”Enemmän aikaa matematiikan opiskeluun, vähemmän aikaa laskimen opetteluun.”

Laske Laudatur ClassPadilla

Pitkä matematiikka, syksy 2016

Casio Scandinavia

Keilaranta 17 | 02150 Espoo | info@casio.fi

Hyvä lukija,

Käsissäsi on ratkaisut syksyn 2016 pitkän matematiikan yo-kokeen B-osan tehtäviin. A-osion tehtävien ratkaisuissa ei saa käyttää laskinta, joten vastaukset näihin tehtäviin löytyy YTL:n hyvän vastauksen piirteet –tiedostosta. (http://yle.fi/aihe/artikkeli/2016/09/27/2016-syksy-matematiikka-pitka-oppimaara)

Tämä vihkonen on ladattavissa suomenkielisiltä Casion tukisivuilta aiempien vuosien ratkaisujen tapaan (http://www.casio-laskimet.fi/fi/opettajakoulu/opetusmateriaalia/)

Uutuuskirja

Casio julkaisee lokakuussa 2016 lukion matematiikan oppimista tukevan ilmaisen digitaalisen kirjan. Kirjassa on n. 300 sivua teoriaa, esimerkkejä, tehtäviä ja ratkaisuja. ***Kirja tulee ladattavaksi Casion tukisivuilta*** ja soveltuu oppimisen syventämiseen, kokeisiin valmistautumiseen ja itseopiskeluun.

Kirjan kaksiosainen tehtäväjako ilman apuvälineitä laskettaviin tehtäviin ja CAS-tehtäviin noudattaa nykyisten kokeiden jakoa. Kaikkiin CAS-tehtäviin on linkitetty suomenkielinen videoratkaisu, jossa tehtävä tehdään reaaliajassa ja perustellen ClassPad II Managerilla. Lisäksi CAS-tehtäviin on ladattavissa tiedosto, jolloin ratkaisut aukeavat suoraan laskinohjelmassa tai laskimessa.

Laskuteknisiä vinkkejä ja Abitti-infoa sisältävä YouTube –kanava on suosittu ja kanavan videoita on katsottu jo 40 000 kertaa! Kanavan nimi on fx-CP400 ja linkki http://bit.ly/fx-cp400.

ClassPad II Manager

Ratkaisut kevään yo-kokeisiin on tehty ClassPad II Manager –ohjelmalla. Samat laskut voidaan tehdä myös laskimella fx-CP400 ja vastaustiedostotkin käyvät molempiin. Tämä tukee siirtymistä laskimista ohjelmien käyttöön. Casion ajatus helppokäyttöisyydestä sisältää sen, että laskimen käytön osaavat voivat suoraan siirtyä käyttämään ohjelmaa ilman erillistä opettelua tai perehdytystä.

ClassPad II Manager-ohjelman lisenssejä voi hankkia vuodeksi tai kolmeksi vuodeksi joko jälleenmyyjien kautta tai Casion nettikaupasta (https://edu.casio.com/softwarelicense/pop.php)

Mikäli et ole vielä ehtinyt kokeilemaan ohjelmaa, niin sen 90 päivän ilmaisen trial-version voit ladata osoitteesta https://edu.casio.com. Linkistä löydät myös mm. uusimmat käyttöjärjestelmien päivitykset.

Pitkä matematiikka

Pitkän matematiikan opiskelu vaatii monipuolisia, mutta samalla helppokäyttöisiä välineitä. ClassPad II Manager ja laskin fx-CP400 ovat sellaisia. Tämän vihkosen laadinnassa on käytetty eActivity-sovellusta ja sen sisällä sovelluksia Lukujono, Käyrä&Taulukko ja Geometria.

Espoossa 29.9.2016

Pepe Palovaara

B1-osa Ratkaise kolme tehtävistä 5–9. Jos valitset tehtävän 9, ratkaise joko tehtävä 9.1 tai 9.2.

5. **a)** Kolmion kulmat muodostavat aritmeettisen jonon, ja yhden kulman suuruus on 103°. Määritä kulmien suuruudet asteina.

b) Kolmion kulmat muodostavat geometrisen jonon, ja yhden kulman suuruus on $\frac{\pi}{7}$ radiaania. Määritä kulmien suuruudet radiaaneina.

a) Kulma 103° on kolmion suurin kulma, joten aritmeettinen jono kulmille on x, x+d ja x+2d=103°. Lisäksi tiedetään, että kulmien summa on 180°. Ratkaistaan ehdoista muodostuva yhtälöpari:

$$\begin{cases} x+x+d+x+2d=180 \\ x+2d=103 \end{cases}\Bigg|_{x,d}$$

$$\{x=17, d=43\}$$

Muut kaksi kulmaa ovat siis 17° ja 60°.

b) Merkitään kolmion kulmia pienimmästä suurimpaan y, y*q ja y*q^2, jolloin geometrisen jonon suhdeluku on q>1. Koska $\frac{\pi}{7}$ radiaania on

$$\frac{\pi}{7}^{r}$$

$$25.71428571$$

astetta, se voi olla kolmion pienin tai toiseksi pienin kulma.

Tapaus 1) Jos $\frac{\pi}{7}$ on pienin kulma, niin saadaan yhtälöparilla ratkaistua

$$\begin{cases} y+y*q+y*q^2=\pi \\ y=\frac{\pi}{7} \end{cases}\Bigg|_{y,q}$$

$$\left\{\left\{y=\frac{\pi}{7}, q=-3\right\}, \left\{y=\frac{\pi}{7}, q=2\right\}\right\}$$

Näistä vain jälkimmäinen käy, koska q>1. Kulmat ovat $\frac{\pi}{7}$, $\frac{2\pi}{7}$ ja $\frac{4\pi}{7}$.

CASIO

Tapaus 2) Jos $\frac{\pi}{7}$ on keskimmäinen kulmista, niin yhtälöpari tulee muotoon

$$\left.\begin{cases} y+y*q+y*q^2=\pi \\ y*q=\frac{\pi}{7} \end{cases}\right|_{y,\,q}$$

$$\left\{\left\{y=\frac{\pi}{-14\cdot\sqrt{2}+21},\ q=-2\cdot\sqrt{2}+3\right\},\ \left\{y=\frac{\pi}{14\cdot\sqrt{2}+21},\ q=2\cdot\sqrt{2}+3\right\}\right\}$$

Näistä vain jälkimmäinen käy, koska q>1. Lasketaan pienin ja suurin kulma:

$$\text{simplify}\left(\frac{\pi}{14\cdot\sqrt{2}+21}\right)$$

$$\frac{(-2\cdot\sqrt{2}+3)\cdot\pi}{7}$$

$$\text{simplify}\left(\frac{\pi}{14\cdot\sqrt{2}+21}*(2\cdot\sqrt{2}+3)^2\right)$$

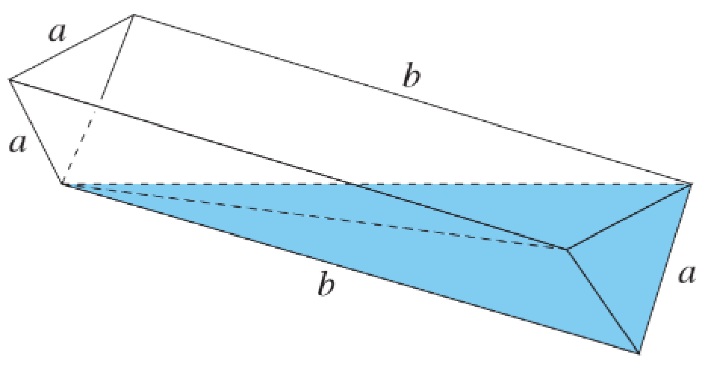
$$\frac{(2\cdot\sqrt{2}+3)\cdot\pi}{7}$$

Kulmat ovat siis $\frac{(-2\cdot\sqrt{2}+3)\cdot\pi}{7}$, $\frac{\pi}{7}$ ja $\frac{(2\cdot\sqrt{2}+3)\cdot\pi}{7}$.

6. Vesikaukalon päädyt ovat tasasivuisen kolmion muotoiset, ja kolmion sivujen pituus on a. Kaukalon pohja koostuu kahdesta suorakulmion muotoisesta levystä, joiden pituus on b.

a) Vaakasuorassa oleva kaukalo on aluksi täynnä vettä. Sitä kallistetaan pituussuunnassa niin, että vedenpinta ulottuu vasemmanpuoleisen päätykolmion alakulmaan alla olevan kuvion mukaisesti. Kuinka monta prosenttia vedestä valuu pois kallistuksen aikana?

b) Tämän jälkeen kaukalo palautetaan takaisin vaakasuoraan asentoon. Kuinka korkealla vedenpinta on kaukalon syvimmästä kohdasta mitattuna?



a) Koko kaukalon tilavuus on $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}*b$. Kaukaloon jääneen veden pinta muodostaa kartion, jonka tilavuus on $\frac{1}{3}*\frac{\sqrt{3}a^2}{4}*b$, mikä on siis $\frac{1}{3}$ koko kaukalon tilavuudesta. Vettä poistuu siis n. 66,7%.

b) Nyt veden muodostaman kappaleen pääty on yhdenmuotoinen kaukalon päädyn säännöllisen kolmion kanssa. Veden muodostaman kappaleen korkeus on koko ajan b, joten veden määrä on suoraan verrannollinen päätykolmion pinta-alaan.

Koska vettä on jäljellä $\frac{1}{3}$ alkuperäisestä, niin mittakaavaksi saadaan pinta-alojen suhteen neliöjuurena $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Saadaan ratkaistua kysytty veden pinnan korkeus säännöllisen kolmion korkeudesta

$$\frac{1}{\sqrt{3}}*\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\frac{a}{2}$$

Veden korkeus pohjasta on $\frac{a}{2}$.

7. Tasokäyrä K muodostuu niistä pisteistä (x, y), joiden etäisyys origosta on yhtä suuri kuin etäisyys suorasta $y = 2$.

a) Johda käyrän K yhtälölle muoto $y = f(x)$. (4 p.)

b) Laske käyrän K ja x-akselin väliin jäävän rajoitetun tasoalueen pinta-ala. (2 p.)

a) Asetetaan pisteen etäisyys suorasta ja origosta yhtä suuriksi ja ratkaistaan yhtälöstä y:

$$\text{solve}\left(\frac{|y-2|}{\sqrt{1^2}}=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}, y\right)$$

$$\left\{y=\frac{-x^2}{4}+1\right\}$$

Käyrä on alaspäin aukeava paraabeli $y=\frac{-x^2}{4}+1$.

b) Lasketaan käyrän leikkauspisteet x-akelin kanssa:

$$\text{solve}\left(\frac{-x^2}{4}+1=0, x\right)$$

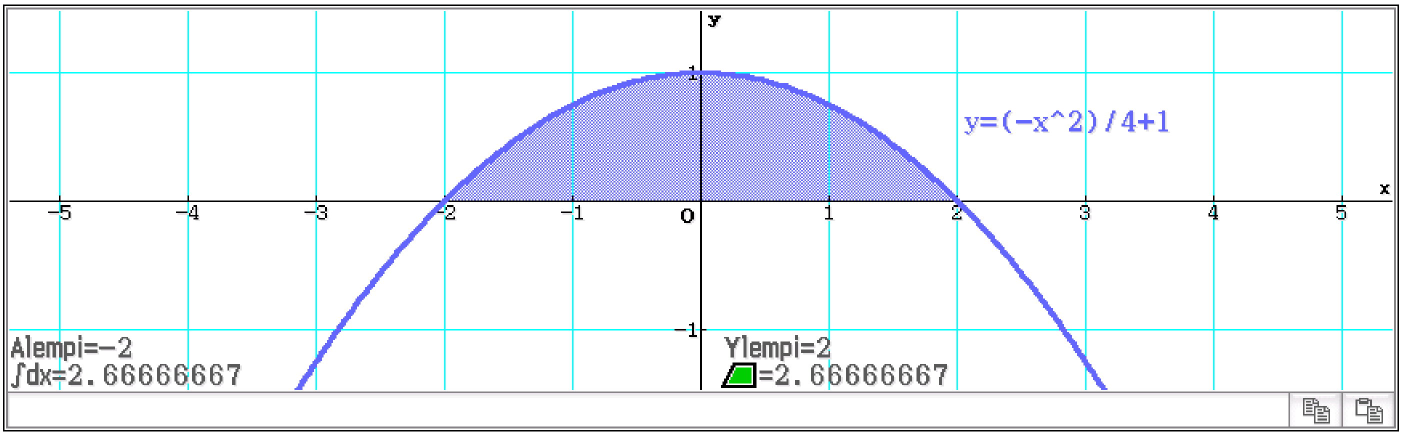
$$\{x=-2, x=2\}$$

Koska käyrä on tällä välillä positiivinen, saadaan pinta-ala määrätyn integraalin avulla.

$$\int_{-2}^{2}\frac{-x^2}{4}+1dx$$

$$\frac{8}{3}$$

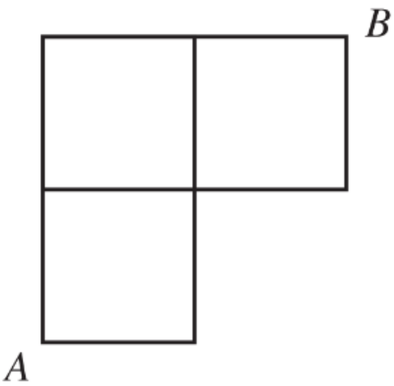
Pinta-ala on $\frac{8}{3}$ pay.



8. Alla oleva kaavio esittää pienen kaupungin katuverkkoa. Anssi kulkee pisteestä A pisteeseen B käyttämällä mahdollisimman lyhyttä reittiä, jolloin matkan pituus on neljä korttelinväliä. Sellaisissa risteyksissä, joissa kaksi vaihtoehtoa johtaa lyhimpään reittiin, hän valitsee suunnan kolikkoa heittämällä.

a) Piirrä erilliset kuviot kaikista niistä viidestä mahdollisesta reitistä, joiden pituus on neljä korttelinväliä, ja määritä niiden valintatodennäköisyydet.

b) Birgitta kulkee pisteestä B pisteeseen A ja valitsee mahdollisimman lyhyen reitin vastaavalla tavalla. Anssi ja Birgitta lähtevät liikkeelle samanaikaisesti ja kulkevat samaa vauhtia. Kuinka suurella todennäköisyydellä he kohtaavat toisensa matkan puolivälissä?



Todennäköisyydet eri reittien valinnoille saadaan tuloperiaatteen nojalla. Kerrotaan jokaisen valinnan todennäköisyys välillä AB.

P("Reitti 1")=

$\frac{1}{2}*1*\frac{1}{2}*1$

$$\frac{1}{4}$$

P("Reitti 2")=

$\frac{1}{2}*1*\frac{1}{2}*1$

$$\frac{1}{4}$$

P("Reitti 3")=

$\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*1*1$

$\frac{1}{4}$

P("Reitti 4")=

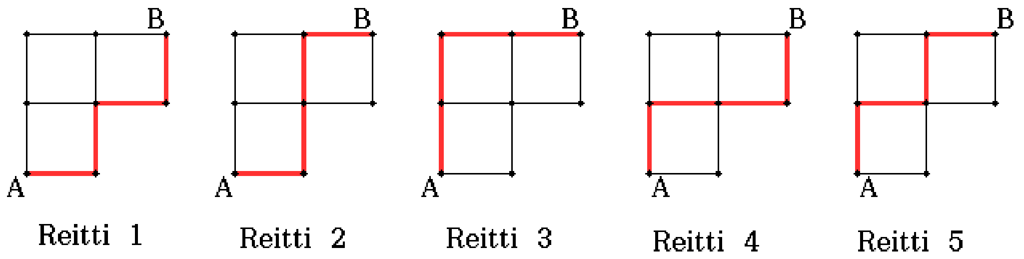
$\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*1$

$\frac{1}{8}$

P("Reitti 5")=

$\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*1$

$\frac{1}{8}$



b) Kohtaamispisteiden täytyy olla kahden korttelin etäisyydellä lähtöpaikasta.

P("Birgitta ja Anssi kohtaavat")=1−P("Birgitta ja Anssi eivät kohtaa")=1−P("Toinen valitsee reitin 3 ja toinen ei")

$1-\left(\frac{1}{4}*\frac{3}{4}+\frac{3}{4}*\frac{1}{4}\right)$

$\frac{5}{8}$

Birgitta ja Anssi kohtaavat todenäköisyydellä $\frac{5}{8}$.

9. Valitse joko tehtävä 9.1 tai 9.2.

9.1 Olkoon $n = 2, 3, 4, \ldots$ kokonaisluku. Osoita, että luku

$$n^3 + 6n^2 - 7n$$

on jaollinen luvulla 6.

9.1. Kokonaisluvut voidaan kirjoittaa muodossa 6p, 6p+1, 6p+2, 6p+3, 6p+4, 6p+5, missä p on kokonaisluku. Määritellään funktio f(n)

Define $f(n)=n^3+6n^2-7n$

done

ja tutkitaan kaikki vaihtoehdot:

f(n)|n=6p

$$216\cdot p^3+216\cdot p^2-42\cdot p$$

factorOut(ans, 6)

$$6\cdot(36\cdot p^3+36\cdot p^2-7\cdot p)$$

f(n)|n=6p+1

$$(6\cdot p+1)^3+6\cdot(6\cdot p+1)^2-7\cdot(6\cdot p+1)$$

factorOut(ans, 6)

$$6\cdot(36\cdot p^3+54\cdot p^2+8\cdot p)$$

f(n)|n=6p+2

$$(6\cdot p+2)^3+6\cdot(6\cdot p+2)^2-7\cdot(6\cdot p+2)$$

factorOut(ans, 6)

$$6\cdot(36\cdot p^3+72\cdot p^2+29\cdot p+3)$$

f(n)|n=6p+3

$$(6\cdot p+3)^3+6\cdot(6\cdot p+3)^2-7\cdot(6\cdot p+3)$$

factorOut(ans, 6)

$$6\cdot(36\cdot p^3+90\cdot p^2+56\cdot p+10)$$

f(n)|n=6p+4

$$(6\cdot p+4)^3+6\cdot(6\cdot p+4)^2-7\cdot(6\cdot p+4)$$

factorOut(ans, 6)

$$6\cdot(36\cdot p^3+108\cdot p^2+89\cdot p+22)$$

f(n)|n=6p+5

$$(6\cdot p+5)^3+6\cdot(6\cdot p+5)^2-7\cdot(6\cdot p+5)$$

factorOut(ans, 6)

$$6\cdot(36\cdot p^3+126\cdot p^2+128\cdot p+40)$$

Kaikissa tapauksissa saadaan yhteiseksi tekijäksi luku 6 eli f(n) on jaollinen luvulla 6.

9.2 Tarkastellaan raja-arvoa

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^n - 60x - 8}{x^2 - 4}$$

eksponentin $n = 1, 2, 3, \ldots$ eri arvoilla.

a) Osoita, että raja-arvo on olemassa, kun $n = 7$.

b) Osoita, että raja-arvoa ei ole olemassa, kun $n \neq 7$.

9.2. Raja-arvo on olemassa, mikäli rationaalifunktion nimittäjän nollakohta saadaan supistettua. Nimittäjä on tulomuodossa (x−2)(x+2), joten raja-arvon kannalta tärkeä tulontekijä on x−2.

Nimittäjän tulontekijä x−2 supistuu, jos ja vain jos se on myös osoittajan tulontekijä eli x=2 on osoittajan nollakohta.

Kun n=7, niin osoittaja on $x^7-60x-8$ ja sijoittamalla tähän x=2 saadaan

$x^7-60x-8|x=2$

0

Siis raja-arvo on olemassa, kun n=7.

Kun n≠7, niin osoittajan alkuosa on luvun 2 potenssi (2, 4, 8, 16, 32, 64, 256, ...) ja siitä vähennettävä loppuosa (60*2+8)=128. Koska osoittajan alkuosaksi ei saada lukua 128 kun n≠7, niin lauseke ei supistu eikä raja-arvoa löydy.

B2-osa Ratkaise kolme tehtävistä 10–13.

10. Yhtälö $x = g(x)$ voidaan usein ratkaista *kiintopistemenetelmän* avulla. Tällöin tehdään alkuarvaus x_0 ja määritellään lukujono (x_n) käyttämällä palautuskaavaa

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad \text{kun} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Anna seuraavien kohtien vastauksina lukujen x_{10} likiarvot kolmen desimaalin tarkkuudella.

a) Ratkaise yhtälö

$$x = 2 + \ln x \qquad (*)$$

kiintopistemenetelmän avulla, kun alkuarvauksena on $x_0 = 1$.

b) Yhtälöllä $(*)$ on toinenkin ratkaisu. Muokkaa yhtälö $(*)$ eksponenttifunktion avulla toisenlaiseen kiintopistemenetelmässä käytettävään muotoon ja ratkaise se alkuarvauksella $x_0 = 1$.

a) Käytetään iteroitavana funktiona $g(x)=2+\ln(x)$. Vastaus saadaan iterointiketjun avulla

1	1
2+ln(ans)	2
2+ln(ans)	2.693147181
2+ln(ans)	2.990710465
2+ln(ans)	3.095510973
2+ln(ans)	3.129952989
2+ln(ans)	3.141017985
2+ln(ans)	3.144546946
2+ln(ans)	3.145669825
2+ln(ans)	3.146026848
2+ln(ans)	3.146140339

Siis $x_{10}\approx 3,146$.

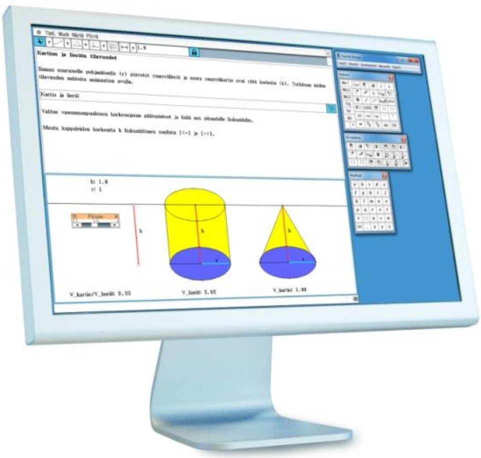
b) Ratkaistaan alkuperäisestä yhtälöstä iteroitava lauseke eri tavalla:

$x=2+\ln(x)$	$x=\ln(x)+2$
ans−2	$x-2=\ln(x)$
e^{ans}	$e^{x-2}=x$

Vastaava iterointiketju funktiolle $g(x)=e^{x-2}$:

1	1
e^{ans-2}	0.3678794412
e^{ans-2}	0.1955145342
e^{ans-2}	0.1645591061
e^{ans-2}	0.1595431447
e^{ans-2}	0.1587448861
e^{ans-2}	0.1586182172
e^{ans-2}	0.1585981265
e^{ans-2}	0.1585949401
e^{ans-2}	0.1585944348
e^{ans-2}	0.1585943547

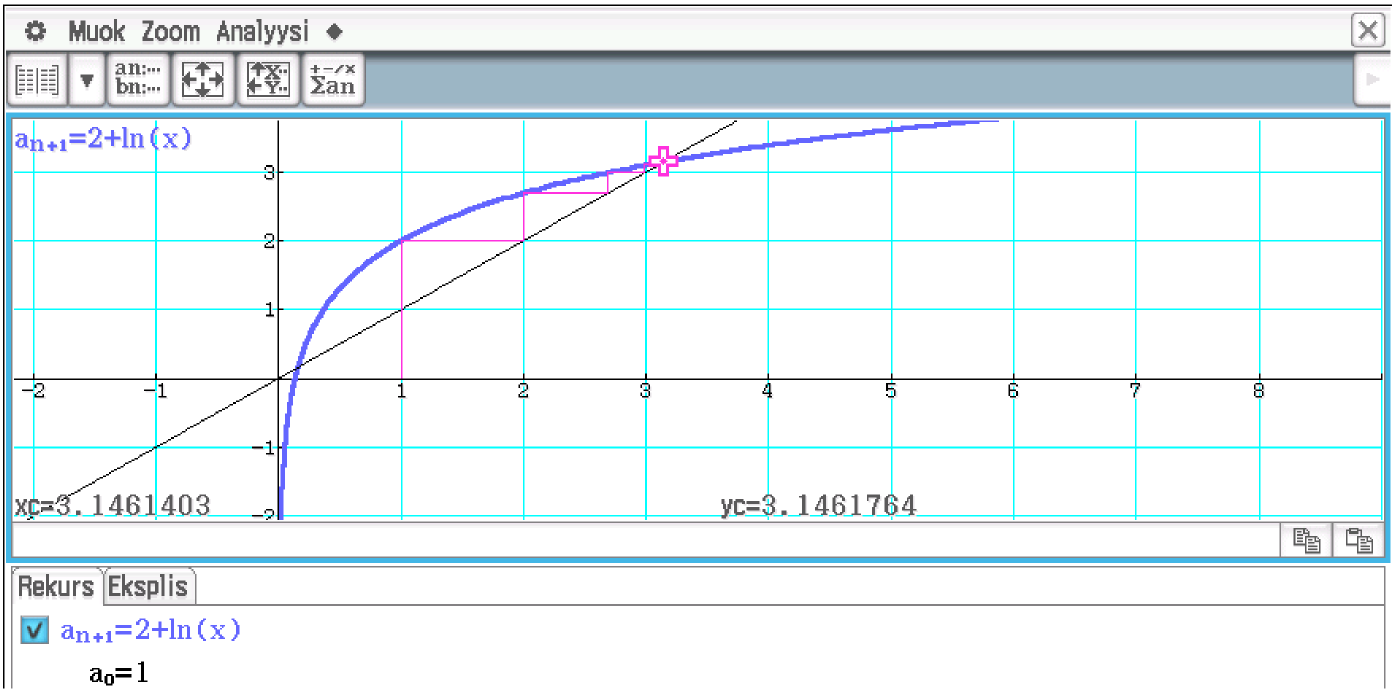
Luku $x_{10}\approx 0,159$.

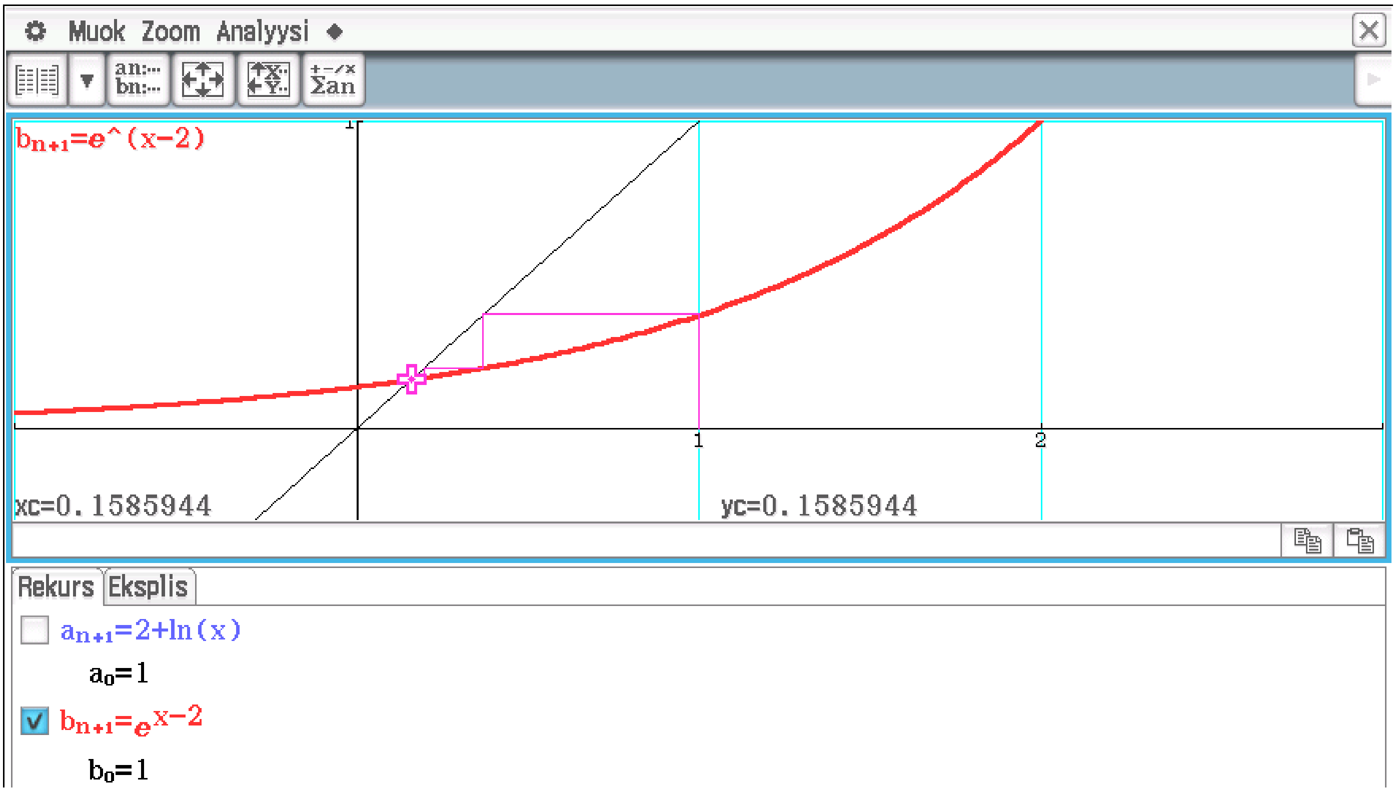


Lataa ilmainen testiversio ClassPad II Managerista

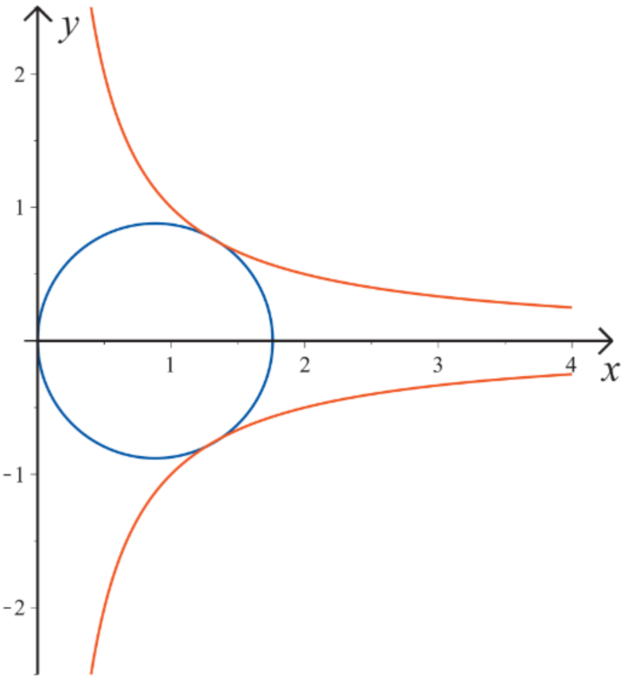
https://edu.casio.com/freetrial/fi/freetrial_list.php

Lukujono-sovelluksella voidaan suoraan muodostaa kiintopistemenetelmä graafisesti ja päätyä samaan ratkaisuun. Iterointiaskelia voi kulkea painamalla Enter (EXE) –näppäintä.





11. Ympyrä sivuaa y-akselia origossa sekä käyriä $y = \frac{1}{x}$ ja $y = -\frac{1}{x}$ alueessa $x > 0$. Määritä ympyrän säde.



Koska tapaus on x-akselin suhteen symmetrinen, tutkitaan x-akselin yläpuolelle jäävää puoliympyrää. Merkitään ympyrän sädettä r, keskipistettä K, ympyrän ja käyrän $y=\frac{1}{x}$, $x>0$, leikkauspistettä A ja pisteen A projektiopistettä x-akselilla B.

kuva =>

Nyt pisteen A koordinaatit ovat muotoa $(a, \frac{1}{a})$, $a>0$ ja janan KA kulmakerroin on

$$\frac{\frac{1}{a}-0}{a-r}$$

$$\frac{1}{a\cdot(a-r)}$$

Toisaalta janan KA kulmakerroin on kohtisuorassa pisteeseen A piirrettyä tangenttia vasten. Tangentin kulmakerroin kohdassa A on

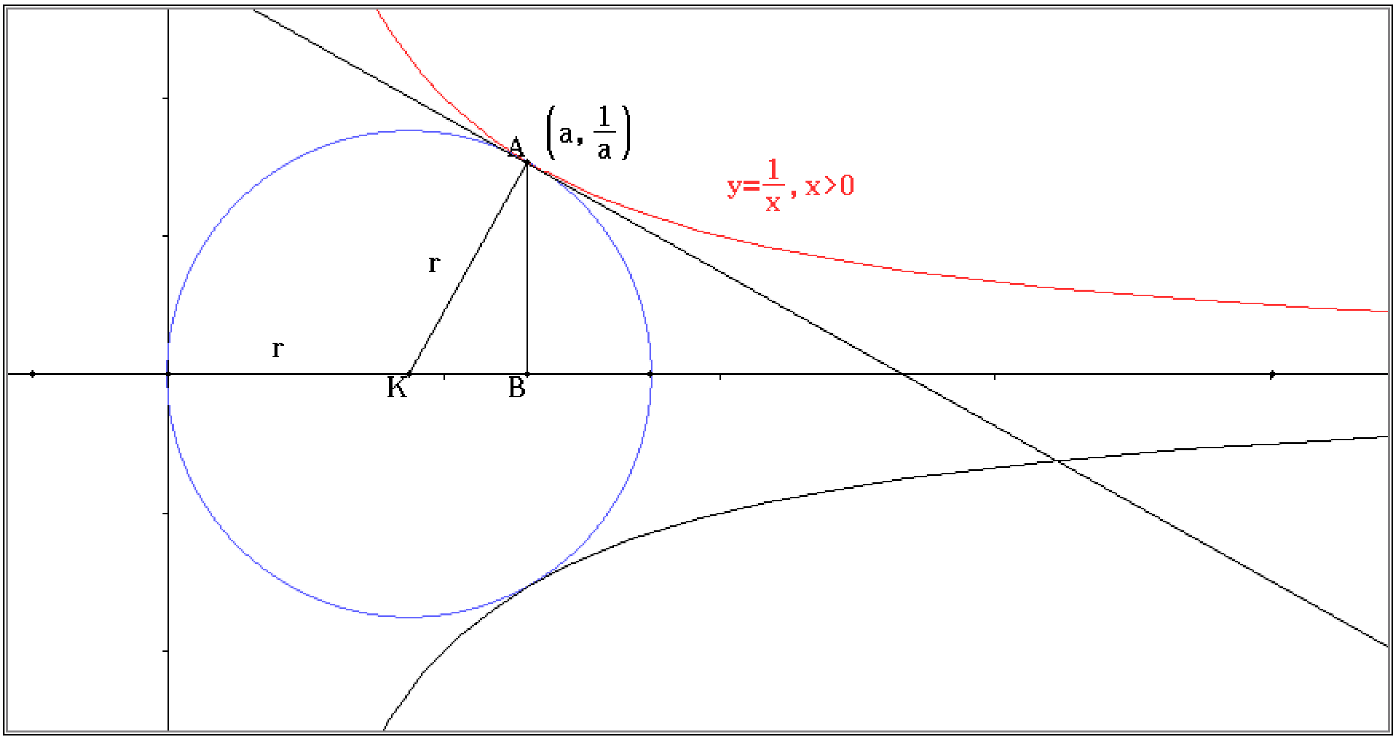
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)|x=a$$

$$\frac{-1}{a^2}$$

joten kohtisuoruusehdon mukaan janan KA kulmakerroin on a^2. Näistä ehdoista saadaan yhtälö, josta voidaan ratkaista r:

$$\text{solve}\left(\frac{1}{a\cdot(a-r)}=a^2, r\right)$$

$$\left\{r=a-\frac{1}{a^3}\right\}$$



Suorakulmaisesta kolmiosta ABK saadaan Pythagoraan lauseella ehto $r^2=\left(\frac{1}{a}\right)^2+(a-r)^2$.

Sijoitetaan tähän ehtoon saatu säteen r lauseke:

$$r^2=\left(\frac{1}{a}\right)^2+(a-r)^2 \mid \left\{r=a-\frac{1}{a^3}\right\}$$

$$\left(a-\frac{1}{a^3}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^6}$$

ja ratkaistaan saadusta yhtälöstä a:

$$\text{solve}\left(\left(a-\frac{1}{a^3}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^6}, a\right)$$

$$\left\{a=-3^{\frac{1}{4}}, a=3^{\frac{1}{4}}\right\}$$

Vain jälkimmäinen arvo käy. Ympyrän säde on

$$r=a-\frac{1}{a^3} \mid a=3^{\frac{1}{4}}$$

$$r=3^{\frac{1}{4}}-\frac{1}{27^{\frac{1}{4}}}$$

simplify(ans)

$$r=\frac{2\cdot 3^{\frac{1}{4}}}{3}$$

Vastaus: säde on $\frac{2\cdot 3^{\frac{1}{4}}}{3}$.

12. Tehtävässä tutkitaan tason yhtälön erilaisia esitysmuotoja.

a) Tarkastellaan yhtälöä

$$\overline{N} \cdot (\overline{r} - \overline{r}_0) = 0, \qquad (*)$$

kun

$$\begin{aligned} \overline{N} &= 3\,\overline{i} - 2\,\overline{j} + 5\,\overline{k}, \\ \overline{r} &= x\,\overline{i} + y\,\overline{j} + z\,\overline{k} \quad \text{ja} \\ \overline{r}_0 &= \overline{i} + 2\,\overline{j} + 3\,\overline{k}. \end{aligned}$$

Muunna yhtälö $(*)$ muotoon

$$ax + by + cz = d \qquad (**)$$

määrittämällä siinä esiintyvät vakiot a, b, c ja d.

b) Osoita, että piste $(1, 2, 3)$ toteuttaa yhtälön $(**)$ näillä vakioiden arvoilla.

c) Määritä uudet vektorit $\overline{N}$ ja $\overline{r}_0$, joilla yhtälö $2x - 5y + 7z = 14$ on yhtäpitävä muotoa $(*)$ olevan yhtälön kanssa.

a) Vektorin N on oltava tason normaalivektori, koska sen pistetulo tason vektoria vastaan on nolla. Tason tunnetun pisteen paikkavektorista r_0 saadaan yhden tason pisteen koordinaatit.

Normaalivektorista saadaan tason koordinaattimuodon kertoimet, jolloin taso saadaan muotoon 3x−2y+5z=d. Sijoitetaan tason yhtälöön tasossa olevan pisteen koordinaatit d:n ratkaisemiseksi:
3x−2y+5z=d|{x=1, y=2, z=3}

14=d

Tason yhtälö on siis 3x−2y+5z=14.

b) Sijoittamalla pisteen koordinaatit tason yhtälöön saadaan tosi väite: 3*1−2*2+5*3=14.

c) Tason koordinaattimuodosta nähdään normaalivektori: N=2i−5j+7k. Sijoittamalla helpot x− ja y−koordinaatit (0, 0) tason yhtälöön, nähdään että 2*0−5*0+7z=14 on tosi vain, jos z=2. Siis yksi tason pisteistä on (0, 0, 2) ja vektoriksi käy r_0=2k.

YO-ratkaisut netissä: http://www.casio-laskimet.fi/fi/opettajakoulu/opetusmateriaalia/

Laskuvinkkejä YouTubessa: http://bit.ly/fx-cp400

13. Reaaliluku on *algebrallinen*, jos se on jonkin kokonaislukukertoimisen polynomin nollakohta. Tällaiset polynomit ovat muotoa

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

kun polynomin asteluku on $n = 1, 2, 3, \ldots$ ja kertoimet $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat kokonaislukuja. Osoita, että luku x on algebrallinen johtamalla jonkin sopivan polynomin lauseke, kun

a) $x = \frac{2}{3}$ (1 p.)

b) $x = \sqrt{3}$ (1 p.)

c) $x = 2 + \sqrt{3}$ (1 p.)

d) $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. (3 p.)

a) Muokataan yhtälöä

$f(x)=x-\frac{2}{3}$

$$f(x)=x-\frac{2}{3}$$

ans*3

$$3\cdot f(x)=3\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

expand(ans)

$$3\cdot f(x)=3\cdot x-2$$

Polynomiksi käy $P(x)=3x-2$.

b) Esim. $P(x)=x^2-3$ on tekijämuodossa summan ja erotuksen tulon avulla

rFactor(x^2-3)

$$(x+\sqrt{3})\cdot(x-\sqrt{3})$$

joten esimerkiksi $P(x)=x^2-3$

c) Siirtämällä termi saadaan yhtälö muokattua muotoon

$x-2=\sqrt{3}$

$$x-2=\sqrt{3}$$

ans^2

$$(x-2)^2=3$$

expand(ans)

$$x^2-4\cdot x+4=3$$

rewrite(ans)

$$x^2-4\cdot x+1=0$$

Tämä toteuttaa tehtävän ehdot ja yksi esimerkki on $P(x)=x^2-4\cdot x+1$.

CASIO

d) Muokataan yhtälöä

$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$$x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

ans^2

$$x^2=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$$

expand(ans)

$$x^2=2\cdot\sqrt{6}+5$$

ans−5

$$x^2-5=2\cdot\sqrt{6}$$

ans^2

$$(x^2-5)^2=24$$

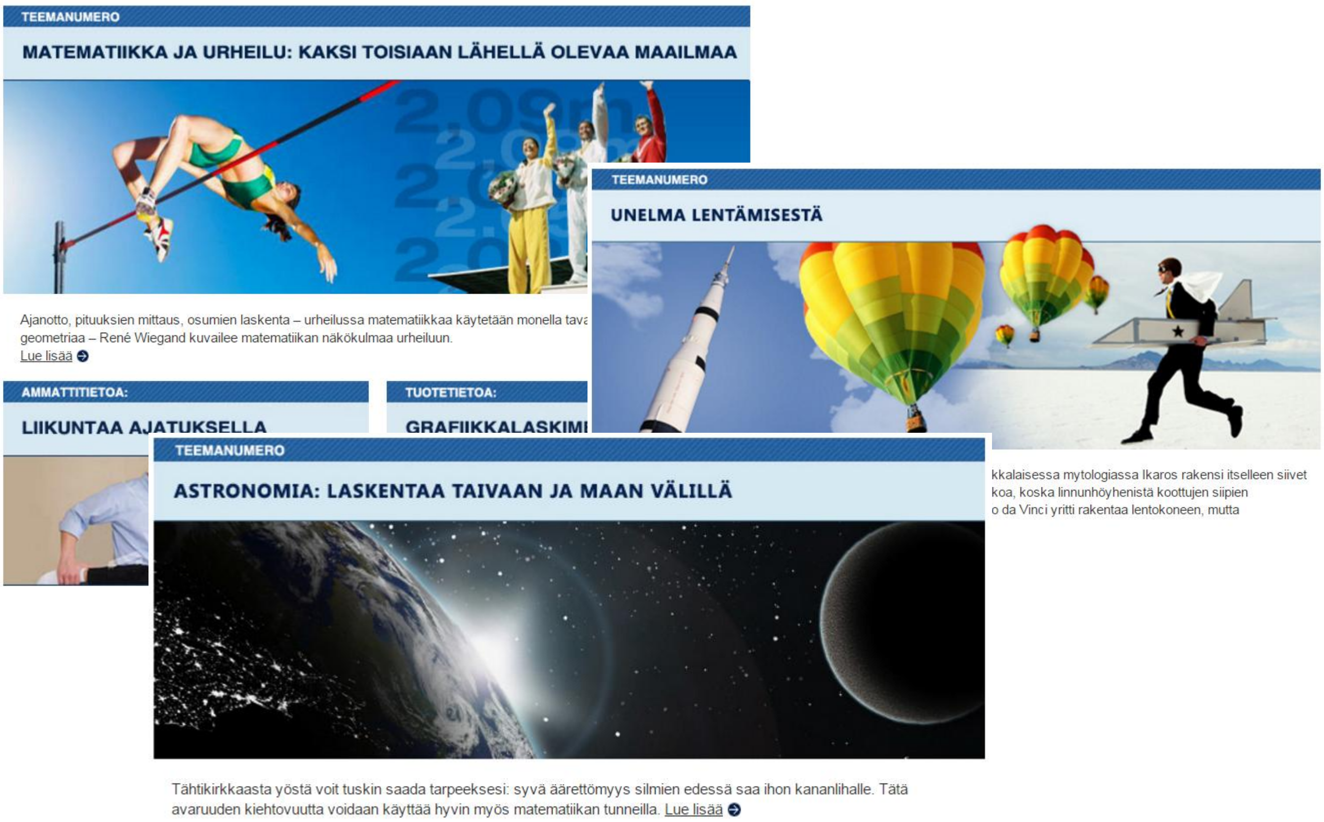
expand(ans)

$$x^4-10\cdot x^2+25=24$$

rewrite(ans)

$$x^4-10\cdot x^2+1=0$$

Yksi esimerkki kysytyksi polynomiksi on $P(x)=x^4-10\cdot x^2+1$.



Lisää teemaosioita

http://www.casio-laskimet.fi/fi/opettajakoulu/opettajalle5/