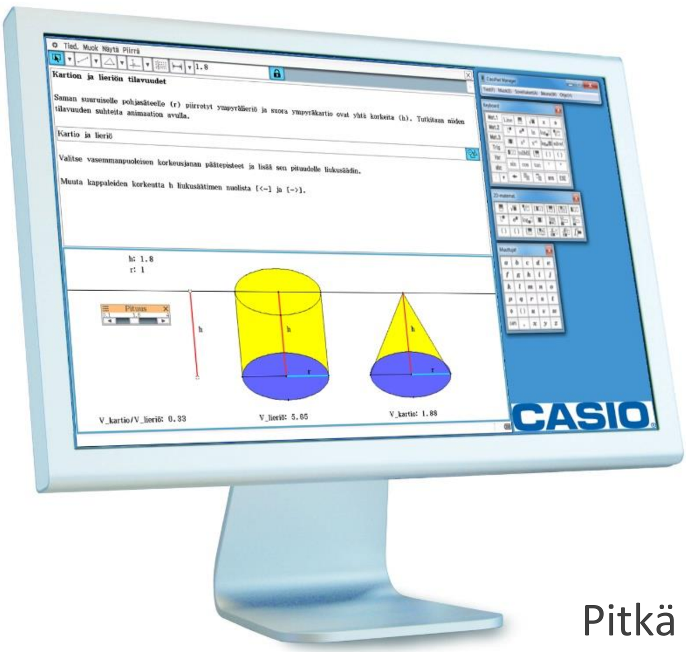


LASKE LAUDATUR CLASSPADILLA

Pitkä matematiikka, kevät 2019

Tiivistelmä

Kevään 2019 sähköisten yo-kokeiden ratkaisut ClassPad Managerilla laskettuina. Laskujen tiedostot ovat ladattavissa Casion tukisivuilta osoitteesta https://www.casio-laskimet.fi

Pepe Palovaara

pepe.palovaara@casio.fi

Hyvä lukija,

Ensimmäinen täysin sähköinen matematiikan yo-koe on tehty! Kokeen rakenne oli entisellään, tosin pisteytys tehtävää kohden muuttui 6:sta 12:een mahdollistaen perustelujen aiempaa tarkemman pisteytyksen. Näin kokeen ohje asian kiteyttää:

”Koe koostuu 13 tehtävästä, joista vastataan kymmeneen. Tehtävät on jaettu kolmeen osaan. A-osassa on neljä kaikille pakollista tehtävää. B1-osassa on viisi tehtävää, joista vastataan kolmeen. B2-osassa on neljä tehtävää, joista vastataan kolmeen. Kaikki tehtävät arvostellaan pistein 0–12, joten kokeen maksimipistemäärä on 120.”

Mukana oli myös tehtäviin liittyviä aineistoja. Tämä vihkonen on ladattavissa pdf-muodossa ja kaikki tehtävien ratkaisut ovat saatavilla myös ClassPadin tiedostoina (.xcp) Casion kotisivuilta. ClassPadin tiedostot aukeavat suoraan eActivity -sovellukseen kaksoisklikkaamalla. Tiedostoja voidaan hyödyntää myös esim. Abitti-kokeissa, tehtävien palautuksessa sähköiseen oppimisympäristöön tai jaettuun resurssiin (pilvipalveluun). Tukesi löytyy osoitteesta

http://www.casio-laskimet.fi

Casio Academy – videot soittolistalla

Tänä keväänä jo 4. kertaa pidetyssä Casio Academy -harjoittelupäivässä opiskelijoilla oli mahdollisuus harjoitella matematiikan yo-kokeisiin netin välityksellä matematiikan opettajien kera. Opiskelijoiden tukeminen ja opinnoissa auttaminen on meille tärkeää. Aiemmat malliratkaisut löytyvät tallenteina YouTubesta

https://bit.ly/casio-academy

ClassPad-perhe

Abitti-kokeen B-osan tehtävissä on käytössä ClassPad Manager, jolla tämän vihkon ratkaisutkin on laadittu. Casion uusi selainpohjainen CAS-ohjelma ClassPad.net sopii jo hyvin sähköisten kokeiden ratkaisemiseen, matematiikan opettamisen välineeksi ja - ennen kaikkea - matematiikan hahmottamiseen ja oppimiseen. Kannattaa testata ohjelmaa jo syksyn MAY1-kurssilla!

Mukavia hetkiä sähköisten yo-kokeiden ratkaisujen parissa!

Espoossa 2.4.2019

Pepe Palovaara

Nordic School Coordinator
Casio Scandinavia

CASIO

A-osa

Ratkaise kaikki tämän osan tehtävät 1–4.

1. Lukujonojen määritelmiä (12 p.)

Aineisto:
1.A Luettelo: Lukujonot A–G

Yhdistä kukin lukujonon määritelmä 1.1.–1.6. siihen jonoon A–G, joka määritelmän perusteella saadaan. Kaikki jonot alkavat jäsenestä a_1, ja yksi vastausjono jää käyttämättä. Vastauksia ei tarvitse perustella.

1.1. $a_n = 2n - 1$ C. (1, 3, 5, 7, ...) (2 p.)

1.2. $a_n = n^2$ D. (1, 4, 9, 16, ...) (2 p.)

1.3. $a_n = n^3$ E. (1, 8, 27, 64, ...) (2 p.)

1.4. $a_n = 2^n$ G. (2, 4, 8, 16, ...) (2 p.)

1.5. $a_1 = 2$ ja $a_n = a_{n-1} + 2$, kun $n \geq 2$ F. (2, 4, 6, 8, ...) (2 p.)

1.6. $a_1 = 1, a_2 = 2$ ja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, kun $n \geq 3$ B. (1, 2, 3, 5, ...) (2 p.)

2. Vektorien pistetulo (12 p.)

Määritä sellainen vektori $\overline{c} = a\,\overline{i} + b\,\overline{j}$, että $\overline{c} \cdot (\overline{i} + \overline{j}) = 2$ ja $\overline{c} \cdot (\overline{i} - \overline{j}) = 3$.

Lasketaan annetut pistetulot, jolloin saadaan ehdot a+b=2 ja a−b=3. Ratkaistan näiden muodostama yhtälöpari:

$\begin{cases} a+b=2 \\ a-b=3 \end{cases} \Big|_{a,\,b}$ ‖ lasketaan yhtälöt yhteen

$2a=5$ ‖ jaetaan luvulla 2

$a=\frac{5}{2}$ ‖ sijoitetaan saatu arvo ensimmäiseen yhtälöön

$\frac{5}{2}+b=2$ ‖ vähennetään $\frac{5}{2}$

$b=-\frac{1}{2}$

Vastaus on vektori $\frac{5}{2}i-\frac{1}{2}j$, missä i ja j ovat akselien x ja y suuntaiset yksikkövektorit.

3. Luonnollinen logaritmi (12 p.)

Selvitä, kumpi lauseke on suurempi muuttujan arvoilla $x > 1$:

$$\ln(2x+1) - \ln(2x) \quad \text{vai} \quad \ln(x+1) - \ln x\,.$$

Sovelletaan logaritmin laskusääntöjä:

$\ln(2x+1)-\ln(2x)$ ‖ samankantaisten logaritmien erotus

$=\ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right)$ ‖ jaetaan numerus termeittäin

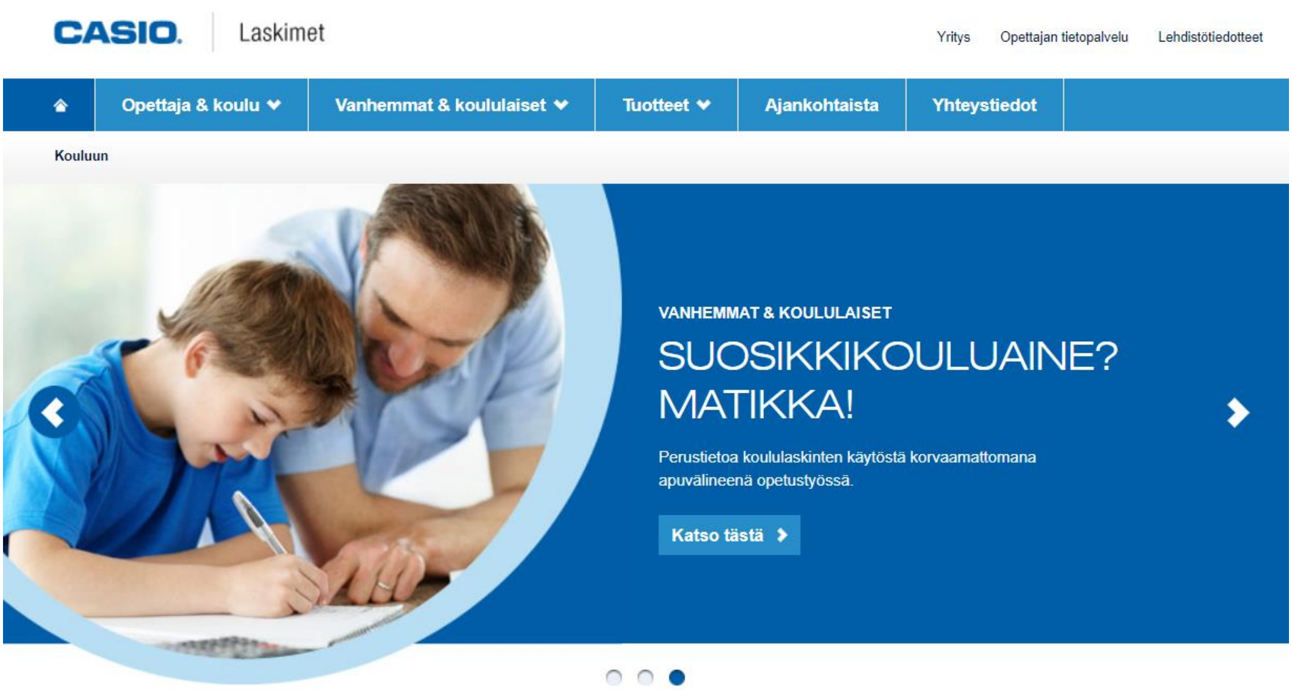
$=\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$

$\ln(x+1)-\ln(x)$ ‖ samankantaisten logaritmien erotus

$=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ ‖ jaetaan numerus termeittäin

$=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

Logaritmifunktio on aidosti kasvava, joten se saa sitä suurempia arvoja, mitä suurempi on numerus. Kun $x>1$, niin $1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{2x}$. Täten myös $\ln(x+1)-\ln(x)>\ln(2x+1)-\ln(2x)$.



http://www.casio-laskimet.fi

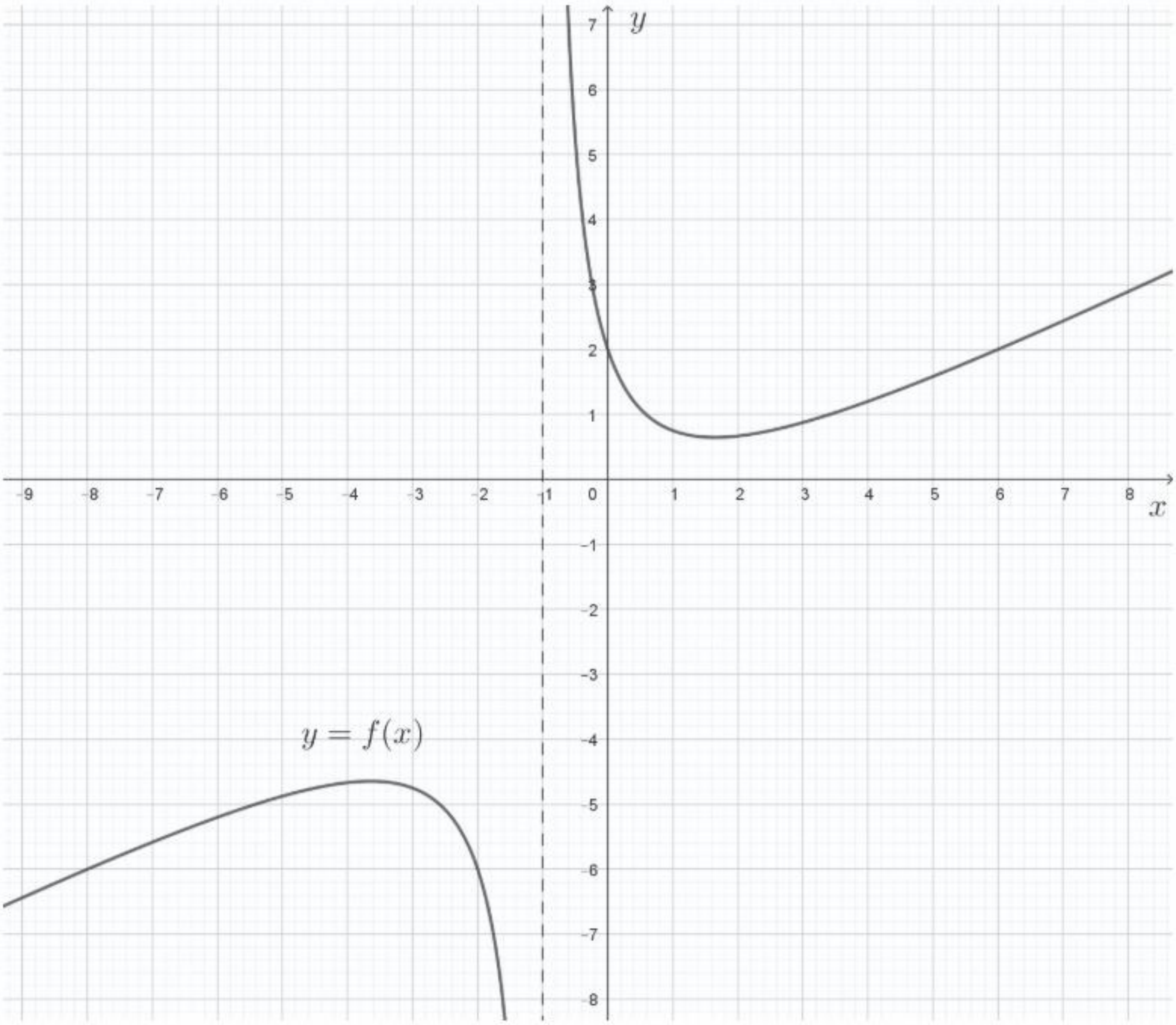
Aineisto:
4.A Kuva: Rationaalifunktion kuvaaja

Kuvassa 4.A on esitetty muotoa

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{2x + d}$$

olevan funktion kuvaaja $y = f(x)$, kun kertoimet a, b, c, ja d ovat kokonaislukuja.

Päättele kuvaajan perusteella kertoimien arvot ja selitä sanallisesti, miten päädyit ratkaisuun.



Lähde: YTL.

Kohdassa $x=-1$ kuvaajalla on pystysuora asymptootti, joka on sellainen nimittäjän nollakohta, jota ei voi supistaa. Siis nimittäjä $2x+d=0$, kun $x=-1$. Tästä saadaan yhtälö $2(-1)+d=0$, joen $d=2$.

Kuvaaja leikkaa y–akselin pisteessä $(0,2)$, joten saadaan yhtälö $\frac{a*0^2+b*0+c}{2*0+d}=2$. Tästä saadaan ehto $\frac{c}{d}=2$ ja sijoittamalla tähän $d=2$ saadaan $\frac{c}{2}=2$, joten $c=4$.

Kuvaajalla on pisteet $(-2,-6)$ ja $(6,2)$, joten näiden pisteiden koordinaatit toteuttavat funktion kuvaajan yhtälön. Saadaan ehdot $\frac{a*(-2)^2+b*(-2)+4}{2*(-2)+2}=-6$ ja $\frac{a*(6)^2+b*(6)+4}{2*(6)+2}=2$, joiden muodostamasta yhtälöryhmästä saadaan ratkaistua a ja b:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{4a-2b+4}{-2}=-6\\ \frac{36a+6b+4}{14}=2\end{array}\right|_{a,b} \quad \text{∥ kerrotaan yhtälöissä nimittäjillä puolittain}$$

$$\left\{\begin{array}{l}4a-2b+4=12\\ 36a+6b+4=28\end{array}\right|_{a,b} \quad \text{∥ sievennetään yhtälöitä}$$

$$\left\{\begin{array}{l}4a-2b=8\\ 36a+6b=24\end{array}\right|_{a,b} \quad \text{∥ kerrotaan ylempi yhtälö 3:lla ja lasketaan yhteen}$$

$48a=48$ ∥ jaetaan 48:lla

$a=1$ ∥ sijoitetaan arvo aiempaan yhtälöön

$4*1-2b=8$ ∥ vähennetään 4

$-2b=4$ ∥ jaetaan (−2):lla

$b=-2$

Kertoimet ovat $a=1$, $b=-2$, $c=4$ ja $d=2$.

Opiskelijoiden tukena.

Katso tallenteet

bit.ly/casio-academy

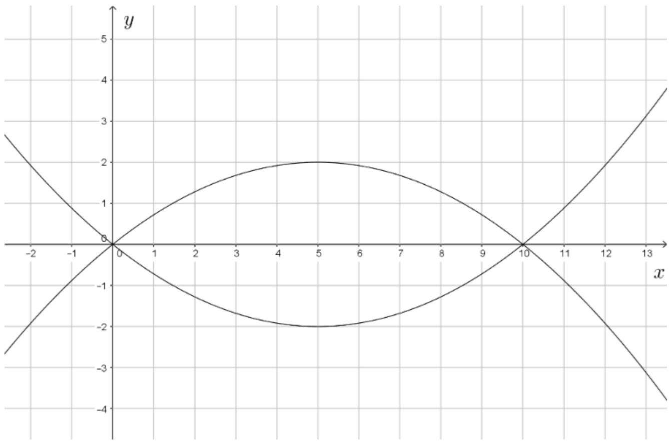
B1-osa Ratkaise kolme tehtävistä 5–9.

5. Paraabeleja pohjapiirroksessa (12 p.)

Aineisto:
5.A Kuva: Kalevalakehto
5.B Kuva: Koordinaatistopiirros

Suomalais-amerikkalainen arkkitehtiopiskelijaryhmä rakensi Helsingin Seurasaareen Kalevalakehto-nimisen rakennuksen (aineisto 5.A). Tulos oli niin onnistunut, että on keskusteltu toisenkin samantapaisen rakennuksen rakennuttamisesta. Uuden rakennuksen pohjan muotoa kuvaavat vastakkaisiin suuntiin aukeavat paraabelit, kuten koordinaatistopiirroksessa (aineisto 5.B). Pohjan pituus on 10 metriä ja leveys 4 metriä.

5.1. Muodosta paraabelien yhtälöt. (6 p.)
5.2. Laske rakennuksen pohjan pinta-ala. (6 p.)



a) Sijoitetaan ylöspäin avautuvan paraabelin huippu $(5,-2)$ ja käyrän pisteenä origo $(0,0)$ paraabelin huippumuotoiseen yhtälöön, jolloin yhtälö saadaan muotoon $0-(-2)=a\cdot(0-5)^2$. Ratkaistaan tästä yhtälöstä 2. asteen termin kertoimeksi $a=\frac{2}{25}$, jolloin paraabelin yhtälöksi saadaan $y=\frac{2\cdot x^2}{25}-\frac{4\cdot x}{5}$.

Ratkaistaan alaspäin avautuvan paraabelin yhtälö samoin pisteen $(0,0)$ ja huipun $(5,2)$ avulla. Nyt yhtälöstä $0-2=a\cdot(0-5)^2$ saadaan ratkaistua kerroin $a=-\frac{2}{25}$ ja paraabelin yhtälöksi saadaan $y=\frac{-2\cdot x^2}{25}+\frac{4\cdot x}{5}$.

b) Pohjan pinta-ala on paraabelien rajaama, joten se voidaan laskea määrätyn integraalin avulla. Paraabelit leikkaavat muuttujan x arvoilla 0 ja 10, joten pinta-ala saadaan laskemalla erotusfunktion itseisarvon integraali tällä välillä: $\int_0^{10}\left|\frac{-2\cdot x^2}{25}+\frac{4\cdot x}{5}-\left(\frac{2\cdot x^2}{25}-\frac{4\cdot x}{5}\right)\right|dx=\frac{80}{3}m^2\approx 26.7m^2$.

6. Shakkilauta ja riisinjyvät (12 p.)

Shakkilaudassa on 8×8 ruudukko ja sitä ympäröi 5 cm leveä harmaa reuna. Ruudukon joka toinen ruutu on valkoinen ja joka toinen musta. Laudan koko reunoineen on 50 cm $\times$ 50 cm.

Laudalle pudotetaan satunnaisesti 30 riisinjyvää. Kuinka suurella todennäköisyydellä vähintään 15 riisinjyvän keskipiste osuu valkoiseen ruutuun?

Valkoisten ruutujen yhteisen pinta-alan osuus koko laudan pinta-alasta on $\dfrac{\frac{1}{2}*(50-2*5)*(50-2*5)}{50*50}=\dfrac{8}{25}$, mikä on yhden jyvän valkoiselle ruudulle osumisen todennäköisyys.

Koska jyvät pudotetaan satunnaisesti, ovat riisinjyvien osumistodennäköisyydet toisistaan riippumattomia ja tehtävä voidaan ratkaista binomitodennäköisyyden avulla. Lasketaan P("vähintään 15 jyvää osuu valkoiselle ruudulle")

$$=\mathrm{nCr}(30,15)*\left(\frac{8}{25}\right)^{15}*\left(1-\frac{8}{25}\right)^{30-15}$$
$$+\mathrm{nCr}(30,16)*\left(\frac{8}{25}\right)^{16}*\left(1-\frac{8}{25}\right)^{30-16}+...$$
$$+\mathrm{nCr}(30,30)*\left(\frac{8}{25}\right)^{30}*\left(1-\frac{8}{25}\right)^{30-30}$$
$$=0.0304972589...$$
$$\approx 0.03.$$

Vähintään 15 jyvää osuu valkoiselle ruudulle todennäköisyydellä n. 0.03.

$$\frac{\frac{1}{2}*(50-2*5)*(50-2*5)}{50*50}$$
$$\frac{8}{25}$$
$$\mathrm{binomialCDf}\left(15,30,30,\frac{8}{25}\right)$$
$$0.03049725895$$

ClassPadissa on nopeat komennot jakaumien arvojen laskemiselle. Tämänkin tehtävän ratkaisun voi puristaa yhdelle riville.

7. Polynomin itseisarvo (12 p.)

Anna esimerkki toisen asteen polynomista ax^2+bx+c, jolle yhtälöllä $|ax^2+bx+c|=4$ on täsmälleen kolme ratkaisua. Muista myös perustella, miksi esimerkilläsi on vaadittu ominaisuus.

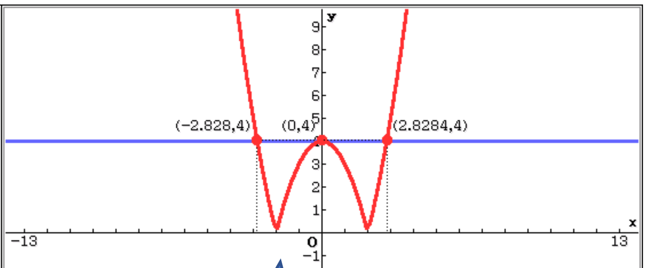
Vihje: Voi olla hyödyllistä piirtää tietokoneella funktion $f(x)=|ax^2+bx+c|$ kuvaaja kertoimien a, b ja c eri arvoilla.

Yhtälö voidaan tulkita niin, että paraabelin yhtälöstä otetun itseisarvon avulla saatu funktio leikkaa suoran y=4. Näitä leikkauspisteitä pitää nyt olla kolme.

Valitaan a>0, jolloin paraabeli avautuu ylöspäin. Sen kuvaaja kasvaa rajatta, kun x pienenee tai suurenee rajatta, joten parabeli leikkaa suoran y=4 tasan kahdessa pisteessä.

Kolmas leikkauspiste itseisarvofunktion ja suoran y=4 välille saadaan asettamalla paraabelin huipun y-koordinaatiksi −4. Itseisarvo peilaa tämän pisteen x-akselin yläpuolelle suoralle y=4.

Esimerkki ehdot täyttävästä funktiosta on x^2-4 (a=1, b=0 ja c=−4). Tarkistetaan tulos ratkaisemalla annettu yhtälö $|x^2-4|=4$ muuttujan x suhteen, jolloin saadaan leikkuspisteiden x-koordinaateiksi $x=0$, $x=-2\cdot\sqrt{2}$ ja $x=2\cdot\sqrt{2}$.



Kuvaajan avulla on helppo tarkistaa omien ajatusten oikeellisuus.

8. Kuinka monta nollaa? (12 p.)

Kuinka moneen nollaan päättyy luku

$$(10!)^{1\,000\,000} - (9!)^{1\,000\,000}\ ?$$

Otetaan yhteiseksi tekijäksi $(9!)^{1000000}$, jolloin luku on

$(9!)^{1000000}*(10^{1000000}-1^{1000000})=362880^{1000000}*(10^{1000000}-1)$

Koska $9!=362880$, on se jaollinen kymmenellä vain kerran.
Siten $(9!)^{1000000}$ päättyy miljoonaan nollaan.
Koska $10^{1000000}-1$ ei ole jaollinen kymmenellä, joten se ei päädy nollaan.
Täten koko alkuperäinen luku päättyy miljoonaan nollaan.

9. Veneen kulkema matka (12 p.)

Aineisto:
9.A Taulukko: Veneen nopeus

Matti seuraa moottoriveneen nopeusmittaria ja kirjaa veneen nopeuden 20 sekunnin välein. Tuloksena on taulukko 9.A.

Arvioi taulukon avulla veneen kulkemaa matkaa

$$s = \int_0^{200} v(t)\,dt$$

käyttämällä numeerisen integroinnin

9.1. puolisuunnikassääntöä (6 p.)
9.2. Simpsonin sääntöä. (6 p.)

9.A Taulukko: Veneen nopeus

aika *t*	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	sekuntia
nopeus *v(t)*	0	5	12	15	12	15	18	20	22	22	21	km/h

Lähde: YTL.

Muutetaan laskuissa taulukon nopeudet yksikköön m/s jakamalla ne luvulla 3.6.

Kun lukuihin sovelletaan puolisuunnikasmenetelmää, saadaan integraalin arvoksi ja veneen kulkemaksi matkaksi

$$\frac{200-0}{10*3.6}*\left(\frac{0}{2}+5+12+15+12+15+18+20+22+22+\frac{21}{2}\right)\approx 840\text{m}.$$

Simpsonin menetelmällä matkaksi saadaan

$$\frac{200-0}{10*3*3.6}*(0+4*5+2*12+4*15+2*12+4*15+2*18+4*20+2*22+4*22+21)\approx 850\text{m}.$$

10. Pohditaan sarjoja (12 p.)

10.1. Mikä seuraavassa päättelyssä on väärin?

$$\text{"Koska } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \text{ niin } \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = -1.\text{"}$$

(3 p.)

10.2. Määritä jokin sellainen luku $x \in \mathbf{R}$, että

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\tan(x))^n = \frac{3}{2}.$$

Anna vastaus radiaaneissa kolmen desimaalin tarkkuudella. (9 p.)

a) Jälkimmäinen on geometrinen sarja, joka ei suppene. Suhdeluku $q=2$ eikä sille päde suppenevuusehto $|q|<1$. Silti sarjan summan laskemisessa on käytetty suppenevan geometrisen sarjan summakaavaa.

b) Kyseessä on oltava suppeneva geometrinen sarja, koska sillä on äärellinen raja-arvo $\frac{3}{2}$. Suppenevan geometrisen sarjan summan avulla yhtälö saadaan muotoon $\frac{(\tan(x))^0}{1-\tan(x)}=\frac{3}{2}$ eli $\frac{1}{1-\tan(x)}=\frac{3}{2}$, josta edelleen ristiin kertomalla saadaan $2=3-3\tan(x)$. Tämä sievenee muotoon $\tan(x)=\frac{1}{3}$, josta saadaan ratkaistua yksi reaalinen arvo kolmen desimaalin tarkkuudella $x=\tan^{-1}(\frac{1}{3})=0.321750554...\approx 0.322$.

ClassPad tarjoaa sovelluksia matematiikan eri osa-alueille geometriasta lukujonoihin.

11. Trigonometrinen yhtälö (12 p.)

Olkoot

$$f(x) = \cos(x)^{\sin(x)}$$

ja

$$g(x) = \sin(x)^{\cos(x)},$$

kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Osoita, että yhtälöllä $f(x) = g(x)$ on täsmälleen yksi ratkaisu, ja määritä se.

Koska kulma on 1. neljänneksessä, $\sin(x)>0$ ja $\cos(x)>0$.

$f'(x)$

$=\ln(\cos(x))\cdot(\cos(x))^{\sin(x)+1}-(\cos(x))^{\sin(x)-1}\cdot(\sin(x))^2$

$=\ln(\cos(x))\cdot\cos(x)(\cos(x))^{\sin(x)}-(\cos(x))^{\sin(x)}\cdot\frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))}$

$=(\cos(x))^{\sin(x)}\left(\ln(\cos(x))\cdot(\cos(x))-\frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))}\right)$

<0 koko avoimella välillä $0<x<\frac{\pi}{2}$, sillä ko. välillä

a) $(\cos(x))^{\sin(x)}>0$

b) $\ln(\cos(x))<0$ ja $\cos(x)>0$, joten $\ln(\cos(x))\cdot(\cos(x))<0$

c) $\frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))}>0$, joten $\ln(\cos(x))\cdot(\cos(x))-\frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))}<0$

Siis, $f(x)$ on aidosti vähenevä funktio ko. välillä.

$g'(x)$

$=-\ln(\sin(x))\cdot(\sin(x))^{\cos(x)+1}+(\cos(x))^2\cdot(\sin(x))^{\cos(x)-1}$

$=-\ln(\sin(x))\cdot\sin(x)\cdot(\sin(x))^{\cos(x)}+\frac{(\cos(x))^2}{\sin(x)}\cdot(\sin(x))^{\cos(x)}$

$=(\sin(x))^{\cos(x)}\left(-\ln(\sin(x))\cdot\sin(x)+\frac{(\cos(x))^2}{\sin(x)}\right)$

>0 koko avoimella välillä $0<x<\frac{\pi}{2}$, sillä ko. välillä

d) $(\sin(x))^{\cos(x)}>0$

e) $\ln(\sin(x))<0$, joten $-\ln(\sin(x))>0$ ja $-\ln(\sin(x))\cdot\sin(x)>0$

f) $\frac{(\cos(x))^2}{\sin(x)}>0$, joten $-\ln(\sin(x))\cdot\sin(x)+\frac{(\cos(x))^2}{\sin(x)}>0$

Siis, $g(x)$ on aidosti kasvava funktio ko. välillä.

Täten yhtälöllä $f(x)=g(x)$ voi olla korkeintaan yksi ratkaisu.

Molemmat funktiot f ja g ovat jatkuvia annetulla välillä. Koska $f(0.1)\approx 1.0 > g(0.1)\approx 0.1$ ja $f(1)\approx 0.6 < g(1)\approx 0.9$, niin käyrien on leikattava toisensa vähintään kerran annetun avoimen välin osavälillä $0.1<x<0.9$.

Ehdoista seuraa, että yhtälöllä $f(x)=g(x)$ on tasan yksi ratkaisu annetulla välillä.

Laskimella ratkaisuksi saadaan $\frac{\pi}{4}\approx 0.79$.

12. Kolmion piirin ja pinta-alan suhde (12 p.)

Aineisto:
12.A Tiedosto: Dynaaminen kolmio

Erään kolmion piiri on p ja sen pinta-ala on A. Toisen, tasasivuisen kolmion piiri on myös p ja sen pinta-ala on B. Osoita, että $A \leq B$.

Voit käyttää aineistoa 12.A tehtävän tilanteen hahmottamiseksi, mutta tämä ei ole välttämätöntä ratkaisun kannalta. Muista myös, että pelkät kokeilut eivät riitä matemaattisen väitteen perusteluksi.

Heronin kaavalla kolmion pinta-ala on $A=\sqrt{s*(s-a)*(s-b)*(s-c)}$, missä $s>0$ on piirin p puolikas ja a, b ja c kolmion sivujen pituudet. Nyt $c=2s-a-b$ ja $A=\sqrt{s*(s-a)*(s-b)*(s-2s+a+b)}=\sqrt{s*(s-a)*(s-b)*(a+b-s)}$.

Pinta-alan derivaatta sivun a suhteen on $\frac{d}{da}\left(\sqrt{s*(s-a)*(s-b)*(a+b-s)}\right)=\frac{s\cdot(b-s)\cdot(2\cdot a+b-2\cdot s)}{2\cdot\sqrt{s\cdot(a+b-s)\cdot(a-s)\cdot(b-s)}}$, jonka ainoa nollakohta on $(2\cdot a+b-2\cdot s)=0$ on oltava paikallinen maksimikohta.

Vastaavasti pinta-alan derivaatta sivun b suhteen on $\frac{d}{db}\left(\sqrt{s*(s-a)*(s-b)*(a+b-s)}\right)=\frac{s\cdot(a+2\cdot b-2\cdot s)\cdot(a-s)}{2\cdot\sqrt{s\cdot(a+b-s)\cdot(a-s)\cdot(b-s)}}$
Tämä saa arvon 0, kun $(a+2\cdot b-2\cdot s)=0$ ja on paikallinen maksimikohta.

Ratkaisemalla derivaattojen muodostama yhtälöpari $\begin{cases}(a+2\cdot b-2\cdot s)=0\\(2\cdot a+b-2\cdot s)=0\end{cases}\Bigg|_{a,\,b}$ saadaan ratkaisuksi $a=\frac{2\cdot s}{3}$ ja $b=\frac{2\cdot s}{3}$.
Tällöin kolmas sivu $c=\frac{2\cdot s}{3}$ ja kolmio on täten tasasivuinen. Jokainen sivu on siis $a=b=c=\frac{p}{3}$.

Suurin mahdollinen monikulmion pinta-ala annetulla piirillä saadaan aina säännölliselle monikulmiolle.

13. Epäyhtälöitä (12 p.)

13.1. Olkoot $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$. Osoita, että $2a_1a_2 \le a_1^2 + a_2^2$. (3 p.)

13.2. Olkoot $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$. Osoita, että

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^4\right)^{\frac{1}{4}}.$$

(9 p.)

a) Koska $(a_1-a_2)^2=a_1^2-2a_1a_2+a_2^2\ge 0$, niin pätee $a_1^2+a_2^2\ge 2a_1a_2$.

b) Muokataan epäyhtälöä:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2)\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k^4)\right)^{\frac{1}{4}} \quad \| \text{ Korotetaan puolittain potenssiin 4}$$

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2)\right)^{2} \le \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k^4)\right)^{1} \quad \| \text{ Kerrotaan puolittain luvulla } n^2$$

$$n^2\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2)\right)^{2} \le \frac{n^2}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k^4) \quad \| \text{ Tulon potenssisääntö}$$

$$\frac{n^2}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k^2)\right)^{2} \le n\sum_{k=1}^{n}(a_k^4) \quad \| \text{ Osamäärän potenssisääntö}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k^2)\right)^{2} \le n\sum_{k=1}^{n}(a_k^4) \quad \| \text{ Sijoitetaan } a_k^2=b_k$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)\right)^{2} \le n\sum_{k=1}^{n}(b_k^2) \quad \| \text{ Avataan summan rakennetta}$$

$$b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2+2b_1b_2+2b_1b_3+\ldots+2b_1b_n+2b_2b_3+\ldots 2b_2b_n+\ldots+2b_{n-1}b_n\le nb_1^2+nb_2^2+\ldots+nb_n^2$$

$$2b_1b_2+2b_1b_3+\ldots+2b_1b_n+2b_2b_3+\ldots 2b_2b_n+\ldots+2b_{n-1}b_n\le(n-1)b_1^2+(n-1)b_2^2+\ldots+(n-1)b_n^2$$

$$0\le(n-1)b_1^2-2b_1b_2+(n-1)b_2^2+(n-1)b_1^2-2b_1b_3+(n-1)b_3^2+\ldots+(n-1)b_{n-1}^2-2b_{n-1}b_n+(n-1)b_n^2 \quad \| :(n-1)>0$$

$$0\le b_1^2-\frac{2b_1b_2}{n-1}+b_2^2+b_1^2-\frac{2b_1b_3}{n-1}+b_3^2+\ldots+b_{n-1}^2-\frac{2b_{n-1}b_n}{n-1}+b_n^2$$

Koska $-\frac{2b_1b_2}{n-1}\le 0$, niin luku pienenee poistamalla nimittäjä $n-1>0$. Siis

$$0\le b_1^2-2b_1b_2+b_2^2+b_1^2-2b_1b_3+b_3^2+\ldots+b_{n-1}^2-2b_{n-1}b_n+b_n^2\le b_1^2-\frac{2b_1b_2}{n-1}+b_2^2+b_1^2-\frac{2b_1b_3}{n-1}+b_3^2+\ldots+b_{n-1}^2-\frac{2b_{n-1}b_n}{n-1}+b_n^2$$

$$0\le(b_1-b_2)^2+(b_1-b_3)^2+\ldots+(b_{n-1}-b_n)^2,$$

mikä on a-kohdan todistuksen nojalla tosi.