CASIO

”Enemmän aikaa matematiikan opiskeluun,
vähemmän aikaa laskimen opetteluun.”

Laske Laudatur ClassPadilla

Pitkä matematiikka, kevät 2015

Casio Scandinavia

Keilaranta 4 | 02150 Espoo | info@casio.fi

Hyvä lukija,

Jälleen yhden kevään ja ikäluokan pitkän matematiikan koe on ohitse! Käsissäsi on Casion ClassPadilla ratkaistut mallivastaukset pitkän matematiikan kokeeseen. Toivottavasti tästä on apua ammattitaidon kehittämiseen, arviointiin tai tulevien vuosien abien yo-kokeisiin valmistautumiseen.

Ratkaisut on tehty ClassPad II Manager-ohjelmalla ja ne tulevat Casion www-sivuille ladattaviksi pdf-tiedostona ja lisäksi myös ClassPadin tiedostomuodossa. Muutakin tukea ja mm. toisen asteen opintoja kertaavan kirjan kokonaisuudessaan löydät sivuilta

http://www.casio-laskimet.fi

Ratkaisu:tekniikka

ClassPad II Managerilla ja fx-CP400 laskimella voi vastata kokeisiin usealla eri tavalla. Tällä hetkellä yo-kokeet ja suurin osa kurssikokeista tehdään käyttämällä laskinta tai CAS-ohjelmistoa tehtävien hamotteluun, parametrien vaikutuksen arviointiin, laskujen suorittamiseen, kuvaajien piirtoon, kulkukaaviotarkasteluun tai vaikkapa taulukkolaskentaan. Tämän jälkeen vastaukset siirretään koepaperiin kynällä.

Sähköisissä kokeissa vaihtoehtoja on enemmän. Yksi mahdollisuus on siirtää vastaukset sähköiseen lomakkeeseen sieppausnäyttöinä. ClassPad II Managerissa tämä onnistuu oikean hiiren napin valikosta, funktionäppäimellä F8 tai tehtäväpalkin alasvetovalikosta. Siepata voidaan koko näkymä tai aktviivisen ikkunan sisältö. Kaikkia näitä vaihtoehtoja on käytetty tämän vihkosen tekemisessä.

Toinen mahdollisuus on tallentaa sähköiset vastaukset tiedostona. Tämän vihkosen vastaukset on tallennettu myös tiedostoiksi ja osa kuvaajista kuviksi. Vastaukset tallennetaan yksi kerrallaan tai koko koesuoritus voidaan laskea ja tallentaa myös yhteen tiedostoon. Tällöin alkupään tehtäviin on helppo palata kokeen loppupuolellakin, mikäli niissä huomaa tarkennettavaa.

Tallennus toimii samalla tavalla sekä laskimessa että tietokoneohjelmassa ja tiedostoja voi siirtää laskimesta koneelle ja päinvastoin. Kysy lisää ja tilaa ilmainen koulutus koulullesi tai koulutusyhtymällesi osoitteesta info@casio.fi

Keväisin terveisin,

Espoossa 18.3.2014 Pepe Palovaara

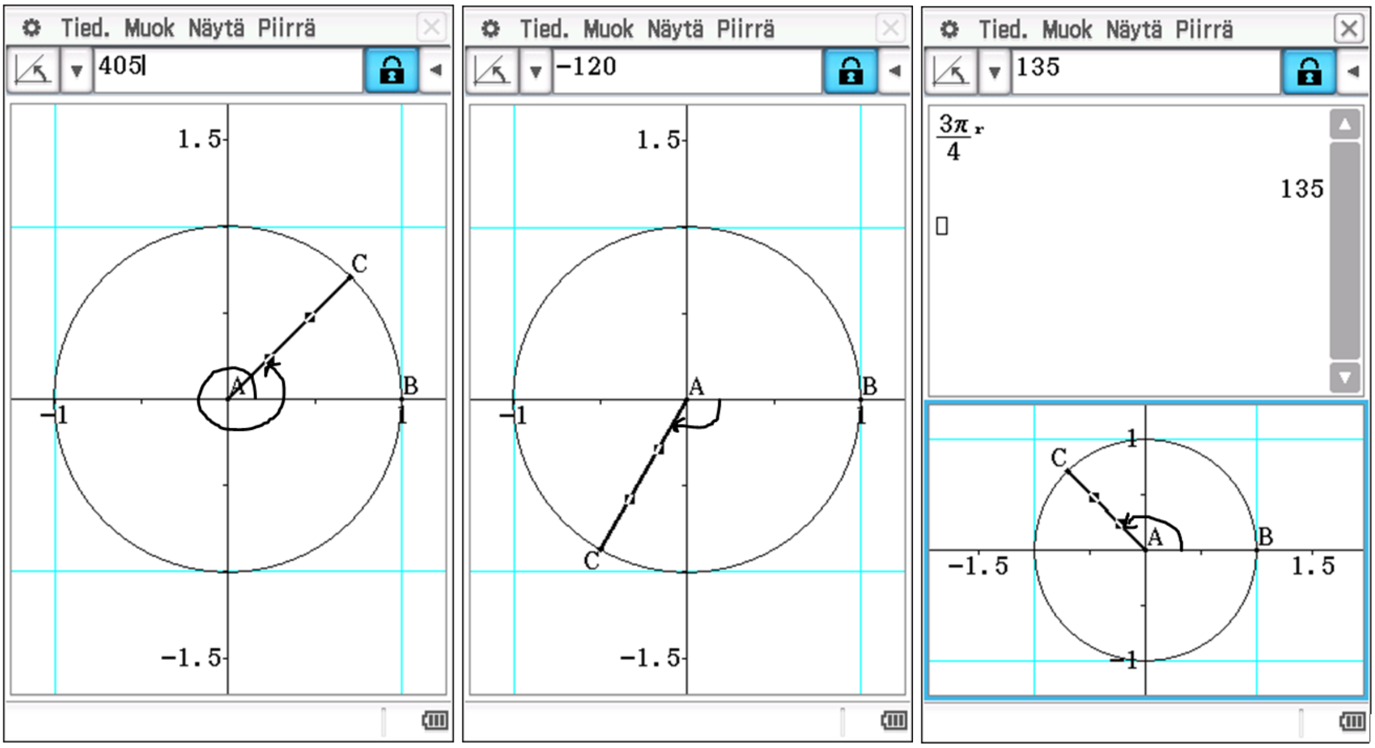
1. Piirrä kolme yksikköympyrää ja merkitse niihin seuraavat kulmat ja vastaavat kehäpisteet:

a) 405°

b) -120°

c) $\frac{3\pi}{4}$ rad.

Ratkaisu:

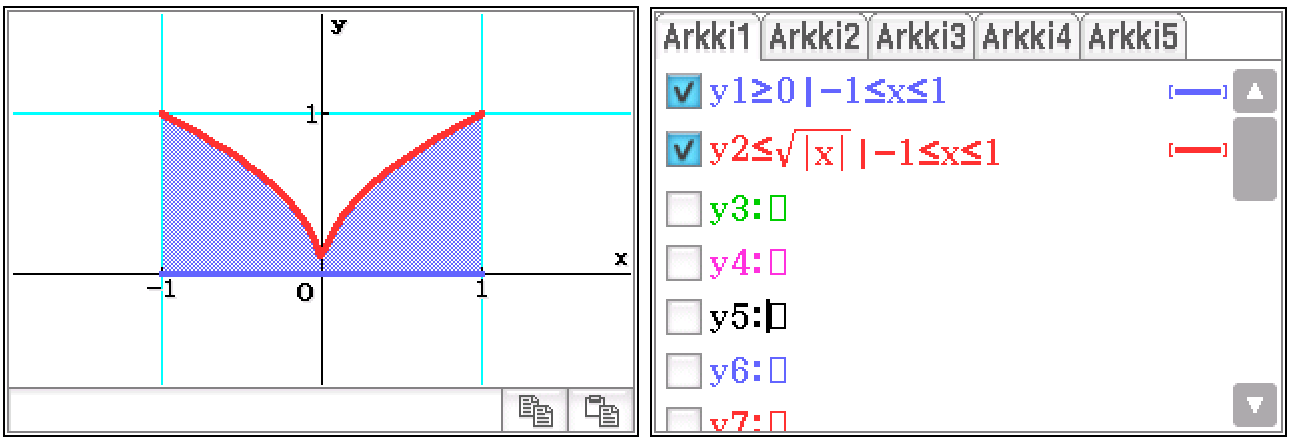


(Aukeamissuuntaa kuvaavat kaaret on piirretty vapaalla kädellä. c-kohdassa radiaanit on muutettu asteiksi ennen kulman piirtämistä.)

2. **a)** Piirrä kuva epäyhtälöiden $0 \le y \le \sqrt{|x|}$ määräämästä tasoalueesta, kun $-1 \le x \le 1$.

b) Ratkaise yhtälö $x\sqrt{1+x} = \sqrt{2x}$.

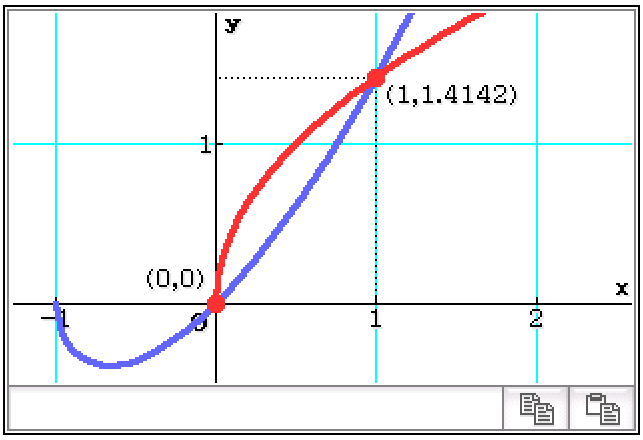
Ratkaisu: a)



b) Kuvaaja selventää asiaa, eikä ollut osa tehtävänantoa.

solve$(x\cdot\sqrt{1+x}=\sqrt{2\cdot x},x)$

$\{x=0, x=1\}$



3. Vieraita kieliä äidinkielenään puhuvien Helsingin asukkaiden lukumäärä kasvoi vuosittain 7,5 prosenttia aikavälillä 2003–2013. Vuonna 2013 arvioitiin, että vuosina 2013–2033 kyseessä oleva lukumäärä vielä kaksinkertaistuu. Laske vieraskielisten asukkaiden lukumäärän keskimääräinen vuosittainen kasvuprosentti näiden 30 vuoden aikana.

Ratkaisu:

Merkitään alkuperäistä lukumäärää symbolilla a, jolloin 10 vuodessa määrän muutos on

$1.075^{10}a$

$2.061031562\cdot a$

Tämä määrä kaksinkertaisena on

$2*2.061031562\cdot a$

$4.122063124\cdot a$

Tällöin keskimääräinen vuotuinen kasvukerroin 30 vuodelle on

$\sqrt[30]{4.122063124}$

1.048344018

mikä vastaa n. 4,8% vuotuista kasvua.

Kaikki laskut voi tehdä sekä laskimella fx-CP400 että tietokoneohjelmalla ClassPad II Manager. Ainoa ero on se, että Manager-ohjelman ikkunan koko on vapaasti muutettavissa kun taas laskimen näyttöä voi käyttää vaaka- tai pystysuuntaisena.

4. Tarkastellaan yhtälöä $t^4x^2+(t^2+1)x+1=0$ parametrin $t\neq 0$ eri arvoilla.

a) Ratkaise yhtälö, kun $t=1$.

b) Määritä kaikki ne parametrin $t\neq 0$ arvot, joilla yhtälöllä on ainakin yksi ratkaisu $x\in\mathbf{R}$.

Ratkaisu:

a) Sijoitetaan parametriksi $t=1$

$t^4x^2+(t^2+1)x+1 \mid t=1$

$$x^2+2\cdot x+1$$

ja ratkaistaan yhtälö

solve$(x^2+2\cdot x+1=0, x)$

$$\{x=-1\}$$

b) Jos $t\neq 0$, niin kyseessä on muuttujan x suhteen toisen asteen yhtälö. Tällaisella yhtälöllä on ainakin yksi reaalinen ratkaisu jos ja vain jos sen dirskriminantti≥0:

solve$(t^4x^2+(t^2+1)x+1=0, x)$

$$\left\{x=\frac{-\left(t^2-\sqrt{-3\cdot t^4+2\cdot t^2+1}+1\right)}{2\cdot t^4}, x=\frac{-\left(t^2+\sqrt{-3\cdot t^4+2\cdot t^2+1}+1\right)}{2\cdot t^4}\right\}$$

solve$(-3\cdot t^4+2\cdot t^2+1\geq 0, t)$

$$\{-1\leq t\leq 1\}$$

Vastaus on siis $-1\leq t\leq 1$, $t\neq 0$.

5. Olkoot $A=(-2,2)$, $B=(3,1)$, $C=(-2,3)$ ja $D=(1,-1)$. Laske janojen AB ja CD leikkauspisteen koordinaattien tarkat arvot.

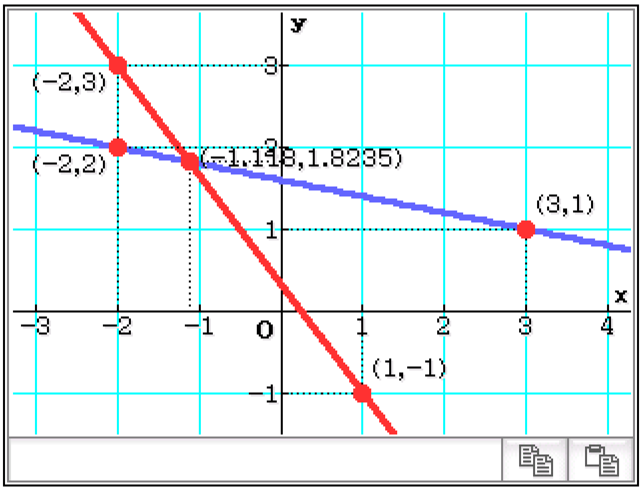
Ratkaisu: Kuvaaja selventää asiaa ja siitä voi tarkistaa likiarvoisen vastauksen oikeaksi.

$$\left\{\begin{array}{l} y-2=\dfrac{2-1}{-2-3}(x-(-2)) \\ y-3=\dfrac{3-(-1)}{-2-1}(x-(-2)) \end{array}\right|_{x,\,y}$$

$$\left\{x=-\frac{19}{17},\ y=\frac{31}{17}\right\}$$

ans

$$\{x=-1.118,\ y=1.824\}$$

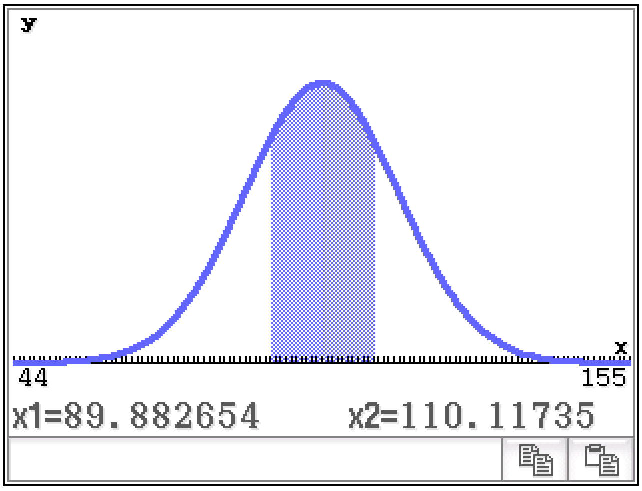


6. Oletetaan, että väestön älykkyysosamäärä noudattaa normaalijakaumaa $N(100,15)$. Määritä odotusarvon 100 ympäriltä symmetrinen väli, johon kuuluu täsmälleen puolet väestöstä.

Ratkaisu:

x_1InvN	89.882654
x_2InvN	110.11735
prob	0.5
σ	15
μ	100

<< Tak. Ohje Lähtö>>



Puolet väestöstä kuuluu älykkyysosamäärältään välille [89,9;110,1].

CASIO

7. a) Millä muuttujan x arvoilla lauseke $\ln(\sin x)$ on määritelty? Muuttuja x on ilmaistu radiaaneina.

b) Määritä kaksidesimaaliset likiarvot yhtälön $|\ln(\sin x)| = 2$ kaikille ratkaisuille välillä $0 < x < 10$.

Ratkaisu: Kuvaaja selventää tehtävää, eikä se ollut osa tehtävänantoa. Likiarvon tarkkuuden b-kohtaa varten voi asettaa laskimen perusasetuksista.

a) Logaritmi on määritelty vain positiivisille numeruksille:

solve(sin(x)>0, x)

$\{2\cdot\pi\cdot\text{constn}(1)<x<2\cdot\pi\cdot\text{constn}(1)+\pi\}$

missä constn(1)∈N.

b) Ratkaistaan yhtälö

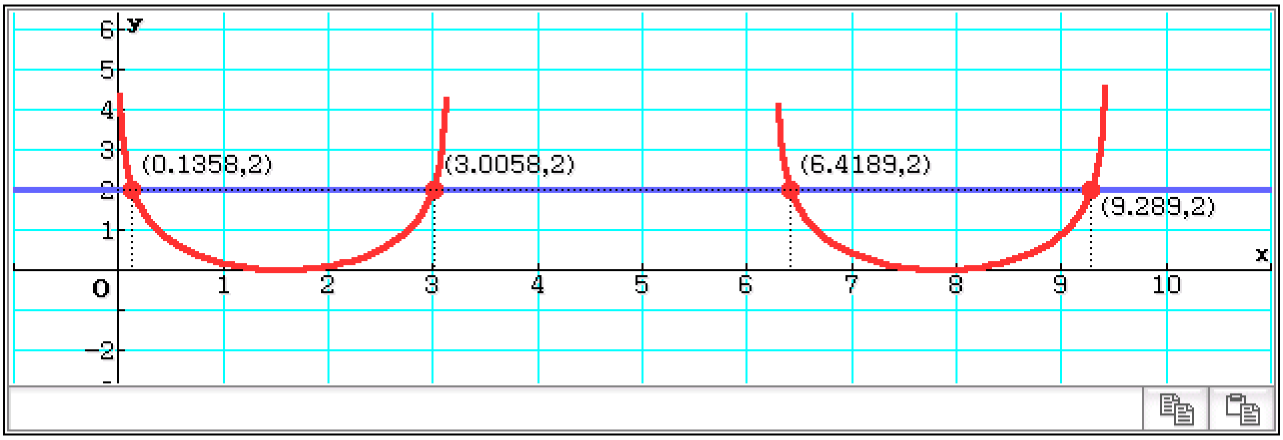
solve(|ln(sin(x))|=2, x)

$\{x=-\sin^{-1}(e^{-2})+2\cdot\pi\cdot\text{constn}(1)+\pi,\ x=\sin^{-1}(e^{-2})+2\cdot\pi\cdot\text{constn}(2)\}$

missä constn(1), constn(2)∈N. Rajataan vastausten kaksidesimaaliset likiarvot välille 0<x<10

rangeAppoint(ans, 0, 10)

$\{x=0.14, x=3.01, x=6.42, x=9.29\}$



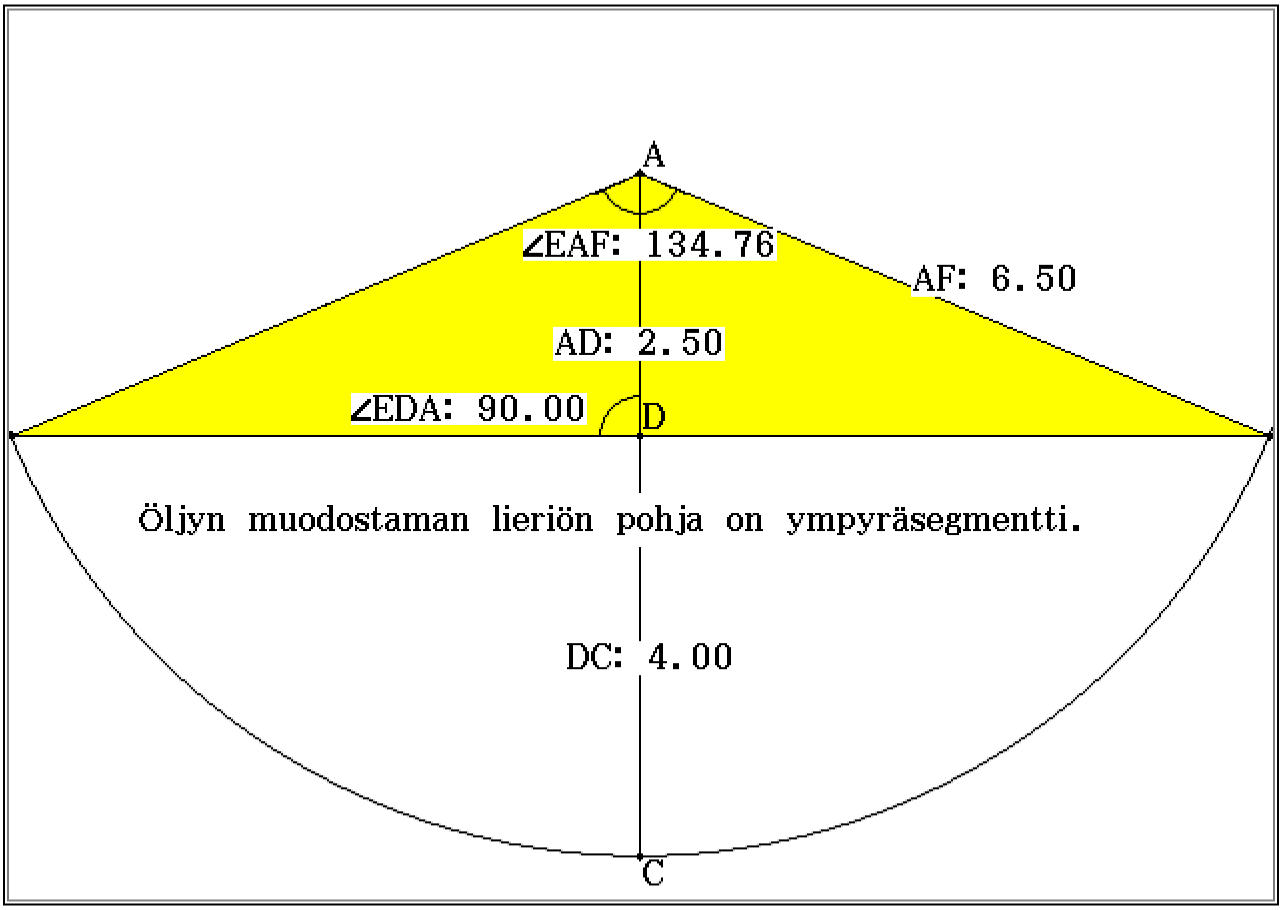
8. Öljysäiliö on suoran ympyrälieriön muotoinen, ja sen akseli on vaakasuorassa. Akselia vastaan kohtisuoran poikkileikkauksen halkaisija on 1,3 metriä.

a) Määritä säiliön pituus, kun sen tilavuus on 3 000 litraa.

b) Öljyn korkeudeksi syvimmässä kohdassa mitataan 40 senttimetriä. Kuinka monta litraa öljyä on jäljellä säiliössä?

<http://www.tankkituomiset.fi/palavan-nesteen-sailiot/kuivurisailiot>. Luettu 20.2.2014.

Ratkaisu: Öljysäiliön päätyä kuvaava kuva selventää laskua, sitä ei kysytty kokeessa.



a) Ratkaistaan säiliön pituus yhtälöstä, joissa mittayksiköt on ilmoitettu desimetreinä. Laskuissa voi käyttää likiarvoja tehtävän luonteen takia.

$\text{solve}(\pi(\frac{13}{2})^2 * h=3000, h)$

$\{h=22.602\}$

Vastaus: n. 22,6dm (n. 2,3m)

b) Öljy muodostaa suoran lieriön, jonka korkeus on edellä ratkaistu h ja jonka päädyn pinta-ala on ympyräsegmentti. Ratkaistaan ensin tasakylkisen kolmion huippukulma α:

$\text{solve}(\cos(\frac{\alpha}{2})=\frac{6.5-4}{6.5}, \alpha) | 0<\alpha<180$

$\{\alpha=134.760\}$

Nyt öljyn tilavuudeksi (litraa) saadaan

$h*\left(\frac{\alpha*\pi*6.5^2}{360}-\frac{1}{2}*6.5^2*\sin(\alpha)\right) | \{h=22.601885, \alpha=134.76027\}$

783.974

Vastaus: Säiliössä on n. 784 litraa öljyä.

9. Suoran ympyräkartion muotoista telttaa varten on varattu 16 neliömetriä kangasta. Kangasta ei käytetä teltan pohjaan. Määritä pohjaympyrän halkaisija silloin, kun teltan tilavuus on suurin mahdollinen.

<http://www.indios.cz/cs/rytirske-a-stredoveke-stany/merlin/>. Luettu 3.2.2014.

Ratkaisu:

Merkitään teltan pohjaympyrän sädettä $\boldsymbol{r}$ ja sivujanan pituutta $\boldsymbol{s}$.
Ratkaistaan suoran ympyräkartion pinta-alan lausekkeesta $\boldsymbol{r}$:
solve($\pi\boldsymbol{r}\boldsymbol{s}$=16, r)

$$\left\{r=\frac{16}{s\cdot\pi}\right\}$$

Teltan korkeus saadaan suorakulmaisesta kolmiosta $h=\sqrt{\boldsymbol{s}^2-\boldsymbol{r}^2}$ ja teltan tilavuus on $V=\frac{1}{3}\pi\boldsymbol{r}^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{16}{s\cdot\pi}\right)^2\sqrt{\boldsymbol{s}^2-\left(\frac{16}{s\cdot\pi}\right)^2}$. Lasketaan tälle lausekkeelle suurin mahdollinen arvo:

$\text{fMax}\left(\frac{1}{3}\pi\left(\frac{16}{s\cdot\pi}\right)^2\sqrt{\boldsymbol{s}^2-\left(\frac{16}{s\cdot\pi}\right)^2}, s, 0, \infty\right)$

$$\left\{\text{MaxValue}=\frac{64\cdot3^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{2}}{9\cdot\sqrt{\pi}}, s=\frac{4\cdot3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}}\right\}$$

ans

{MaxValue=7.467, s=2.970}

Pohjaympyrän halkaisija on tällöin

$2*\frac{16}{s\cdot\pi}|s=2.970060997$

3.430

Vastaus. Pohjaympyrän halkaisija on 3,43m.

10. Olkoon $a>0$. Funktion $f(x)=a\sqrt{x}$ kuvaaja $y=f(x)$ pyörähtää x-akselin ympäri välillä $[0,1]$, jolloin syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus on 2π. Määritä tämän pyörähdyskappaleen vaipan pinta-ala kaavalla $A=2\pi\int_0^1 |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$.

Ratkaisu:

Ratkaistaan parametrin a arvo pyörähdyskappaleen tilavuuden lausekkeesta:

Define $f(x)=a\sqrt{x}$

done

$\pi\int_0^1 (f(x))^2 dx$

$\frac{a^2\cdot\pi}{2}$

solve$\left(\frac{a^2\cdot\pi}{2}=2\pi, a\right) | a>0$

$\{a=2\}$

Määritellään alan funktio g(x) saadulla parametrin a arvolla ja lasketaan pinta-alan arvo:

Define $g(x)=2\sqrt{x}$

done

$2\pi\int_0^1 |g(x)|\sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}(g(x))\right)^2} dx$

$2\cdot\left(\frac{8\cdot\sqrt{2}}{3}-\frac{4}{3}\right)\cdot\pi$

simplify(ans)

$\frac{(16\cdot\sqrt{2}-8)\cdot\pi}{3}$

11. Osoita, että 7-järjestelmässä ilmaistu luku $a_5 7^5 + a_4 7^4 + a_3 7^3 + a_2 7^2 + a_1 7 + a_0$ on jaollinen luvulla 6 täsmälleen silloin, kun numeroiden summa $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ on jaollinen luvulla 6. Tässä $a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

Ratkaisu: Kun laskimen algebra-tila otetaan pois päältä näytön alareunan vaihtoehdoista Alg->Avust, niin laskuja ei automaattisesti sievennetä ja esim. binomin potenssit kirjoitetaan kuten tämän tehtävän ratkaisussa.

Mikä tahansa 7–kantainen luku x voidaan esittää muodossa

$x = a_5 7^5 + a_4 7^4 + a_3 7^3 + a_2 7^2 + a_1 7^1 + a_0 7^0$

$\quad = a_5(6+1)^5 + a_4(6+1)^4 + a_3(6+1)^3 + a_2(6+1)^2 + a_1(6+1)^1 + a_0$

Tutkitaan kertoimet $(6+1)^k$, missä k=1, 2, 3, 4, 5:

expand$((6+1)^5)$

$$6^5+5\cdot 6^4\cdot 1+10\cdot 6^3\cdot 1^2+10\cdot 6^2\cdot 1^3+5\cdot 6\cdot 1^4+1^5$$

expand$((6+1)^4)$

$$6^4+4\cdot 6^3\cdot 1+6\cdot 6^2\cdot 1^2+4\cdot 6\cdot 1^3+1^4$$

expand$((6+1)^3)$

$$6^3+3\cdot 6^2\cdot 1+3\cdot 6\cdot 1^2+1^3$$

expand$((6+1)^2)$

$$6^2+2\cdot 6\cdot 1+1^2$$

expand$((6+1)^1)$

$$6+1$$

Poistetaan jokaisesta luvusta viimeinen ykkönen, jolloin luku 6 saadaan yhteiseksi tekijäksi ja luku muotoon 6n+1, missä $n \in \mathbb{N}$:

factorOut$(6^5+5\cdot6^4\cdot1+10\cdot6^3\cdot1^2+10\cdot6^2\cdot1^3+5\cdot6\cdot1^4, 6)$

$$6\cdot\frac{16806}{6}$$

$=6*2801$

factorOut$(5\cdot6^4\cdot1+10\cdot6^3\cdot1^2+10\cdot6^2\cdot1^3+5\cdot6\cdot1^4, 6)$

$$6\cdot\frac{9030}{6}$$

$=6*1505$

factorOut$(10\cdot6^3\cdot1^2+10\cdot6^2\cdot1^3+5\cdot6\cdot1^4, 6)$

$$6\cdot\frac{2550}{6}$$

$=6*425$

factorOut$(10\cdot6^2\cdot1^3+5\cdot6\cdot1^4, 6)$

$$6\cdot\frac{390}{6}$$

$=6*65$

factorOut$(5\cdot6\cdot1^4, 6)$

$$6\cdot\frac{30}{6}$$

$=6*5$

Täten
$x = 6(2801a_5+1505a_4+425a_3+65a_2+5a_1)+(a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0)$
ja x on jaollinen kuudella, jos ja vain jos summan jälkimmäinen termikin $(a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0)$ on jaollinen kuudella.

mot

12. Italialainen Fibonacci laski vuonna 1225 yhtälön $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ juurelle likiarvon $x \approx 1{,}368808108$.

a) Osoita, että yhtälöllä on täsmälleen yksi juuri reaalilukujen joukossa.

b) Kuinka mones Newtonin menetelmän iterointikierros tuottaa ensimmäisen kerran samat yhdeksän desimaalia kuin Fibonaccin likiarvossa, kun alkuarvona on $x_0 = 1$?

Ratkaisu:

a) Tutkitaan funktiota derivaatan avulla

$$\frac{d}{dx}(x^3+2x^2+10x-20)$$

$$3\cdot x^2+4\cdot x+10$$

Derivaattafunktion nollakohdat:

solve$(3\cdot x^2+4\cdot x+10=0, x)$

No Solution

Derivaatalla ei ole nollakohtia.

Koska 3. asteen polynomifunktio on kaikkialla jatkuva, se saa kaikki arvot $]-\infty,\infty[$ eikä kyseisellä polynomifunktiolla ole paikallisia ääriarvoja, on se aidosti monotoninen ja sillä on vain yksi reaalinen juuri.

b) Lasketaan Newtonin menetelmällä yhtälön juuria alkuarvauksesta $x_0=1$ lähtien:

Define $f(x)=x^3+2x^2+10x-20$

done

Define $f'(x)=\frac{d}{dx}(f(x))$

done

$1 \Rightarrow x$

1

$x-\frac{f(x)}{f'(x)}|x=ans$

1.411764706

$x-\frac{f(x)}{f'(x)}|x=ans$

1.369336471

$x-\frac{f(x)}{f'(x)}|x=ans$

1.368808189

$x-\frac{f(x)}{f'(x)}|x=ans$

1.368808108

$x-\frac{f(x)}{f'(x)}|x=ans$

1.368808108

Kysytyn tarkkuuden laskemiseen riittää neljä iterointikierrosta.

13. a) Osoita erotusosamäärää tutkimalla, että funktio

$$f(x)=\frac{x}{1+|x|}$$

on derivoituva kohdassa $x=0$.

b) Olkoon $g(x)=f'(x)$, kun $x\in\mathbf{R}$. Osoita erotusosamäärää tutkimalla, ettei funktio $g(x)$ ole derivoituva kohdassa $x=0$.

Ratkaisu:

a) Funktio on derivoituva kohdassa a jos sen erotusosamäärällä on raja-arvo kohdassa a. Muodostetaan funktion erotusosamäärä ja lasketaan sen raja-arvo kohdassa x=0.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{1+|x|}-\frac{0}{1+|0|}}{x-0}\right)$$

$$1$$

Koska erotusosamäärällä on raja-arvo kohdassa x=0, on funktio derivoituva kohdassa x=0.

b) Lasketaan edellisen funktion derivaattafunktio positiivisille ja negatiivisille muuttujan arvoille ja lasketaan toispuoleiset raja-arvot:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+|x|}\right)\mid x>0$$

$$\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+|x|}\right)\mid x<0$$

$$\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(0+1)^2}}{x-0}\right)$$

$$-2$$

$$\lim_{x\to 0-}\left(\frac{\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(0-1)^2}}{x-0}\right)$$

$$2$$

Koska erotusosamäärällä ei ole raja-arvoa kohdassa x=0, niin funktio ei ole derivoituva kohdassa x=0.

***14.** Koirien kaksipäiväiseen HeinäHaukku-tapahtumaan ilmoittaudutaan joko lauantainäyttelyyn, sunnuntainäyttelyyn tai molempiin. Eräänä vuonna HeinäHaukkuun ilmoitettiin 1 372 koiraa, joista 31 ilmoitettiin vain lauantainäyttelyyn ja 43 vain sunnuntainäyttelyyn. Olkoon L tapahtuma "HeinäHaukkuun ilmoitettu koira ilmoitettiin lauantainäyttelyyn" ja S tapahtuma "HeinäHaukkuun ilmoitettu koira ilmoitettiin sunnuntainäyttelyyn".

a) Laske todennäköisyys $P(L$ ja $S)$ kyseisenä vuonna. (3 p.)

b) Miten todennäköisyyslaskennassa määritellään kahden tapahtuman riippumattomuus? (2 p.)

c) Ovatko L ja S riippumattomia kyseisenä vuonna? (2 p.)

d) Olkoot yleisesti a vain lauantaille ilmoitettujen koirien lukumäärä, b kummallekin päivälle ilmoitettujen lukumäärä ja c vain sunnuntaille ilmoitettujen lukumäärä. Millä lukuja a, b ja c koskevalla ehdolla tapahtumat L ja S ovat riippumattomia? (2 p.)

Ratkaisu:

a) Kysytty todennäköisyys P(L ja S) on

$$\frac{1372-31-43}{1372}$$

0.9460641399

$$\frac{649}{686}$$

0.9460641399

eli n. 95%.

b) Kaksi tapahtumaa ovat riippumattomia, mikäli toisen tapahtuminen ei vaikuta toisen todennäköisyyteen eli P(A ja B)=P(A)P(B).

c) Tutkitaan tapahtumien riippumattomuus soveltamalla b-kohdan perustelua laskuun P(L)P(S):

$$\frac{1372-31}{1372}*\frac{1372-43}{1372}$$

0.9467722845

Koska tulos poikkeaa a-kohdan vastauksesta, tapahtumat eivät ole riippumattomia.

d) Sovelletaan b-kohdan sääntöä määrille a, b ja c. Mikäli L ja S ovat riippumattomia, pätee $\frac{b}{a+b+c}=\frac{b+a}{a+b+c}*\frac{b+c}{a+b+c}$. Kertomalla ristiin saadaan yhtälö $b*(a+b+c)^2=(b+a)*(b+c)*(a+b+c)$, josta edelleen jakamalla puolittain luvulla $(a+b+c)\neq 0$ saadaan yhtälö $b*(a+b+c)=(b+a)*(b+c)$. Siirtämällä termit samalle puolelle ja ratkaisemalla yhtälö eri muuttujien suhteen saadaan

solve(b*(a+b+c)−(b+a)*(b+c)=0, a)

{a=0}

solve(b*(a+b+c)−(b+a)*(b+c)=0, c)

{c=0}

solve(b*(a+b+c)−(b+a)*(b+c)=0, b)

No Solution

Siis joko a=0 tai c=0. Luvun b ainoa ehto on $b\geq 0$.

***15.** Tarkastellaan summaa $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

a) Laske summat, kun $n=1,2,\ldots,5$, ja muodosta niiden perusteella arvaus summan arvolle ylärajan n funktiona. (2 p.)

b) Määritä sellaiset kertoimet $A\in\mathbf{R}$ ja $B\in\mathbf{R}$, että kaava

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}$$

on voimassa kaikilla $k\geq 1$. (2 p.)

c) Todista a-kohdassa arvaamasi lauseke oikeaksi käyttämällä b-kohdan kaavaa. (4 p.)

d) Määritä raja-arvo $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$. (1 p.)

Ratkaisu:

a) Lasketaan summat n=1, 2, 3, 4, 5

$$\sum_{k=1}^{1}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)$$

$$\frac{2}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)$$

$$\frac{3}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)$$

$$\frac{4}{5}$$

$$\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)$$

$$\frac{5}{6}$$

Yleisessä muodossa summalauseke on

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)$$

$$\frac{n}{n+1}$$

b) Käytetään osamurtohajotelmaa vakioiden A ja B löytämiseksi:

$$\text{expand}\left(\frac{1}{k(k+1)}, k\right)$$

$$\frac{-1}{k+1}+\frac{1}{k}$$

josta saadaan A=1 ja B=−1.

c) Sovelletaan saatuja lukuja, jolloin summakaava saadaan muotoon $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-1}{k+1}+\frac{1}{k}\right)$. Lasketaan summa tästä muodosta

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-1}{k+1}+\frac{1}{k}\right)$$

$$\frac{n}{n+1}$$

jolloin voidaan todeta sen olevan sama a-kohdan vastauksen kanssa.

d) Raja-arvo on

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)\right)$$

$$1$$