toinen niin, että sulkeita ei kerrota auki. **(6 p.)**

1. Ratkaistaan ensimmäinen yhtälö kertomatta sulkeita auki tulon nollasäännöllä

$$(2x+1)(x-6) = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \vee x-6 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 6$$

ja toinen yhtälö kertomalla sulut auki

$$(2y+1)(y-6) = -6 \Leftrightarrow 2y^2 - 11y = 0 \Leftrightarrow y(2y-11) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = \frac{11}{2}$$

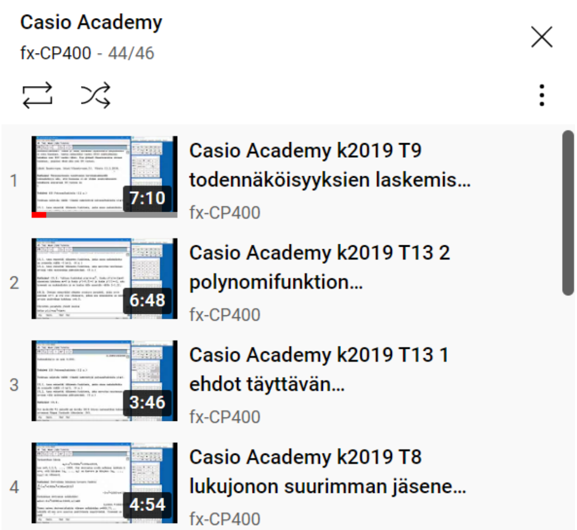
2. Ratkaistaan ensimmäinen yhtälö kertomatta sulkeita auki ja ottamalla yhteiseksi tekijäksi (7x - 2)

$$5(7x-2)+7(7x-2) = 12 \Leftrightarrow (7x-2)(5+7) = 12 \Leftrightarrow 7x-2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{7}$$

ja toinen yhtälö kertomalla sulut auki

$$5(7y-2)+7(7y+2) = 12 \Leftrightarrow 35y-10+49y+14 = 12 \Leftrightarrow 84y = 8 \Leftrightarrow y = \frac{2}{21}$$

Tukivideoita ylkkäreistä: https://bit.ly/casio-academy



3. *abBA*-tehtävä 12 p.

1. Sievennä lauseke $(a^2 + \sqrt{2}\,ab + b^2)(a^2 - \sqrt{2}\,ab + b^2)$. **(6 p.)**

2. Funktiosta

$$f(x) = Ae^{2x} + B\cos(3x)$$

tiedetään, että $f(0) = 4$ ja $f'(0) = 5$. Määritä vakioiden A ja B arvot. **(6 p.)**

1. Kerrotaan sulut auki ja yhdistetään samanmuotoiset termit

$$\left(a^2 + \sqrt{2}ab + b^2\right)\left(a^2 - \sqrt{2}ab + b^2\right)$$

$$= a^4 - \sqrt{2}a^3b + a^2b^2 + \sqrt{2}a^3b - 2a^2b^2 + \sqrt{2}ab^3 + a^2b^2 - \sqrt{2}ab^3 + b^4 = a^4 + b^4$$

2. Tehtävän ehdoista saadaan

$$f(0) = A \cdot e^{2 \cdot 0} + B \cdot \cos(3 \cdot 0) = A + B = 4$$

ja

$$f'(0) = 2A \cdot e^{2 \cdot 0} - 3B \cdot \sin(3 \cdot 0) = 2A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{2} \wedge B = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$

4. Polynomit 12 p.

Polynomien $f(x) = (x-2)(x+2)(x-1)$ ja $g(x) = -2(x-2)(x+2)(x+1)$ kuvaajat leikkaavat toisensa kolmessa pisteessä $(2,0)$, $(-2,0)$ ja (x_0, y_0), missä $-2 < x_0 < 0$.

1. Määritä leikkauspiste (x_0, y_0). **(4 p.)**

2. Laske polynomien kuvaajien väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $[0,2]$. **(8 p.)**

1. Määritetään leikkauspisteen x-koordinaatti asettamalla funktiot yhtäsuuriksi

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x-1) = -2(x-2)(x+2)(x+1) \Leftrightarrow x - 1 = -2x - 2$$

$$\Leftrightarrow 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} := x_0 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = \left(-\frac{1}{3} + 2\right)\left(-\frac{1}{3} + 2\right)\left(-\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{140}{27}$$

Leikkauspiste on siis

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{140}{27}\right) \ , -2 < x_0 < 0$$

2. Polynomina erotusfunktio g(x) - f(x) on jatkuva kaikkialla. Välillä [0, 2] f(1) = 0 < g(1) = 12 eikä välillä]0, 2[ole funktioiden yhteisiä pisteitä, joten pinta-ala saadaan määrätyn integraalin avulla yhdessä osassa

$$A = \int_0^2 g(x) - f(x)\,dx = \int_0^2 -3x^3 - x^2 + 4x + 4dx = \Big/_0^2 \left(-\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x\right)$$

$$= -\frac{3}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 0 = -12 - \frac{8}{3} + 8 + 8 = \frac{4}{3}pay$$

B1-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

5. Monivalinnat 12 p.

Valitse oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 1 tai 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

5.1 Kaikissa suunnikkaissa lävistäjät 1 p.

puolittavat toisensa

5.2 Kuutiossa on 1 p.

6 tahkoa, 8 kärkeä ja 12 särmää

5.3 Suora, jolla on ympyrän kanssa kaksi yhteistä pistettä, on ympyrän 1 p.

sekantti

5.4 Paraabeli muodostuu niistä tason pisteistä, jotka ovat yhtä etäällä kiinteästä suorasta ja paraabelin 1 p.

polttopisteestä

5.5 Kun vektori, joka ei ole nollavektori, kerrotaan pituutensa käänteisluvulla, saadaan vektorin 1 p.

kanssa samansuuntainen yksikkövektori

5.6 Avaruuden kolme eri pistettä ei koskaan määrää yksikäsitteistä 1 p.

palloa

5.7 Kun a ja b ovat reaalilukuja, niin epäyhtälö $a < b$ toteutuu täsmälleen silloin, kun 2 p.

$a^3 < b^3$

5.8 Polynomi $(x^2 + 5x + 1)(x + 3)$ derivoidaan. Mikä on derivaatan arvo pisteessä 0? 2 p.

16

5.9 Tiedetään, että $x^x = 100$. Mitä voidaan sanoa luvusta x ? 2 p.

$3 < x < 4$

6. Ympyrä kohtaa paraabelin (12 p.)

Tämän tehtävän voi ratkaista likimääräisesti ohjelmistolla. Tällöin perusteluiksi riittävät kuvakaappaukset tai selitykset, joista ilmenee, mitä on tehty. Tehtävän voi myös ratkaista algebrallisesti laskemalla.

Olkoon $r > 0$. Paraabeli $y = x^2$ ja ympyrä $x^2 + (y-2)^2 = r^2$ sivuavat toisiaan kahdessa pisteessä. Määritä paraabelin ja ympyrän väliin jäävän alueen pinta-ala. Anna vastaus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

Ratkaistaan yhtälöpari $\left.\begin{cases} y=x^2 \\ x^2+(y-2)^2=r^2 \end{cases}\right|_{x,y}$ käyrien leikkauspisteiden löytämiseksi. Sijoittamalla ylemmän yhtälön arvo alempaan saadaan $y+(y-2)^2=r^2$ eli $y^2-3y+4-r^2=0$. Koska paraabelilla ja ympyrällä saa olla vain kaksi sivuamispistettä, pitää yhtälöllä olla vain yksi ratkaisu eli sen diskriminantin pitää olla 0.

solve$((-3)^2-4*1*(4-r^2)=0,r)$

$$\left\{r=\frac{-\sqrt{7}}{2},\ r=\frac{\sqrt{7}}{2}\right\}$$

Koska r esiintyy yhtälössä vain parillisessa potenssissa, voidaan jatkolaskuun valita $r=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Sijoitetaan arvo yhtälöön ja ratkaistaan siitä y.

solve$(y^2-3y+4-r^2=0,y)\,|\,r=\frac{\sqrt{7}}{2}$

$$\left\{y=\frac{3}{2},\ y=\frac{3}{2}\right\}$$

Vastaavat x-koordinaatin arvot sivuamispisteille ovat

solve$(y=x^2,x)\,|\,y=\frac{3}{2}$

$$\left\{x=\frac{-\sqrt{6}}{2},\ x=\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$$

Ratkaistaan ympyrän yhtälö y:n suhteen integrointia varten.

solve$\left(x^2+(y-2)^2=\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2,y\right)$

$$\left\{y=\frac{-\sqrt{-4\cdot x^2+7}}{2}+2,\ y=\frac{\sqrt{-4\cdot x^2+7}}{2}+2\right\}$$

Kysytty alue jää ympyrän alemman puoliskon ja paraabelin väliin, joten sen suuruus on

$$\int_{\frac{-\sqrt{6}}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \frac{-\sqrt{-4\cdot x^2+7}}{2}+2-x^2\,dx$$

$$\frac{-7\cdot\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{42}}{7}\right)}{4}+\frac{5\cdot\sqrt{6}}{4}$$

ans

$$0.9912628082$$

Vastaus: Pinta-ala on n. 0,99 pay.

CASIO

7. Makeismatematiikkaa 12 p.

1. Makeispussissa on 22 salmiakkimakeista ja 19 hedelmämakeista. Eeri ottaa pussista kolme makeista. Millä todennäköisyydellä kaikki kolme ovat hedelmämakeisia? **(6 p.)**

2. Kaikki Eerin ottamat makeiset olivat hedelmämakeisia, jolloin makeispussissa on jäljellä 22 salmiakkimakeista ja 16 hedelmämakeista. Kuura ottaa nyt pussista viisi makeista. Millä todennäköisyydellä näiden viiden makeisen joukossa on vähintään yksi salmiakkimakeinen ja vähintään yksi hedelmämakeinen? **(6 p.)**

1. Suotuisten alkeistapausten määrä on 3 hedelmämakeista sisältävien osajoukkojen lukumäärä nCr(19,3) jaettuna kaikkien 3 makeisen osajoukkojen lukumäärällä nCr(41,3) eli

$$\frac{\mathrm{nCr}(19,3)}{\mathrm{nCr}(41,3)}$$

0.09090056285

Vastaus: Todennäköisyys on n. 0,09.

2. Todennäköisyys saadaan laskemalla eri vaihtoehtojen summa. Salmiakkimakeisten (s) ja hedelmämakeisten (h) määrien suotuisat alkeistapaukset (s,h) ovat (1,4), (2,3), (3,2) ja (4,1) ja kaikkien viiden makeisen osajoukkojen alkeistapausten määrä on nCr(38,5).

$$\frac{\mathrm{nCr}(22,1)*\mathrm{nCr}(16,4)+\mathrm{nCr}(22,2)*\mathrm{nCr}(16,3)+\mathrm{nCr}(22,3)*\mathrm{nCr}(16,2)+\mathrm{nCr}(22,4)*\mathrm{nCr}(16,1)}{\mathrm{nCr}(38,5)}$$

0.9388335704

Vastaus: Todennäköisyys on n. 0,94.

8. Jatkuva mutta ei derivoituva funktio (12 p.)

Anna esimerkki jatkuvasta funktiosta $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, joka ei ole derivoituva kohdassa $x = 1$. Perustele erotusosamäärän

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

avulla, miksi funktio ei ole derivoituva kohdassa $x = 1$. Perustele lisäksi funktion jatkuvuus.

Valitaan funktio, jonka kuvaaja visuaalisisesti ajateltuna on yhtenäinen kaikkialla, mutta joka tekee mutkan kohdassa x=1. Esimerkiksi funktio $f(x)=\begin{cases} x, & x\leq 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$ on tällainen. Osafunktiot ovat polynomeina kaikkialla jatkuvia ja derivoituvia, joten tarkastellaan kohtaa x=1 tarkemmin erotusosamäärän $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ avulla.

$$\lim_{x\to 1-}\left(\frac{x-1}{x-1}\right)$$

1

$$\lim_{x\to 1+}\left(\frac{1-1}{x-1}\right)$$

0

Koska erotusosamäärän toispuoleiset raja-arvot eivät ole samat, ei funktio ole derivoituva kohdassa x=1. Tarkastellaan vielä funktion jatkuvuutta kohdassa x=1.

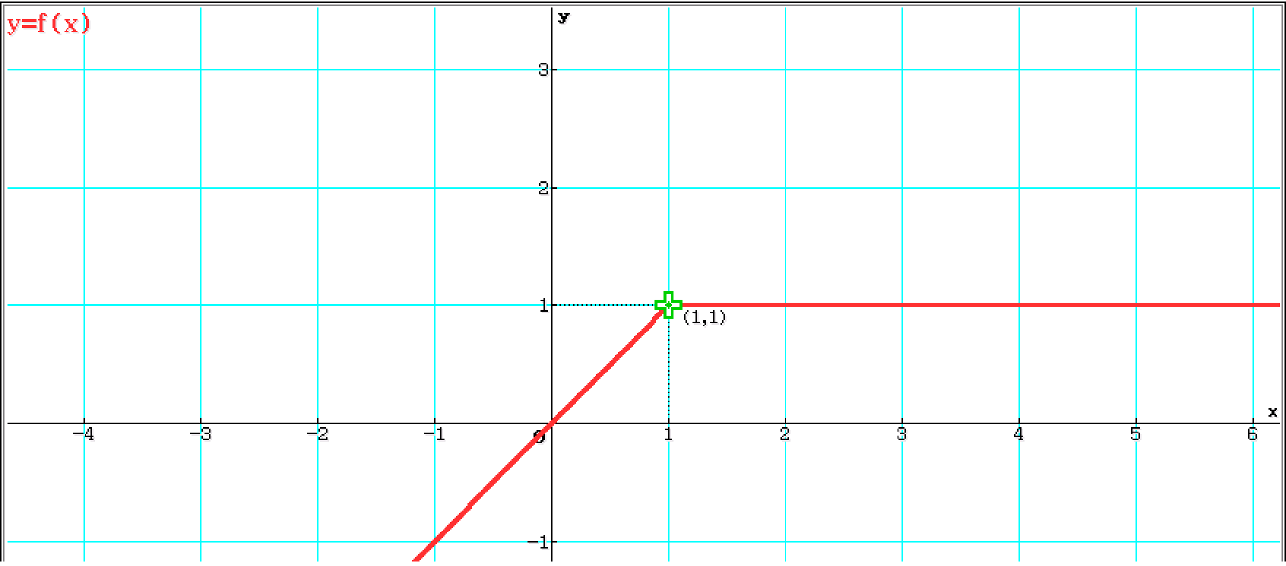
$$\lim_{x\to 1-}(x)$$

1

$$\lim_{x\to 1+}(1)$$

1

Koska funktiolla on raja-arvo 1 kohdassa x=1 ja funktion arvo f(1)=1 on sama kuin raja-arvo, on funktio jatkuva myös kohdassa x=1. Niinpä f(x) on kaikkialla jatkuva funktio, jolla ei ole derivaattaa kohdassa x=1.



CASIO

9. Ympyrä ja numeeriset menetelmät 12 p.

Tarkastellaan yksikköympyrän ensimmäisessä neljänneksessä sijaitsevaa osaa, eli ehtojen $0 \leq x \leq 1$ ja $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ määräämää aluetta B. Arvioidaan alueen B pinta-alaa puolisuunnikassäännöllä ja keskipistesäännöllä. Keskipistesääntö tarkoittaa suorakaidesääntöä, jossa suorakaiteen korkeus määräytyy osavälin keskipisteen mukaan.

Valitse kolme seuraavista väitteistä, ja selvitä, ovatko ne tosia vai epätosia:

- Väite 1. Keskipistesäännöllä voidaan saada arvio, joka on suurempi kuin alueen B todellinen pinta-ala.
- Väite 2. Keskipistesäännöllä voidaan saada arvio, joka on pienempi kuin alueen B todellinen pinta-ala.
- Väite 3. Puolisuunnikassäännöllä voidaan saada arvio, joka on suurempi kuin alueen B todellinen pinta-ala.
- Väite 4. Puolisuunnikassäännöllä voidaan saada arvio, joka on pienempi kuin alueen B todellinen pinta-ala.

Muista myös perustella vastauksesi.

Väite 1: Tarkastellaan yhden jakovälin tapausta, jolloin välin keskipiste on $\frac{1}{2}$ ja keskipistesäännössä tarvittava suorakulmion korkeus on yksikköympyrää rajoittavan kaaren arvo kohdassa $\frac{1}{2}$ eli $\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Verrataan keskipistesäännön antamaa pinta-alan arviota tarkkaan arvoon:

$$1*\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{4}$$

$$0.08062724039$$

Koska erotus on positiivinen, antaa keskipistesääntö todellista arvoa suuremman pinta-alan. Tämä väite on tosi.

Väitteet 3 ja 4: Yksikköympyrää 1. neljänneksessä rajaava kaari $y=\sqrt{1-x^2}$ on ylöspäin kupera, sillä sen toinen derivaatta on aina negatiivinen:

$$\text{simplify}\left(\frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)$$

$$\frac{-1}{(-x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

simplify(ans)

$$\frac{-\sqrt{-x^2+1}}{(x+1)^2\cdot(x-1)^2}$$

Tällöin sen ensimmäinen derivaatta on aidosti vähenevä ja käyrän jokainen piste on tangenttinsa alapuolella sivuamispistettä lukuunottamatta.

Niinpä jokainen puolisuunnikassäännössä käytetty kaaren pisteiden yhdysjana on aina yksikköympyrän sisäpuolella. Jokaista jakoväliä vastaava puolisuunnikas antaa liian pienen arvion pinta-alalle, joten myös niiden summa riippumatta jakovälien määrästä antaa liian pienen arvion.

Väite 3 on epätosi ja samalla väite 4 on tosi. Esim. yhden jakovälin tapauksessa puolisuunnikassääntö antaa pinta-alan arvioksi suorakulmaisen kolmion, jonka kateetit ovat pituudeltaan 1 ja pinta-alan arvio on pienempi kuin todellinen pinta-ala: $\frac{1}{2}<\frac{\pi}{4}\approx 0,79$.

B2-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

10. Veistos 12 p.

Aineisto

10.A Kuva: Veistos

Puistossa sijaitseva veistos on rakennettu käyttäen rautatankoja geometristen muotojen särminä kuvan 10.A mukaisesti. Veistoksen yläosa on pyramidi ja alaosa on suorakulmainen särmiö, jonka pohja on neliön muotoinen. Tiedekeskuksen pihalle on tarkoitus rakentaa vaakasuoralle alustalle samanmallinen veistos, jossa särmiön kehikkoon kuuluu myös pohjaneliön sivutangot (kuvassa pohjaneliö ei ole näkyvissä). Uuden rakennelman pitää toteuttaa seuraavat ehdot: rakennelman sisätilavuus on 21 kuutiometriä ja yläosan (pyramidin) korkeus on puolet alaosan korkeudesta. Mikä on tähän rakennelmaan tarvittavan rautatangon pienin mahdollinen kokonaispituus L?

Tehtävässä oletetaan, että rautatangon koko pituus L voidaan käyttää rakennelmaan. Liitoksiin käytettävää materiaalia ei tarvitse ottaa huomioon. Anna vastaus metreinä kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

Merkitään pohjaneliön sivua x ja suorakulmaisen särmiön korkeutta 2h, jolloin pyramidin korkeus on h. Muodostetaan kappaleen tilavuuden lauseke ja ratkaistaan siitä toinen muuttujista:

$\text{solve}(21=x^2*2h+\frac{1}{3}*x^2*h,h)$

$$\left\{h=\frac{9}{x^2}\right\}$$

Tarvittavan rautatangon pituus funktiona L on

$\text{define } L(x)=8x+4*2h+4*\sqrt{h^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2}$

done

Sijoitetaan tähän edellä ratkaistu h:n arvo, jotta päästään yhden muuttujan funktioon:

$L(x)\mid\left\{h=\frac{9}{x^2}\right\}$

$$8\cdot x+\frac{2\cdot\sqrt{2\cdot(x^6+162)}}{x^2}+\frac{72}{x^2}$$

Kysytty pienin arvo saadaan funktion L(x) miniminä (x>0):

$\text{fmin}\left(8\cdot x+\frac{2\cdot\sqrt{2\cdot(x^6+162)}}{x^2}+\frac{72}{x^2}\right)\mid x>0$

$$\left\{\text{MinValue}=2\cdot 18^{\frac{1}{3}}\cdot(\sqrt{3}+6),x=18^{\frac{1}{3}}\right\}$$

$2\cdot 18^{\frac{1}{3}}\cdot(\sqrt{3}+6)$

$$40.52741123$$

Vastaus: Rautatankoa tarvitaan vähintään 41 metriä.

11. Mitkä vektorit? 12 p.

1. Tason vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases}(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b})=2\\ 2\,\bar{a}\cdot\bar{a}+3\,\bar{b}\cdot\bar{b}=5.\end{cases}$$

   Määritä vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ pituudet. **(5 p.)**

2. Osatehtävän 1 vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ toteuttavat lisäksi yhtälöparin

$$\begin{cases}\bar{a}\cdot\bar{b}=\dfrac{\sqrt{11}}{10}\\ \bar{b}\cdot(\sqrt{3}\,\bar{i}-\bar{j})=\dfrac{1}{\sqrt{5}}.\end{cases}$$

   Merkitään vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välistä kulmaa symbolilla φ ja vektorien $\sqrt{3}\,\bar{i}-\bar{j}$ ja $\bar{b}$ välistä kulmaa symbolilla θ. Määritä kulmien φ ja θ suuruudet. **(5 p.)**

3. Määritä kaikki mahdolliset vektorit $\bar{a}$, jotka toteuttavat osatehtävien 1 ja 2 ehdot, kun $\bar{b}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\,\bar{j}$. **(2 p.)**

---

1. Ratkaistaan tehtävän yhtälöpari. Merkitään vektoreita kirjaimilla a ja b.

$$\begin{cases}(a+b)\cdot(a-b)=2\\ 2a\cdot a+3b\cdot b=5\end{cases}\Big|\,|a|,|b| \Leftrightarrow \begin{cases}a\cdot a-b\cdot b=2\\ 2a\cdot a+3b\cdot b=5\end{cases}\Big|\,|a|,|b| \Leftrightarrow \begin{cases}3a\cdot a-3b\cdot b=6\\ 2a\cdot a+3b\cdot b=5\end{cases}\Big|\,|a|,|b|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5a\cdot a=11\\ b\cdot b=a\cdot a-2\end{cases}\Big|\,|a|,|b| \Leftrightarrow \begin{cases}|a|^2=\dfrac{11}{5}\\ |b|^2=\dfrac{11}{5}-2\end{cases}\Big|\,|a|>0,\ |b|>0 \Leftrightarrow \begin{cases}|a|=\sqrt{\dfrac{11}{5}}\\ |b|=\sqrt{\dfrac{1}{5}}\end{cases}\Big|\,|a|,|b|$$

Vastaus: Vektorien pituudet ovat $|a|=\frac{\sqrt{55}}{5}$ ja $|b|=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

2. Käytetään vektorien välisen kulman määritelmää pistetulon ja vektorien pituuksien avulla.

$$\cos(\varphi)=\frac{a\cdot b}{|a||b|} \Leftrightarrow \cos(\varphi)=\frac{\frac{\sqrt{11}}{10}}{\frac{\sqrt{55}}{5}*\frac{\sqrt{5}}{5}} \Leftrightarrow \cos(\varphi)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=60°.$$

$$\cos(\theta)=\frac{(\sqrt{3}i-j)\cdot b}{\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}*|b|} \Leftrightarrow \cos(\theta)=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{2*\frac{\sqrt{5}}{5}} \Leftrightarrow \cos(\theta)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=60°$$

Vastaus: Molemmat kulmat φ ja θ ovat 60°.

3. Merkitään kysyttyä vektoria $a=xi+yj$ ja $b=0i-\frac{1}{\sqrt{5}}j$, missä i ja j ovat akselien suuntaiset yksikkövektorit. Ehdoista saadaan

$$|a|^2=x^2+y^2=\frac{11}{5} \text{ ja } a\cdot b=-\frac{1}{\sqrt{5}}y=\frac{\sqrt{11}}{10} \Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{11}}{10}*(-\sqrt{5})=\frac{-\sqrt{55}}{10}.$$

Sijoittamalla saatu y:n arvo ensimmäiseen yhtälöön saadaan $x^2+\left(\frac{-\sqrt{55}}{10}\right)^2=\frac{11}{5}$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{11}{5}-\frac{55}{100} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{165}{100}}=\pm\frac{\sqrt{165}}{10}$$

Vastaus: Vektorit ovat $a=\pm\frac{\sqrt{165}}{10}i-\frac{-\sqrt{55}}{10}j$.

12. Pascalin kolmio (12 p.)

Aineisto

12.A Animaatio: Pascalin kolmio

Pascalin kolmion sisällä jokainen luku saadaan laskemalla yhteen kaksi sen yläpuolella olevaa lukua (ks. animaatio 12.A). Jokaisen rivin reunimmaiset luvut ovat ykkösiä.

Rivillä n kohdassa k olevalle luvulle käytetään merkintää $p_{n,k}$. Pascalin kolmion luvut määritellään rekursiivisesti asettamalla $p_{n,0} = p_{n,n} = 1$ kaikilla $n \geq 0$ ja

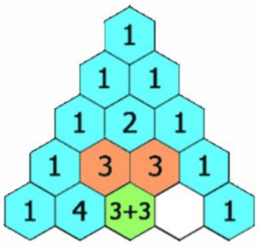
$$p_{n,k} = p_{n-1,k} + p_{n-1,k-1},$$

kun $n \geq 2$ ja $0 < k < n$. Huomaa, että indeksien n ja k numerointi alkaa nollasta.

Osoita induktiolla, että Pascalin kolmion rivillä n olevien lukujen summa on 2^n, eli

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n,k} = 2^n.$$

12.A Animaatio: Pascalin kolmio



Induktion alkuaskel arvolle n=0: $\sum_{k=0}^{0}(p_{0,k})=p_{0,0}=1=2^0$. Alkuaskel on tosi.

Induktio-oletus arvolle n≥0: $\sum_{k=0}^{n}(p_{n,k})=2^n$.

Induktioväite arvolle n+1: $\sum_{k=0}^{n+1}(p_{n+1,k})=2^{n+1}$.

Todistetaan induktioväite tutkimalla summalauseketta ja hyödyntämällä induktio-oletusta.

$\sum_{k=0}^{n+1}(p_{n+1,k})$ on Pascalin kolmion rivin n+1 lukujen summa, joka saadaan rivin n vierekkäisten lukujen summana. Koska jokaisen rivin ensimmäinen ja viimeinen jäsen on 1, saadaan summa muotoon

$$\sum_{k=0}^{n+1}(p_{n+1,k})=1+\sum_{k=1}^{n}(p_{n,k-1}+p_{n,k})+1=p_{n,n}+\sum_{k=1}^{n}(p_{n,k-1})+\sum_{k=1}^{n}(p_{n,k})+p_{n,0}$$

$=\sum_{k=0}^{n}(p_{n,k})+\sum_{k=0}^{n}(p_{n,k})$, joka on induktio-oletuksen nojalla $2^n+2^n=2^{n+1}$.

Koska alkuaskel pitää paikkansa ja induktioväite on todistettu, pitää väite paikkansa kaikille n=0, 1, 2, . . .

13. Korkea-asteinen polynomi 12 p.

Tarkastellaan polynomia

$$P(x) = x^{2n+1} - (x-n)(x-n+1)\cdots(x+n-1)(x+n),$$

missä $n > 0$ on kokonaisluku ja x on reaaliluku.

Osoita, että polynomilla $P(x)$

1. on ainakin yksi nollakohta **(4 p.)**
2. on korkeintaan $2n-1$ nollakohtaa **(4 p.)**
3. ei ole nollakohtaa $x_0 \geq n$. **(4 p.)**

1. Tutkitaan polynomia arvoilla n=1,2,3, jotta siitä saadaan jonkinlainen käsitys.

n=1: P(x)=

expand(x^3−(x−1)*x*(x+1))

x

n=2: P(x)=

expand(x^5−(x−2)*(x−1)*x*(x+1)*(x+2))

$5\cdot x^3-4\cdot x$

n=3: P(x)=

expand(x^7−(x−3)*(x−2)*(x−1)*x*(x+1)*(x+2)*(x+3))

$14\cdot x^5-49\cdot x^3+36\cdot x$

Polynomissa P(x) on aina alussa pariton termi x^{2n+1} ja loppuosan tulossa keskimmäisenä tulon tekijänä x. Niinpä x saadaan yhteiseksi tekijäksi ja tulon nollasäännöllä polynomin yksi nollakohdista on aina 0. Väite 1. on todistettu.

2. Polynomissa P(x) esiintyy vain parittomia potensseja, sillä erotuksen termeistä saadaan järjesteltyä binomien summan ja erotuksen tuloja, jotka ovat asteluvultaan parillisia ja näin saatu erotusosa kerrottaan x:llä, jolloin kaikista termeistä tulee paritonta astetta:

$P(x)=x^{2n+1}-x*(x-n)*(x+n)*(x-(n-1))*(x+(n+1))*...*(x-1)*(x+1)$

$=x^{2n+1}-x*(x^2-n^2)*(x^2-(n-1)^2)*...*(x^2-1^2)$

Koska erotusosassa on termin x jälkeen n kpl tulontekijöitä, niin korkeimman asteen termi on $x*x^{2n}=x^{2n+1}$. Niinpä polynomin P(x) korkeimman asteen termit kumoavat toisensa ja polynomin P(x) asteluvuksi jää 2n−1. Polynomilla on aina korkeintaan astelukunsa verran nollakohtia, joten väite 2 on todistettu.

3. Kun $x_0 \geq n$, niin

$x_0^{2n+1}-x_0*(x_0^2-n^2)*(x_0^2-(n-1)^2)*...*(x_0^2-1^2)$

$>x_0^{2n+1}-x_0*x_0^2*x_0^2*...*x_0^2=x_0^{2n+1}-x_0^{2n+1}=0$

eli polynomi saa vain positiivisa arvoja eikä $x_0 \geq n$ voi olla polynomin nollakohta. Väite 3 on todistettu.