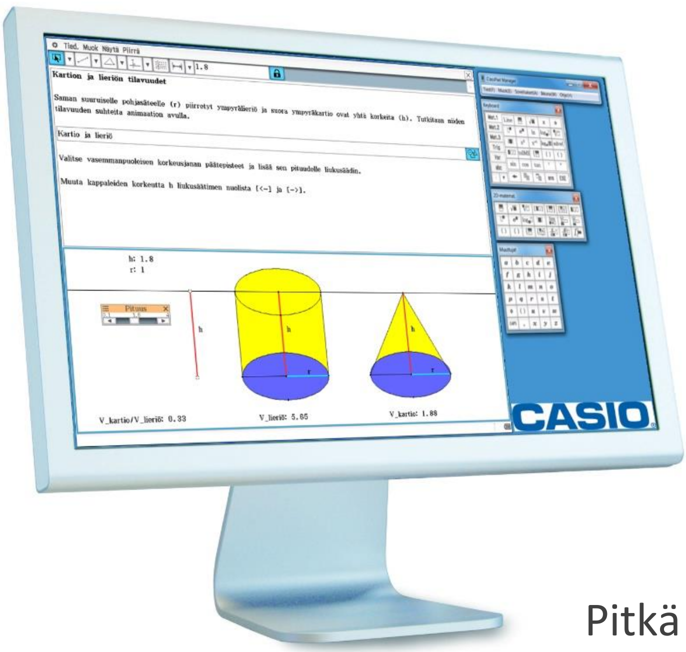


LASKE LAUDATUR CLASSPADILLA

Pitkä matematiikka, syksy 2018

Tiivistelmä

Syksyn 2018 yo-kokeiden ratkaisut ClassPad Managerilla laskettuina. Laskujen tiedostot ovat ladattavissa Casion tukisivuilta osoitteesta https://www.casio-laskimet.fi

Pepe Palovaara

pepe.palovaara@casio.fi

Hyvä lukija,

Käsissäsi on viimeinen paperille vastattu matematiikan yo-koe! Keväästä 2019 alkaen vastausvälineenä niin A- kuin B-osan tehtäviinkin on tietokone. Toki suttupaperia saa käyttää ja B-osassa laskinkin saa olla mukana. Vastaukset kuitenkin siirretään YTL:n sähköiseen vastauskenttään Abitissa.

A-osion tehtävien ratkaisut tätä vihkoa varten on tehty ClassPadin avulla, vaikka kokelaat tekivätkin ne käsin ja ilman laskinta. A-osassa eActivity-sovellusta on käytetty vain teksti- ja matematiikka-editorina eikä sen avulla ole ratkaistu mitään laskuja. Tämä vastaa käsin paperille tehtyjä ratkaisuja. B-osiossa on hyödynnetty CAS-laskentaa.

Tämä vihkonen on ladattavissa pdf-muodossa ja kaikki tehtävien ratkaisut ovat saatavilla myös ClassPadin tiedostoina (.xcp) Casion kotisivuilta. ClassPadin tiedostot aukeavat suoraan eActivity -sovellukseen kaksoisklikkaamalla ja niitä voi vapaasti muokata. Tiedostot voidaan myös siirtää laskimeen. Tukesi pähkinänkuoressa löytyy osoitteesta

http://www.casio-laskimet.fi

Casio Academy – videot soittolistalla

Syksyllä 2017 Casio avasi uuden palvelun, jossa opiskelijoilla on mahdollisuus harjoitella matematiikan yo-kokeisiin netin välityksellä matematiikan opettajien kera. Harjoitellaan yhdessä kokeiden tehtäviä ja lasketaan esimerkkejä lukiomatematiikasta. Opiskelijoiden tukeminen ja opinnoissa auttaminen on meille tärkeää. Viimeisimmät malliratkaisut löytyvät tallenteina YouTubesta osoitteesta

https://bit.ly/casio-academy

ClassPad Manager (Win, Mac, iOS, Android)

Siirtyminen ClassPadin kämmenlaitteesta fx-CP400 tietokoneohjelman ClassPad Manager käyttöön ei vaadi käyttäjältä kummoisia toimia. Laskin itsessään on jo kuin tablettilaite: suuri kosketusnäyttö, näkymä vaakaan ja pystyyn, käyttö sormella tai kosketuskynällä, komennot alasvetovalikoista, jne. Nyt työtilan kooksi saadaan koko näyttö ja tiedostojen siirtely on nopeampaa!

Mukavia hetkiä syksyn 2018 yo-ratkaisujen parissa!

Espoossa 1.10.2018

Pepe Palovaara

Nordic School Coordinator
Casio Scandinavia

A-osa

Ratkaise kaikki tämän osan tehtävät 1–4. Tehtävät arvostellaan pistein 0–6. Kunkin tehtävän ratkaisu kirjoitetaan tehtävän alla olevaan ruudukkoon. Vastausta voi tarvittaessa jatkaa erillisellä puoliarkilla. Apuvälineenä saat käyttää taulukkokirjaa. Laskimen käyttö ei ole sallittua sinä aikana, kun tämä koevihko on hallussasi. Koevihko ja mahdolliset A-osan erilliset vastausarkit on palautettava viimeistään kolmen tunnin kuluttua kokeen alkamisesta lukion määräämällä tavalla.

1. a) Ratkaise epäyhtälö $x^2 \leq 4$.

b) Mitkä luvut $x \in \mathbf{R}$ toteuttavat molemmat epäyhtälöt $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ ja $x^2 - 4 \leq 0$?

Tied. Muok Lisää Toiminto

a) Ratkaistaan epäyhtälö $x^2 \leq 4$

$x^2 \leq 4$ | siirretään vakio vasemmalle puolelle

$x^2 - 4 \leq 0$ | ratkaistaan vastaavan yhtälön nollakohdat

$x^2 - 4 = 0$

$x = \pm 2$ | tehdään merkkikaavio

		-2		2	
x^2-4	+++	|	−−−	|	+++

$y = x^2 - 4$ on ylöspäin avautuva paraabeli

Epäyhtälö on voimassa, kun $-2 \leq x \leq 2$.

b) Ratkaistaan epäyhtälö $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ ja yhdistetään sen vastaus a-kohdan vastauksen kanssa:

$x^2 - 4x + 3 \leq 0$ | ratkaistaan vastaavan yhtälön nollakohdat

$x^2 - 4x + 3 = 0$ | täydennetään neliöksi

$(x-2)^2 = -3 + 2^2$ | otetaan puolittain neliöjuuri

$x - 2 = \pm 1$

$x = 3$ tai $x = 1$ | tehdään merkkikaavio

		1		3	
x^2-4x+3	+++	|	−−−	|	+++

$y = x^2 - 4x + 3$ on ylöspäin avautuva paraabeli

Epäyhtälö on voimassa, kun $1 \leq x \leq 3$.

Yhdistettynä a-kohdan vastauksen kanssa tämä on $1 \leq x \leq 2$.

2. a) Sievennä lauseke $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$, kun $x \neq 0$ ja $x \neq -1$.

b) Aseta luvut $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ ja $\sqrt[5]{5}$ suuruusjärjestykseen ja perustele vastauksesi.

Tied. Muok Lisää Toiminto

a) Sievennetään lauseke laventamalla murtolausekkeiden laskut samannimisiksi:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{\frac{x+1}{x}}=\frac{1}{1+x}+\frac{x}{x+1}=\frac{1+x}{1+x}=1$$

b) Muutetaan juuren indeksit samoiksi murtopotenssien avulla. Pienin yhteinen monikerta juurten indekseille 2, 3 ja 5 on 30.

$$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{15}{30}}=\sqrt[30]{2^{15}}=\sqrt[30]{32768}$$

$$\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{10}{30}}=\sqrt[30]{3^{10}}=\sqrt[30]{59049}$$

$$\sqrt[5]{5}=5^{\frac{1}{5}}=5^{\frac{6}{30}}=\sqrt[30]{5^{6}}=\sqrt[30]{15625}$$

Koska parillinen juuri on aidosti kasvava funktio, se säilyttää suuruusjärjestyksen. Luvut pienimmästä suurimpaan ovat $\sqrt[30]{15625}<\sqrt[30]{32768}<\sqrt[30]{59049}$.

Opiskelijoiden tukena. Katso tallenteet bit.ly/casio-academy

3. Laske integraalit **a)** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{3+x}\,dx$ ja **b)** $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{2|x|}\,dx$.

Tied. Muok Lisää Toiminto

a) Integroitava lauseke on muotoa $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ eli nimittäjän derivaatta on suoraan osoittajassa.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{3+x}dx = \ln(3+1) - \ln(3-1) = \ln\left(\frac{4}{2}\right) = \ln(2).$$

b) Koska integroitava lauseke muuttuu integroimisvälillä kohdassa $x=0$, pitää integrointi jakaa osiin.

$$\int_{-1}^{1} e^{2|x|}dx = \int_{-1}^{0} e^{-2x}dx + \int_{0}^{1} e^{2x}dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} -2e^{-2x}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} 2e^{2x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{-1} -2e^{-2x}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} 2e^{2x}dx = \frac{1}{2}\left(e^{-2\cdot(-1)} - e^{-2\cdot 0} + e^{2\cdot 1} - e^{2\cdot 0}\right) = e^{2} - 1.$$

4. Ratkaise seuraavat yhtälöt välillä $[0, 2\pi]$:

a) $\sin x = 1$ **b)** $f'(t) = 0$, kun $f(t) = \cos t$ **c)** $\sin z = (1 + \cos z)(1 - \cos z)$.

Tied. Muok Lisää Toiminto

a) Ratkaistaan yhtälö, kun $0 \le x \le 2\pi$

$\sin(x)=1$

$x=\frac{\pi}{2}$

(yksikköympyrän kehäpisteen y−koordinaatti on 1 vain kulmalle $\frac{\pi}{2}$)

b) Kun $f(t)=\cos(t)$, niin $f'(t)=-\sin(t)$. Välillä $0 \le t \le 2\pi$ yhtälö $-\sin(t)=0$, kun

$\sin(t)=0$

$t=0$ tai $t=\pi$ tai $t=2\pi$

(yksikköympyrän kehäpisteen y−koordinaatti on 0 eli yksikköympyrän ja x−akselin leikkauspisteitä vastaavat kulman arvot)

c) Ratkaistaan yhtälö

$\sin z=(1+\cos z)(1-\cos z)$ | summan ja erotuksen tulon muistisäännöllä

$\sin z=1-(\cos z)^2$ | trigonometrian peruslauseen nojalla

$\sin z=1-(1-(\sin z)^2)$

$\sin z=(\sin z)^2$ | siirretään termit samalla puolella ja otetaan yhteinen tekijä

$(\sin z)(\sin z-1)=0$ | tulon nollasäännöllä

$\sin z=0$ tai $\sin z-1=0 \Leftrightarrow \sin z=1$

Hyödyntämällä **a)**− ja **b)**−kohdan tuloksia saadaan $z=0$ tai $z=\frac{\pi}{2}$ tai $z=\pi$ tai $z=2\pi$.

B1-osa Ratkaise kolme tehtävistä 5–9.

5. Olkoot $\overline{u} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$ ja $\overline{v} = -\overline{i} - 7\overline{k}$ vektoreita. Laske summa $\overline{u} + 2\overline{v}$, pistetulo $\overline{u} \cdot \overline{v}$ sekä vektoreiden $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ välisen kulman likiarvo asteen tarkkuudella.

Tied. Muok Lisää Toiminto

Määritetään vektorit u ja v muuttujiksi, jolloin niitä voidaan käyttää laskuissa:

u:=[1 2 3]

[1 2 3]

v:=[-1 0 -7]

[-1 0 -7]

Summa on

u+2v

[-1 2 -11]

mikä vastaa vektoria -i+2j-11k.

Pistetuloksi saadaan

dotp(u, v)

-22

ja vektorien väliseksi kulmaksi

α:=angle(u, v)

146.2553867

joka on asteen tarkkuudella 146°.

Huomautus: Vektorien välisen kulman voi laskea vaihtoehtoisesti vektorien pituuksien ja pistetulon avulla:

$$\alpha := \cos^{-1}\left(\frac{\text{dotp}(u, v)}{\text{norm}(u)\,\text{norm}(v)}\right)$$

146.2553867

missä norm(u) on vektorin u pituus, norm(v) vektorin v pituus ja dotp(u, v) niiden pistetulo, joka saadaan myös vektorien komponenttien kertoimien avulla 1*(-1)+2*0+3*(-7)=-22.

6. Suora $y = kx$ sivuaa ympyrää $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 1$.

a) Määritä kulmakertoimen k kaikki mahdolliset arvot.

b) Määritä suurempaa kulmakerrointa vastaavan sivuamispisteen koordinaatit.

Tied. Muok Lisää Toiminto

Origon (0, 0) kautta kulkeva suora $y=kx$ sivuaa ympyrää silloin, kun se on ympyrän tangentti. Tangenttisuora voidaan kirjoittaa muodossa $kx-y=0$ ja sen etäisyys ympyrän keskipisteestä (5, 5) pitää olla säteen verran eli 1. Tästä saadaan yhtälö, josta voidaan ratkaista k:

$$\text{solve}\left(\frac{|5k-5|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=1, k\right)$$

$$\left\{k=\frac{3}{4}, k=\frac{4}{3}\right\}$$

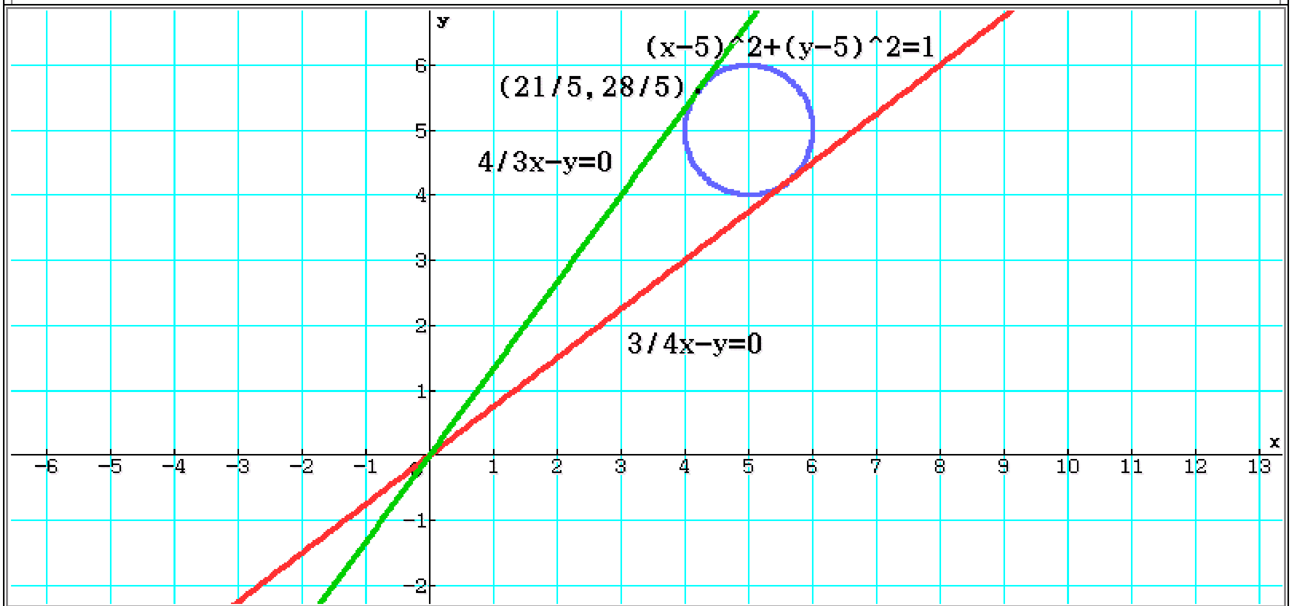
Kulmakertoimen k kaikki mahdolliset arvot ovat $k=\frac{3}{4}$ ja $k=\frac{4}{3}$. Suurempi kulmakertoimista on $\frac{4}{3}$ ja sitä vastaava sivuamispiste saadaan yhtälöparin ratkaisuna.

$$\left\{\begin{array}{l}(x-5)^2+(y-5)^2=1\\ \frac{4}{3}x-y=0\end{array}\right|_{x,\,y}$$

$$\left\{x=\frac{21}{5}, y=\frac{28}{5}\right\}$$

Leikkauspise on $\left(\frac{21}{5}, \frac{28}{5}\right)$.

Huomautus: Tehtävän voi tarkistaa helposti piirtämällä.



CASIO

7. Tšernobylin vuoden 1986 ydinvoimalaonnettomuuden jälkeen radioaktiivista cesium-137-isotooppia levisi suureen osaan Eurooppaa ja myös Suomeen. Koska tämän isotoopin puoliintumisaika on 30 vuotta, niin tietylle alueelle laskeutuneen isotoopin määrä oli puoliintunut vuoteen 2016 mennessä. Oletetaan, että tietylle alueelle laskeutuneen isotoopin määrä oli y_0 vuonna 1986.

a) Määritä alueen cesium-137-isotoopin määrää kuvaavassa funktiossa $y(t) = y_0 e^{-kt}$ esiintyvä vakio k, kun muuttujana t on aika vuosina alkaen vuodesta 1986.

b) Minä vuonna kyseistä isotooppia on alueella jäljellä enää 10 % vuoden 1986 määrästä?

c) Kuinka suurella nopeudella kyseisen isotoopin määrä vähenee alueella 40 vuotta onnettomuuden jälkeen? Anna vastaus yksikkönä y_0/vuosi.

Tied. Muok Lisää Toiminto

a) Ratkaistaan k yhtälöstä

$$\text{solve}\left(\frac{1}{2}y_0=y_0e^{-k*30},k\right)$$

$$\left\{k=\frac{\ln(2)}{30}\right\}$$

b) Selvitetään, milloin isotooppia on 10% alkuperäisestä ratkaisemalla yhtälö

$$\text{solve}\left(0.1y_0=y_0e^{-\frac{\ln(2)}{30}*t},t\right)$$

$$\left\{t=\frac{30\cdot\ln(5)}{\ln(2)}+30\right\}$$

ans

$$\{t=99.65784285\}$$

10% isotooppia on jäljellä 99. vuonna vuoden 1987 alusta. Tällöin on vuosi 2086.

c) Vähenemisnopeus on funktion y(t) derivaatta ajan suhteen pisteessä t=40.

$$\frac{d}{dt}\left(y_0e^{-\frac{\ln(2)}{30}*t}\right)\Big|t=40$$

$$\frac{-y_0\cdot\ln(2)}{60\cdot2^{\frac{1}{3}}}$$

ans

$$-0.00916918803\cdot y_0$$

Vähenemisnopeus on n. 0.009 y_0/vuosi.

8. Yksikköympyrän kehän pituus on 2π. Arvioi tätä lukua approksimoimalla ympyrää sen sisään piirretyllä säännöllisellä kuusikulmiolla ja laskemalla kuusikulmion piirin pituus. Muodosta toinen arvio säännöllisen 12-kulmion avulla ja määritä kummankin approksimaation suhteellinen virhe vertaamalla tuloksia laskimen antamaan luvun 2π likiarvoon.

Tied. Muok Lisää Toiminto

Säännöllinen kuusikulmio voidaan jakaa ympyrän keskipisteessä kohtaavaan kuuteen säännölliseen kolmioon, joiden sivun pituudet ovat yksikköympyrän säteen verran eli 1. Suhteellinen virhe on

$$\frac{6-2\pi}{2\pi}*100$$

$$-4.507034145$$

eli noin 4.5% (piiri on liian lyhyt).

Suorakulmaisten kolmioiden trigonometrian avulla säännöllisen 12-kulmion sivun pituudeksi saadaan $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ ja piiriksi $12\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Suhteellinen virhe on nyt

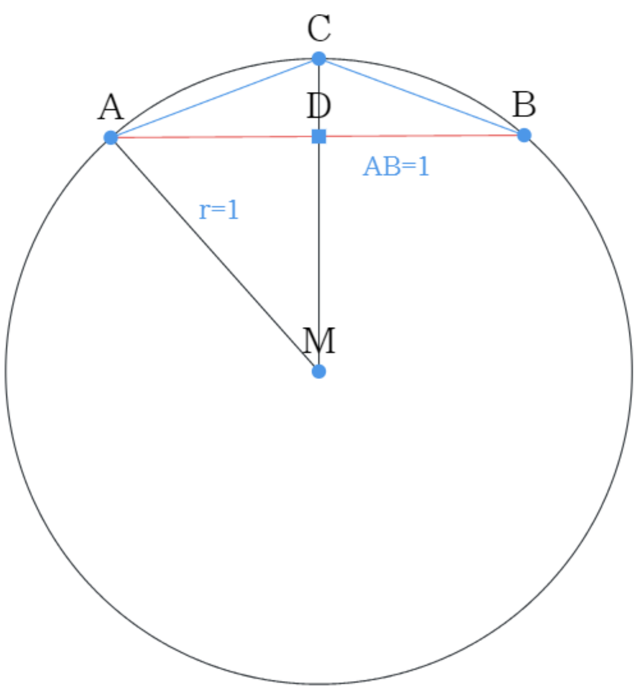
$$\frac{12\sqrt{2-\sqrt{3}}-2\pi}{2\pi}*100$$

$$-1.138407053$$

eli noin 1.1% (piiri on edelleen liian lyhyt).

Perustelut 12-kulmion sivun BC pituudelle: $AD=\frac{1}{2}$, $MD=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, jolloin

$DC=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ ja Pythagoraan lauseella $BC=\sqrt{DC^2+DB^2}=\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$.



9. Weibullin (λ, k)-jakauman avulla voidaan kuvata mm. maantiepölyn hiukkasten kokoa. Tutkitaan tapausta $\lambda = 1$, jolloin jakauman tiheysfunktio määritellään kaavalla

$$w(t, k) = kt^{k-1}e^{-t^k},$$

kun $t \geq 0$ ja $k > 0$. Weibullin kertymäfunktio määritellään kaavalla

$$W(x, k) = \int_0^x w(t, k)\, dt.$$

a) Määritä $\lim\limits_{t \to 0+} w(t, k)$ vakion k eri arvoilla.

b) Määritä kertymäfunktion $W(x, k)$ lauseke, kun $x \geq 0$.

Tied. Muok Lisää Toiminto

a) Tutkitaan toispuoleista raja-arvoa parametrin k eri positiivisilla arvoilla. Aloitetaan luvuilla, jotka ovat <1:

$$\lim_{t \to 0+} \left(k*t^{k-1}e^{-t^k}\right) \mid 0<k<1$$

Undefined

Raja-arvoa ei löydy, sillä lauseke kasvaa rajatta. Kun sijoitetaan k=1, niin saadaan

$$\lim_{t \to 0+} \left(1*t^{1-1}e^{-t^1}\right)$$

1

Raja-arvo on olemassa ja se on 1. Tutkitaan raja-arvo vielä, kun k>1

$$\lim_{t \to 0+} \left(k*t^{k-1}e^{-t^k}\right) \mid k>1$$

0

Raja-arvo on olemassa ja se on 0.

b) Kun $x \geq 0$, niin integroitava lauseke on muotoa $-f'(x)e^{f(x)}$ ja tällöin integraalifunktioksi saadaan suoraan $-e^{f(x)}+C$ eli $-e^{-t^k}+C$. Niinpä määrätyn integraalin arvoksi saadaan $-e^{-x^k}-(-e^{-0^k})=-e^{-x^k}+1$. Sama saadan suoraan laskimella:

$$\int_0^x k*t^{k-1}e^{-t^k}\,dt \mid x\geq 0 \text{ and } t\geq 0 \text{ and } k>0$$

$$-e^{-x^k}+1$$

Integraalin arvo on siis $1-e^{-x^k}$.

B2-osa Ratkaise kolme tehtävistä 10–13.

10. Tässä tehtävässä on käytössä kaksi mittakeppiä sekä kynä, jolla voi tehdä merkintöjä. Tarkoituksena on mitata keppien avulla pituuksia. Silmämääräisiä arvioita ei sallita.

a) Voidaanko 5 metrin ja 3 metrin keppien avulla mitata 4 metrin pituus? (1 p.)

b) Voidaanko 10 metrin ja 6 metrin keppien avulla mitata 7 metrin pituus? (1 p.)

c) Määritä ne positiiviset kokonaisluvut k, joilla on seuraava ominaisuus: $2k$ metrin ja $k+1$ metrin pituisten keppien avulla voidaan mitata $k+2$ metrin pituus. (4 p.)

Tied. Muok Lisää Toiminto

a) Esim. kokeilemalla nähdään, että $5\cdot5+3\cdot(-7)=25-21=4$ eli 4 metrin matka on mahdollista mitata. Mitataan ensin 5 metrin mitalla 25 metrin matka ja sitten samasta alkupisteestä alkaen 3 metrin mitalla 21 metrin matka. Vajaaksi jäänyt etäisyys on tasan 4 metriä.

b) Tehtävää voidaan tarkastella Diofantoksen yhtälönä, jossa haetaan kokonaislukuihin kuuluvaa ratkaisuparia yhtälölle $10x+6y=7$. Kirjoitetan ensin Eukleideen algoritmin avulla syt(10, 6) jakoyhtälönä

$10=1\cdot6+4$

$6=1\cdot4+2$

$4=2\cdot2+0$

jolloin viimeisen nollasta eroavan jakojäännöksen avulla syt(10, 6)=2. Koska yhtälön oikea puoli 7 ei ole syt(10, 6)=2 monikerta, yhtälö ei ratkea eikä siis 7 metrin matkaa saada mitattua.

c) Tutkitaan nyt Diofantoksen yhtälöä $2k\cdot x+(k+1)\cdot y=k+2$.

Jos k on parillinen eli muotoa $k=2n$, missä $n\in Z+$, niin mitattava matka $k+2=2n+2=2(n+1)=(-2k+2k+2)(n+1)=2k\cdot(-n-1)+(k+1)\cdot(2n+2)$ ja Diofantoksen yhtälön yksi ratkaisu on aina $x=-n-1$ ja $y=2n+2$ ja matka saadaan mitattua.

Jos k on pariton eli muotoa $k=2n+1$, missä $n\in Z+$, niin mitattava matka $k+2=2n+1+2=2n+3$ on myös pariton luku. Nyt mitattavien matkojen syt saa muodon $\mathrm{syt}(2k, k+1)=\mathrm{syt}(2k-(k+1), k+1)=\mathrm{syt}(k-1, k+1)=\mathrm{syt}(k-1, 2)=\mathrm{syt}(2n+1-1, 2)=2$ eikä mitattavaa paritonta matkaa saada parillisten lukujen lineaarikombinaationa.

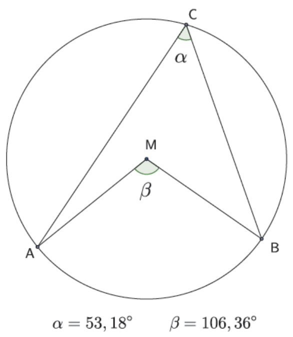
Siis, kaikki parilliset luvut k käyvät, $k\in Z+$.

11. Alla olevien kuvioiden kaksi tilannetta ovat syntyneet erään abiturientin harjoitellessa dynaamisen matematiikkaohjelman käyttöä. Tehtävänä on auttaa häntä viemään tarkastelu loppuun molemmissa tapauksissa.

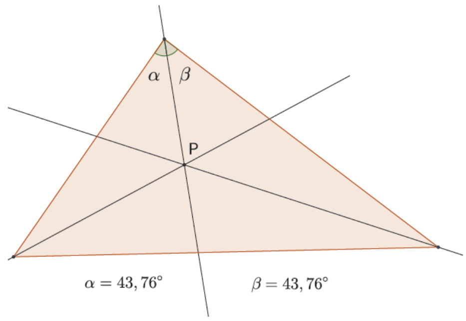
a) Mitä ympyrään liittyvää lausetta abiturientti tutkii kuvassa 1? Kirjoita lause mahdollisimman täsmällisiä termejä käyttämällä. (1 p.)

b) Abiturientti tarkastelee kuvassa 2 näkyvän kolmion merkillistä pistettä P. Mikä tämä piste on? Minkä pisteeseen P liittyvän geometrisen ominaisuuden abiturientti voi todentaa, jos hän piirtää ympyrän, jonka keskipisteenä on P ja jonka säde on sopivan mittainen? (1 p.)

c) Perustele **joko** a-kohdan lause, kun pisteet A, M ja C ovat samalla suoralla, **tai** b-kohdan ominaisuus. (4 p.)



Kuva 1.



Kuva 2.

Tied. Muok Lisää Toiminto

a) Ympyrän keskuskulma on kaksi kertaa kehäkulman suuruinen; $\beta=2\alpha$.

b) Piste on kolmion kulmanpuolittajien keskipiste, joka on kolmion sisälle piirretyn ympyrän keskipiste eli yhtä etäällä kaikista kolmion sivuista.

c1) Perustellaan **a)**-kohdan lause: Kun A, M ja C ovat samalla suoralla ja M ympyrän keskipiste, niin muodostuu tasakylkinen kolmio BMC sivun pituutena ympyrän säde. Kulma M on kolmion kulmien summan avulla $180°-2\alpha$ ja kulman β vieruskulmana $180°-\beta$. Siis $180°-2\alpha=180°-\beta$, josta seuraa väite $\beta=2\alpha$.

c2) Perustellaan **b)**-kohdan pisteen P ominaisuus: Olkoon kuvan piste P kulmanpuolittajien leikkauspiste. Muodostetaan pisteen P kautta normaalit kaikille kolmion sivuille. Nyt esim. kolmion yläosaan muodostuu kaksi yhtenevää kolmiota kks-lauseen nojalla ($\alpha=\beta$, $90°$ kulma ja yhteinen hypotenuusa). Niinpä etäisyys pisteestä P kolmion kahdelle sivulla on yhtä pitkä.

Vastaavasti voidaan perustella kolmion vasempaan alareunaan muodostuvien kolmioiden yhtenevyys, mikä osoittaa etäisyyden pisteestä P jokaiselle kolmion sivulle yhtä suureksi. Niinpä piste P keskipisteenä on mahdollista piirtää kolmion sisäpuolinen ympyrä (suurin mahdollinen).

12. Digitaalikellossa numerot nollasta yhdeksään esitetään numeron 8 muotoon asetettujen seitsemän LED-valon avulla (ks. kuva 1).

a) Kuinka monta eri merkkiä ledeillä voidaan esittää, jos merkiltä vaaditaan, että se on yhtenäinen (kuten kuvissa 1 ja 2) ja että ainakin yksi LED-valo palaa? (4 p.)

b) Kuinka suurella todennäköisyydellä merkki on yhtenäinen, jos kukin LED-valo on päällä toisista valoista riippumatta todennäköisyydellä 0,5? (Tyhjä merkki, jossa mikään valo ei pala, tulkitaan yhtenäiseksi.) (2 p.)

Kuva 1: Kaikki 7 LED-valoa | Kuva 2: Yhtenäinen merkki | Kuva 3: Epäyhtenäinen merkki

Tied. Muok Lisää Toiminto

a) Kaikkiaan seitsemästä LED-valosta voidaan muodostaa yhtenäisiä merkkejä, joissa palaa ainakin yksi LED-valo

- 1 LEDin merkkejä 7 kpl (7C1=7, jotka ovat kaikki yhtenäisiä)
- 2 LEDin merkkejä 10 kpl (7C2=21, josta pois 11 epäyhtenäistä)
- 3 LEDin merkkejä 16 kpl (7C3=35, josta pois 19 epäyhtenäistä)
- 4 LEDin merkkejä 20 kpl (7C4=35, josta pois 15 epäyhtenäistä)
- 5 LEDin merkkejä 19 kpl (7C5=21, josta pois 2 epäyhtenäistä muotoa "neliö ja ylä/alaviiva", kuten kuva 3 tehtävässä)
- 6 LEDin merkkejä 7 kpl (7C6=7, ovat kaikki yhtenäisiä)
- 7 LEDin merkkejä 1 kpl (7C7=1 ja merkki on yhtenäinen)

Yhteensä merkkejä saadaan 7+10+16+20+19+7+1=80 kpl.

b) Merkki on yhtenäinen todennäköisyydellä, joka saadaan jakamalla kaikkien yhtenäisten merkkien määrä eri vaihtoehtojen määrällä. Lukuun on lisätty tyhjä merkki.

$$\frac{81}{2(1+7+21+35)}$$

$$\frac{81}{128}$$

ans

0.6328125

Todennäköisyys on $\frac{81}{128}\approx 63\%$.

CASIO

13. a) Määritä sellainen vakion a tarkka arvo, että yhtälöllä $x^2 = a + \ln x$ on täsmälleen yksi ratkaisu $x > 0$. (2 p.)

b) Edellinen kohta voidaan yleistää korvaamalla x^2 kasvavalla funktiolla $f(x)$, jolle pätee $f''(x) > 0$ kaikilla $x > 0$. Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen vakion a arvo, jolla yhtälöllä $f(x) = a + \ln x$ on täsmälleen yksi ratkaisu $x > 0$. (4 p.)

Tied. Muok Lisää Toiminto

a) Määritellään funktio f siirtämällä kaikki termit samalle puolelle annetussa yhtälössä, jolloin yhtälön ratkaisut ovat samat kuin funktion f nollakohdat.

define $f(x)=x^2-\ln(x)-a$

done

Tutkitaan funktion $f(x)$ kulkua derivaatan avulla, $x>0$.

$\frac{d}{dx}(f(x))$

$$\frac{2\cdot x^2-1}{x}$$

Kun $x>0$, niin derivaatta on aina määritelty ja $2x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Välillä $0<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ derivaatta on negatiivinen ja kun $x>\frac{1}{\sqrt{2}}$, derivaatta on positiivinen. Niinpä funktion pienin arvo saadaan pisteessä $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ja se on

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$-a+\frac{\ln(2)}{2}+\frac{1}{2}$$

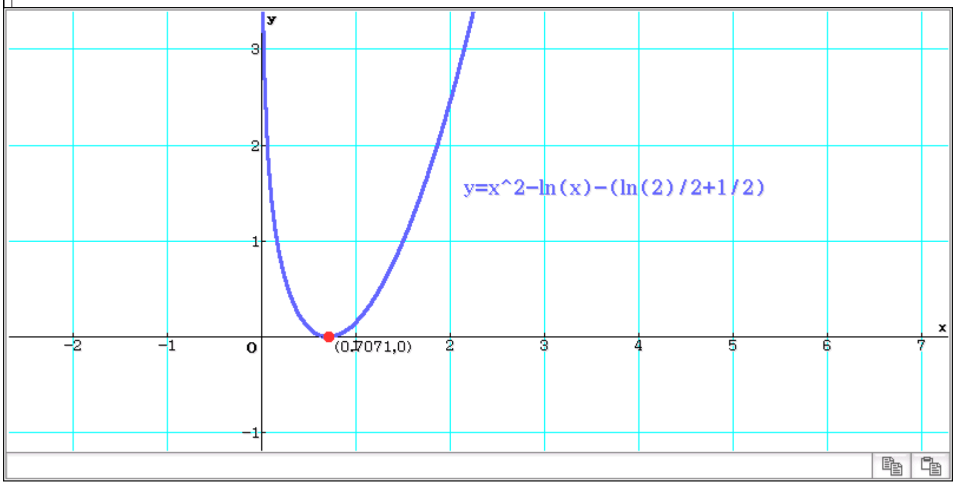
Asettamalla pienin arvo nollaksi, saadaan ratkaistua funktiolle se parametrin a arvo, jolla nollakohtia on vain yksi:

solve$\left(-a+\frac{\ln(2)}{2}+\frac{1}{2}=0, a\right)$

$$\left\{a=\frac{\ln(2)}{2}+\frac{1}{2}\right\}$$

ans

$$\{a=0.8465735903\}$$



Tied. Muok Lisää Toiminto

b) Muodostetaan erotusfunktio kuten **a)**-kohdassa: $g(x)=f(x)-\ln(x)-a$, missä $x>0$.

Koska funktio $f(x)$ on kasvava, niin sen derivaattafunktio $f'(x)\geq 0$ aina, kun $x>0$. Koska toinen derivaatta $f''(x)>0$, on funktio $f(x)$ alaspäin kupera ja sen derivaattafunktio $f'(x)>0$, kun $x>0$.

Nyt $g'(x)=f'(x)-\frac{1}{x}$ ja derivaatan nollakohdat saadaan yhtälöstä $f'(x)-\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow$ $xf'(x)-1=0 \Leftrightarrow xf'(x)=1$ (1). Osoitetaan ensin yhtälön (1) mahdollisen ratkaisun **yksikäsitteisyys:**

Jos yhtälöllä (1) on kaksi positiivista ratkaisua x_1 ja x_2, $x_1\neq x_2$, niin ratkaisujen välissä on oltava funktion $xf'(x)$ paikallinen ääriarvokohta $a>0$. Nyt $\frac{d}{dx}(xf'(x))=1\cdot f'(x)+xf''(x)$, joten $f'(a)+af''(a)=0 \Leftrightarrow f''(a)=-\frac{f'(a)}{a}$.

Tämä on ristiriita, sillä $f'(a)>0$ ja $a>0$, jolloin $-\frac{f'(a)}{a}<0$ ja oletuksen mukaan $f''(x)>0$ kaikilla x, erityisesti $f''(a)>0$, kun $a>0$. Ratkaisut eivät siis voi olla erisuuret, vaan ratkaisun löytyessä se on yksikäsitteinen. (2)

Osoitetaan seuraavaksi ratkaisun **olemassaolo:** Yhtälöllä $xf'(x)=1$ on oltava positiivinen ratkaisu x_0, sillä $f'(x)>0$ ja $f''(x)>0$ ja $\frac{1}{x}$ on vähenevä funktio. (3)

Kohtien (2) ja (3) nojalla yhtälöllä $g'(x)=0$ on tasan yksi ratkaisu x_0 ja tässä pisteessä funktion arvonkin on oltava nolla eli $g(x_0)=f(x_0)-\ln(x_0)-a=0 \Leftrightarrow$ $f(x_0)-\ln(x_0)=a$. Siis derivaatan nollakohdan (paikallisen minimikohdan) pitää olla myös funktion nollakohta.