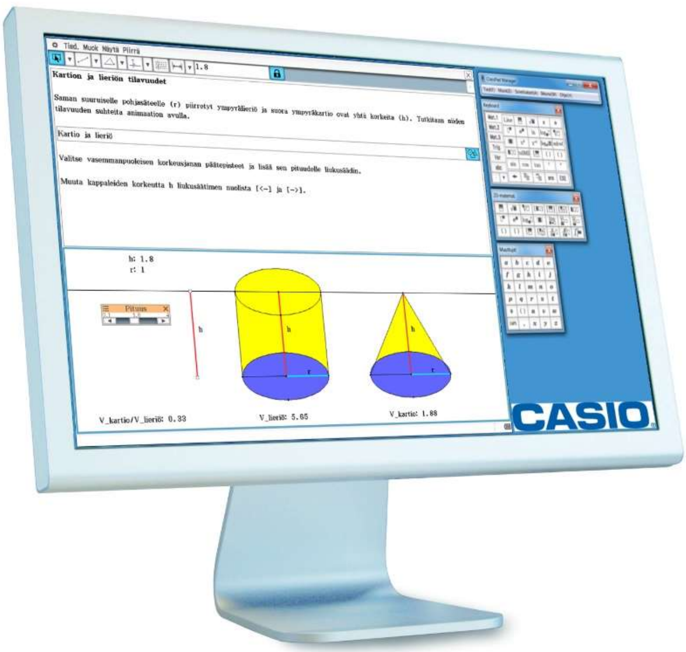
CASIO

Laske Laudatur ClassPadilla
Lyhyt matematiikka, syksy 2021



Tiivistelmä

Syksyn 2021 sähköisten yo-kokeiden ratkaisut ClassPad Managerilla laskettuina.

Pepe Palovaara

pepe.palovaara@fintegrity.fi

A-osa

Vastaa neljään tehtävään.

1. Lausekkeita ja yhtälöitä 12 p.

Valitse oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 3 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

1.1 Mikä on lausekkeen $2x + 8$ arvo, kun $x = -3$? **3 p.**

2

1.2 Aritmeettisen lukujonon (a_n) yleinen termi on $a_n = 3n + 9, n = 1, 2, 3, \ldots$ Mikä on indeksin n pienin arvo, jota vastaava termi a_n on suurempi kuin 100? **3 p.**

$n = 31$

1.3 Yhtälö $x^2 - 4x = 0$ toteutuu **3 p.**

arvoilla $x = 0$ ja $x = 4$

1.4 Yhtälöparilla **3 p.**

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$$

on täsmälleen yksi ratkaisu

2. Pituuksia ja pinta-aloja 12 p.

Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset ilman välivaiheita ja perusteluja. Tehtävässä ei voi käyttää kuvakaappauksia eikä kaavaeditoria. Kunkin vastauksen maksimipituus on 10 merkkiä. Vastaukset arvostellaan tietokoneavusteisesti ja ohjeiden noudattamatta jättäminen voi johtaa pistevähennyksiin. Jokaisesta kohdasta voi saada 3 pistettä.

2.1 Suorakulmion lävistäjän pituus on 5,0 cm ja lyhyemmän sivun pituus 2,0 cm. Määritä suorakulmion pidemmän sivun pituus millimetrin tarkkuudella. **3 p.**

Vastaus: 46 mm

2.2 Suorakulmion yhden sivun pituus on 5,0 cm, ja se muodostaa 35° kulman suorakulmion lävistäjän kanssa. Laske suorakulmion piiri millimetrin tarkkuudella. **3 p.**

Vastaus: 170 mm

2.3 Vinoneliö (eli neljäkäs) on suunnikas, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkiä. Vinoneliön lävistäjät leikkaavat toisensa kohtisuoraan ja niiden pituudet ovat 2,0 cm ja 5,0 cm. Määritä vinoneliön pinta-ala yhden neliösenttimetrin tarkkuudella. **3 p.**

Vastaus: 5 cm^2

2.4 Ympyräsektorin säde on 3,00 cm ja keskuskulma 26,0°. Määritä sektorin pinta-ala 0,01 cm^2:n tarkkuudella. **3 p.**

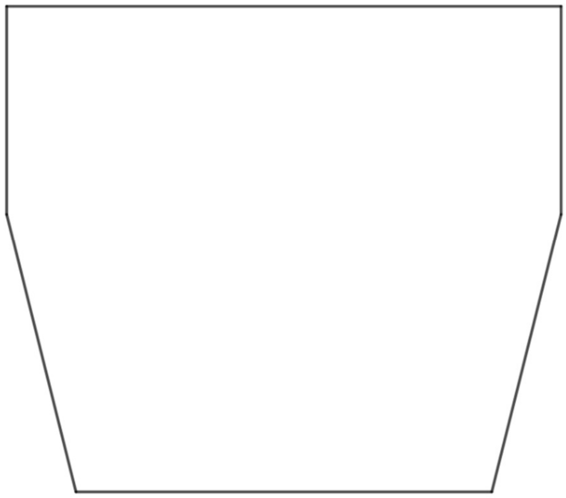
Vastaus: 2,04 cm^2

3. Kukkaruukku 12 p.

Aineisto

3.A Kuva: Kukkaruukun poikkileikkaus

Kukkaruukun pystysuora poikkileikkaus ja sisämitat on esitetty kuvassa 3.A. Kukkaruukun alaosa on suora katkaistu ympyräpohjainen kartio. Kukkaruukun pohjan halkaisija on 30 cm. Kukkaruukun alaosa levenee, kunnes se yhtyy kukkaruukun yläosaan, joka on suora ympyräpohjainen lieriö, jonka halkaisija on 40 cm. Kukkaruukun alaosan korkeus on 20 cm ja yläosan korkeus 15 cm. Laske kukkaruukun tilavuus.



Yläosan muodostavan ympyrälieriön tilavuus on $\pi \cdot 20^2 \cdot 15\ cm^3$ ja alaosan katkaistun kartion tilavuus on $\frac{20\pi}{3} \cdot \left(20^2 + 15^2 + 20 \cdot 15\right) cm^3$. Näiden yhteenlaskettu tilavuus on $\frac{36500\pi}{3} \approx 38\ 000\ cm^3$.

4. Lukujono 12 p.

Rekursiivinen lukujono (a_n) on määritelty seuraavalla tavalla: $a_1 = 3$, ja $a_{n+1} = 2a_n - 1$, kun $n \geq 1$.

1. Laske a_2, a_3 ja a_4. **(4 p.)**
2. Miksi lukujono (a_n) ei ole aritmeettinen eikä geometrinen? Voit käyttää perusteluissa esimerkiksi kohdassa 4.1 laskettuja lukuja. **(8 p.)**

1. $a_2 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$

$a_3 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$

$a_4 = 2 \cdot 9 - 1 = 17$

2. Peräkkäisten jäsenten suhde ei ole vakio, koska $\frac{17}{9} \neq \frac{9}{5}$. Tämän vuoksi jono ei ole geometrinen. Peräkkäisten jäsenten erotus ei ole vakio, koska $17 - 9 \neq 9 - 5$. Tämän vuoksi jono ei ole aritmeettinen.

B1-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

5. Hampaiden harjaajat 12 p.

Hammaslääkäriliiton suositusten mukaan hampaita on harjattava kahdesti päivässä kaksi minuuttia kerrallaan. Lisäksi aikuisten tulee huolehtia lasten hampaiden harjaamisesta. Virtasen perheessä on neljä lasta, isä ja äiti. Hampaiden harjausvastuu on jaettu tasan molempien vanhempien kesken, eli kumpikin vanhempi harjaa omat sekä kahden lapsen hampaat. Kuinka monta tuntia vuodessa perheen isä viettää hampaita harjaten?

Perheen isällä kuluu hampaiden harjaukseen tunteina vuodessa

365*3*2*2/60

73

Vastaus: 73 tuntia.

6. Esteratsastus 12 p.

Esteratsastus on kehittynyt hevosten suorituskyvyn parantuessa, ja hevosten suoriutumista on myös tutkittu kokeellisesti. On selvinnyt, että parhaimman ponnistuskohdan ja esteen välinen etäisyys d saadaan kertomalla esteen korkeus h luvulla 1,3 ja lisäämällä tulokseen 20 cm.

1. Mikä on etäisyys d, kun esteen korkeus on 140 cm? **(3 p.)**
2. Kuinka korkean esteen hevonen ja ratsastaja yrittävät ylittää, jos hevosen ponnistuskohdan etäisyys esteeseen on 215 cm? **(3 p.)**
3. Määritä etäisyyden d lauseke esteen korkeuden h funktiona. **(3 p.)**
4. Määritä esteen korkeuden h lauseke etäisyyden d funktiona. **(3 p.)**

Tehtävän ehdoista saadaan yhteys d=1.3h+20.

1. Sijoitetaan yhtälöön h=140:

d=1.3h+20|h=140

d=202

2. Sijoitetaan yhtälöön d=215 ja ratkaistaan h:

solve(d=1.3h+20,h)|d=215

{h=150}

3. Etäisyyden d lauseke korkeuden h funktiona on d=1.3h+20.

4. Ratkaistaan yhtälöstä h:

solve(d=1.3h+20,h)

$$\left\{h=\frac{10\cdot d}{13}-\frac{200}{13}\right\}$$

Vastaus: 1. 202 cm. 2. 150 cm. 3. d=1.3h+20. 4. $h=\frac{10\cdot d}{13}-\frac{200}{13}$.

7. Kananmunien hintamuutos 12 p.

Kananmunien kilohinta kaupassa on 3,50 euroa ilman arvonlisäveroa. Hinnasta 35 % saa alkutuotanto, 25 % pakkaamo ja 40 % kauppa. Kauppa alentaa kananmunien hintaa 10 %. Kuinka monta prosenttia kunkin toimijan saama korvaus laskee, jos euromääräinen hinnanalennus jaetaan tasan kaikkien kolmen toimijan kesken?

Kaupan antama 10% alennus euromääräisenä jaettuna kolmelle toimijalle on

$$\frac{0.10*3.50}{3}$$

$$\frac{7}{60}$$

Lasketaan kuinka monikertaiseksi kunkin toimijan korvaus muuttuu jakamalla uusi korvaus alkuperäisellä ja muutetaan kerroin prosentiksi.

Alkutuotanto:

$$\frac{0.35*3.50-\frac{7}{60}}{0.35*3.50}$$

$$0.9047619048$$

$$(1-0.9047619048)*100$$

$$9.52380952$$

Pakkaamo:

$$\frac{0.25*3.50-\frac{7}{60}}{0.25*3.50}$$

$$0.8666666667$$

$$(1-0.8666666667)*100$$

$$13.33333333$$

Kauppa:

$$\frac{0.40*3.50-\frac{7}{60}}{0.40*3.50}$$

$$0.9166666667$$

$$(1-0.9166666667)*100$$

$$8.33333333$$

Vastaus: Korvaukset vähenivät alkutuotannossa n. 9,5%, pakkaamossa n. 13.3% ja kaupassa 8.3%.

CASIO

8. Huippuparaabeli 12 p.

Millä parametrien b ja c arvoilla paraabelin $y = -x^2 + bx + c$ huippu on pisteessä $(2, 1)$? Perustele vastauksesi derivaatan avulla.

Paraabelin huipun x−koordinaatti on sen derivaatan nollakohta. Muodostetaan yhtälö

$\frac{d}{dx}(-x^2+b*x+c)=0$

$$-2\cdot x+b=0$$

ja ratkaistaan siitä x, jolloin nähdään milloin derivaatta saa arvon 0:

solve$(-2\cdot x+b=0, x)$

$$\left\{x=\frac{b}{2}\right\}$$

Koska tehtävässä annettiin huipun x−koordinaatiksi 2, saadaan ratkaistua b:

solve$(2=\frac{b}{2}, b)$

$$\{b=4\}$$

Käyrällä olevan pisteen koordinaatit toteuttavat aina käyrän yhtälön, joten saadaan yhtälö parametrin c ratkaisemiseksi:

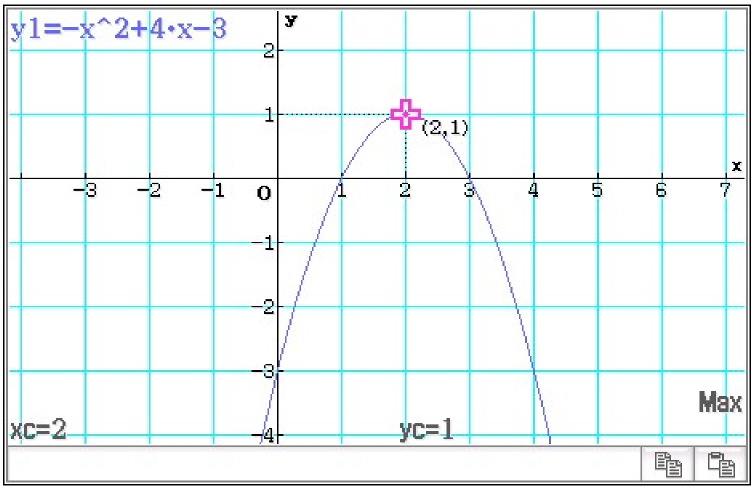
$y=-x^2+4*x+c \mid \{x=2, y=1\}$

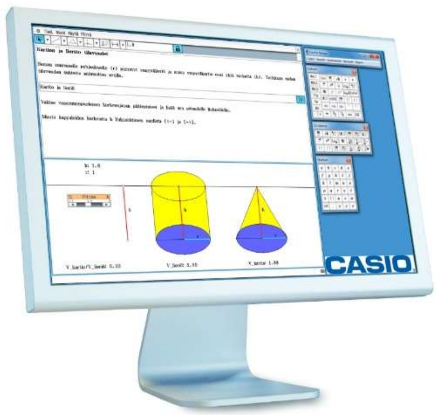
$$1=c+4$$

solve$(1=c+4, c)$

$$\{c=-3\}$$

Vastaus: b=4 ja c=−3.





Laskujen tarkistaminen graafisesti kannattaa aina. Kuvaajan vertaaminen tehtävään ja omaan vastaukseen auttaa vahvistamaan laskut oikeiksi – tai löytämään mahdollisen virheen.

9. Noppatilastoja 12 p.

Aineisto

9.A Taulukko: Noppatilasto

Tämä tehtävä on tarkoitettu ohjelmistolla ratkaistavaksi. Vastaukset voi antaa likiarvoina, ja perusteluiksi riittävät kuvakaappaukset tai selitykset, joista ilmenee, mitä on tehty.

Opiskelijat yrittivät selvittää, minkälaisen jakauman viiden nopan silmäluvun summa toteuttaa. He heittivät 100 kertaa viittä noppaa ja kirjasivat tulokset, ks. taulukko 9.A. Laskemalla jokaisen heittokerran viiden nopan silmäluvut yhteen saadaan *summamuuttuja*.

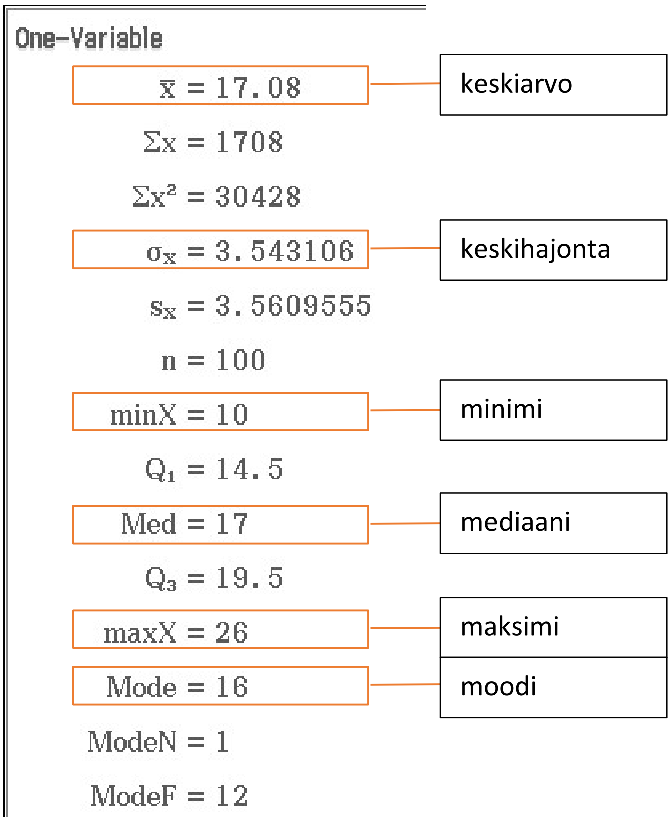
1. Määritä tämän summamuuttujan minimi, maksimi, moodi, mediaani, keskiarvo ja keskihajonta. **(6 p.)**
2. Piirrä tämän summamuuttujan jakauman pylväskaavio. **(3 p.)**
3. Muistuttaako jakauma enemmän normaalijakaumaa vai tasaista jakaumaa? **(3 p.)**

ClassPad Managerin taulukkolaskennassa kirjoitetaan soluun G1 otsikoksi Summa ja soluun G2 kaavaksi =B2+C2+D2+E2+F2. Kaava kopioidaan soluihin G3-G101, jolloin vastaavat silmälukujen summat päivittyvät automaattisesti.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Heitto	Noppa 1	Noppa 2	Noppa 3	Noppa 4	Noppa 5	Summa		
2	1	3	6	4	3	5	21		
3	2	4	1	3	1	1	10		
4	3	4	3	6	4	1	18		
5	4	6	5	6	5	4	26		
6	5	6	3	1	5	5	20		
7	6	2	1	4	6	2	15		
8	7	3	3	4	1	3	14		
9	8	6	2	1	2	3	14		
10	9	6	4	4	3	5	22		
11	10	5	4	4	4	3	20		
12	11	3	2	1	4	2	12		
13	12	3	2	6	2	4	17		
14	13	1	3	6	5	3	18		
15	14	3	2	1	5	2	13		
16	15	6	1	2	6	2	17		
17	16	3	2	5	1	1	12		
18	17	6	4	5	1	2	18		
19	18	6	5	4	2	2	19		
20	19	3	1	6	6	1	17		
21	20	3	4	6	2	6	21		
22	21	1	5	3	4	1	14		
23	22	4	1	1	4	5	15		
24	23	2	4	5	6	5	22		
25	24	4	6	4	2	6	22		

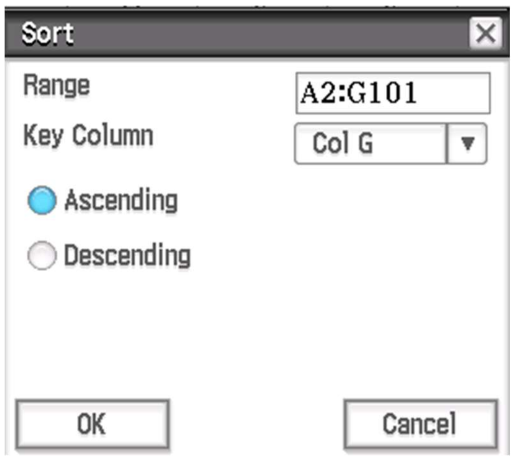
Summa

CASIO

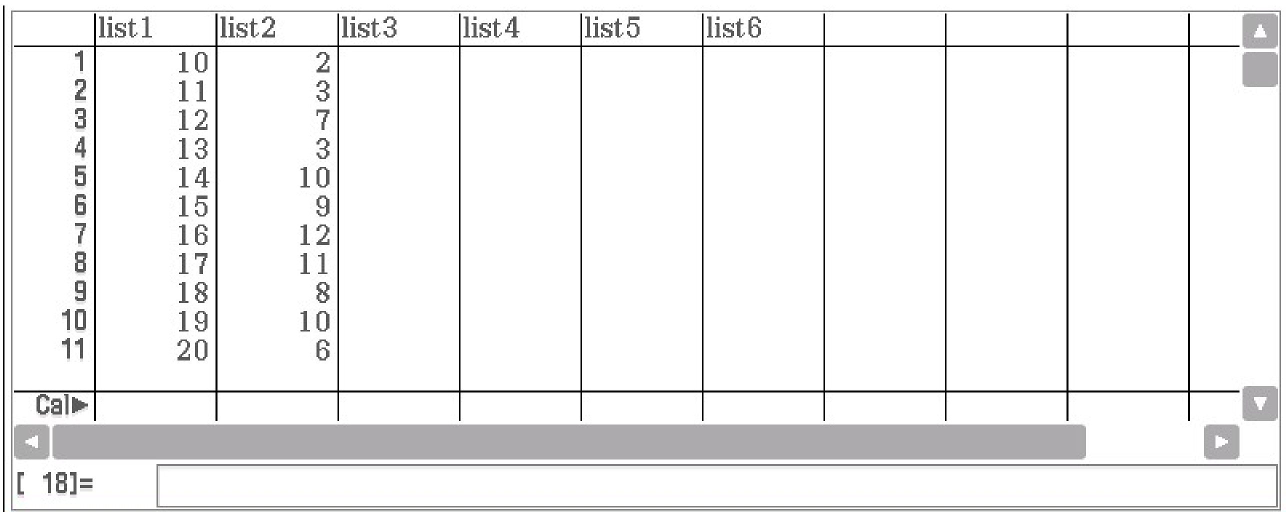


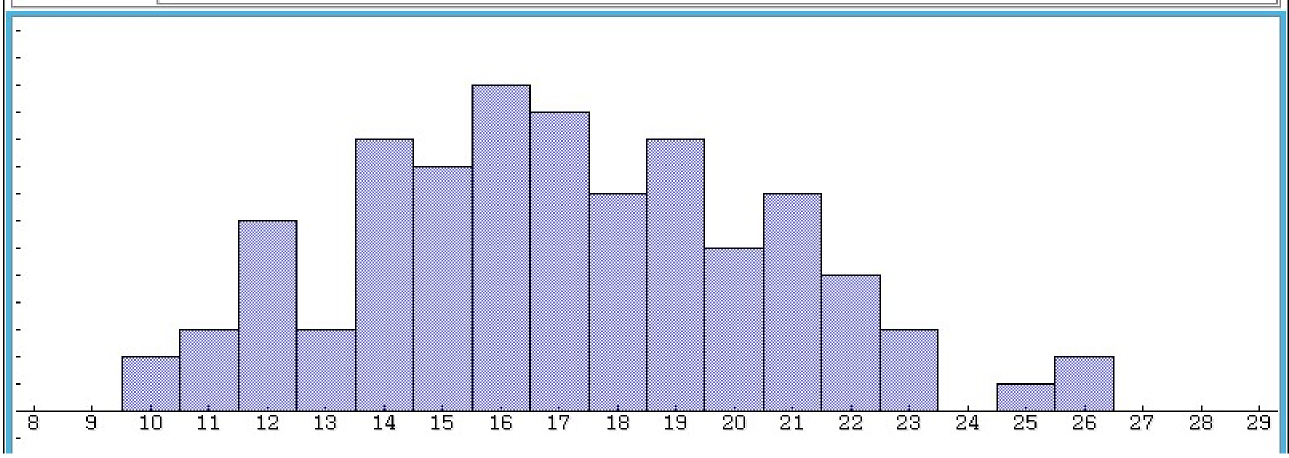
Valitaan sarake G ja valikosta Calc yhden muuttujan tilastolaskut One-Variable. Tulos näkyy vieressä.

Jatketaan järjestetämällä taulukon luvut pienimmästä suurimpaan valikosta Edit > Sort/Search > Sort sarakkeen G mukaan.



Kuten ylläolevasta tilastoanalyysistä nähdään, on summien arvot välillä 10-26. Syötetään ***tilastosovellukseen*** vastaavat arvot listaan 1 ja lasketaan niille frekvenssit listaan 2. ***Vinkki***: lukujen syöttäminen voidaan tehdä automaattisesti ”Täytä jono” -toiminnolla (englanniksi ”Fill Sequence”).





Piirretään lopuksi pylväskaavio, jonka kuva on edellisellä sivulla.

Tulos muistuttaa enemmän normaalijakaumaa, koska suurin osa aineistosta on painottunut keskiarvon molemmin puolin ja frekvenssit pienenevät ääripäitä kohti. Tasaisessa jakaumassa pylväät olisivat yhtä korkeat.

Casio Academy

Katso esimerkkejä ja yo-tehtävien ratkaisuja kätevästi videoiden avulla. Helppo tapa kerrata lukion matematiikkaa!

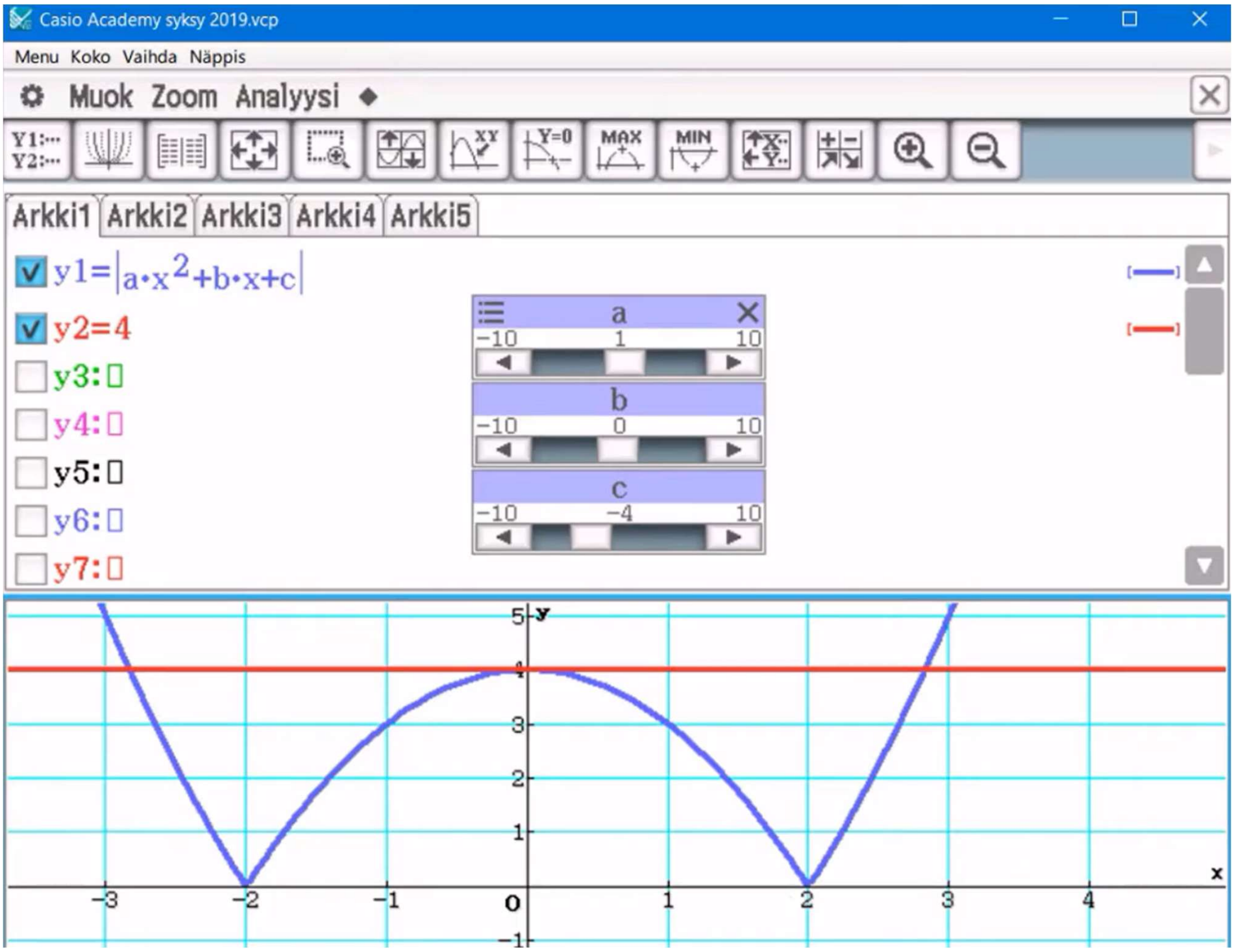
Opiskelijoiden tueksi on rakennettu kattava videoarkisto YouTubeen osoitteeseen

bit.ly/casio-academy

Videoiden soittolistalle on kerätty esimerkkejä lyhyen ja pitkän matematiikan keskeisistä esimerkeistä ja aiemmista yo-koetehtävistä.

Kertaa matematiikan kokeisiin katsomalla videot laskinohjelman käytöstä ja ota iso askel kohti tavoitteitasi!

Alla on esimerkki videosta syksyn 2019 lyhyen matematiikan tehtävän ratkaisuun. Tehtävässä on hyödynnetty liukupalkkeja tuntemattomien kertoimien ratkaisemiseksi. Tehtävä on samankaltainen tämän vuoden tehtävän 8 kanssa.



CASIO

B2-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

10. Kasvihuonekaasujen vähentäminen 12 p.

Aineisto

10.A Teksti: Ehdotus Euroopan parlamentin ja neuvoston direktiiviksi [...]

Teksti 10.A käsittelee EU:n pyrkimyksiä vähentää kasvihuonekaasupäästöjä EU:n alueella. Jotta pitkän aikavälin tavoitteet saavutetaan, EU suunnitteli kiristävänsä rajoituksia aikavälille 2021–2030 tekstin kuvailemalla tavalla.

1. Laadi indeksisarja kasvihuonekaasupäästöjen enimmäismäärästä uuden päästörajan mukaisesti ja käytä indeksivuotena vuotta 2021. Vuoden 2021 indeksin arvo on siis 100. **(4 p.)**
2. Kuinka monta prosenttia kokonaispäästötavoite vähenee uuden päästörajan vaikutuksesta kymmenen vuoden ajanjakson 2021–2030 aikana? **(4 p.)**
3. Kuinka monta prosenttia pienempi on päästötavoite vuonna 2030 uuden päästörajan vuoksi verrattuna siihen, että raja olisi säilytetty ennallaan? **(4 p.)**

10.A Teksti: Ehdotus Euroopan parlamentin ja neuvoston direktiiviksi [...]

Keskeinen osa vuoteen 2030 ulottuvia politiikan puitteita on sitova tavoite siitä, että EU:n kasvihuonekaasupäästöjen kokonaismäärää vähennetään ainakin 40 prosenttia vuoden 1990 tasosta vuoteen 2030 mennessä. Jotta tämä voidaan saavuttaa kustannustehokkaasti, EU:n päästökauppajärjestelmän kattamilla aloilla päästöjä on vähennettävä 43 prosentilla vuoteen 2005 verrattuna, kun taas EU:n päästökauppajärjestelmän ulkopuolisilla aloilla päästöjä on vähennettävä 30 prosentilla vuoteen 2005 verrattuna. [...]

Ehdotuksella muunnetaan vuoteen 2030 saavutettava tavoite kasvihuonekaasujen vähentämisestä 43 prosentilla katoksi, jota alennetaan 2,2 prosentilla vuosittain vuodesta 2021 alkaen, mikä tarkoittaa noin 556 miljoonan tonnin lisävähennystä hiilidioksidipäästöissä kaudella 2021–2030 verrattuna tämänhetkiseen [vuosi 2015] vuosittaiseen 1,74 prosentin vähennykseen.

Lähde: https://data.consilium.europa.eu/doc/document/ST-11065-2015-INIT/fi/pdf. Viitattu: 19.9.2020.

1. Jokainen vuosi saadaan edellisestä kertomalla luvulla 0.978, mikä vastaa 2.2% vuotuista alenemista. Tehdään indeksisarja taulukkolaskentaohjelman sarakkeeseen B merkitsemällä vuoden 2021 indeksiä 100 ja kertomalla aina edellisen vuoden indeksi luvulla 0.978. Valitaan asetuksista yhden desimaalin tarkkuus vastauksen näyttämiseen.

	A	B	C
1	Vuosi	Nykyinen	Entinen
2	"2021"	100.0	100.0
3	"2022"	97.8	98.3
4	"2023"	95.6	96.6
5	"2024"	93.5	94.9
6	"2025"	91.5	93.2
7	"2026"	89.5	91.6
8	"2027"	87.5	90.0
9	"2028"	85.6	88.4
10	"2029"	83.7	86.9
11	"2030"	81.9	85.4

2. Vuoden 2030 indeksin 81.9 mukaisesti vähennystä on tapahtunut

100−81.9

18.1

eli noin. 18.1%.

3. Vanhan päästötavoitteen eli 1.74% vuotuisen vähennyksen mukaisesti vuoden 2030 indeksin arvo on laskettu kohdan 1 indeksisarjan viereen sarakkeeseen C. Tämän mukaan entisillä päästötavoitteilla vuoden 2030 indeksi olisi noin 85.3868197 ≈ 85.4 kun taas uusien päästötavoitteiden mukainen vuoden 2030 indeksi on noin 81.85584443 ≈ 81.9. Uusi tavoitteen suhde aiempaan on

$$\frac{81.85584443}{85.3868197}$$

0.9586473032

mikä vastaa prosentteina

(1−0.9586473032)*100

4.13526968

noin 4.1% pienempiä päästötavoitteita.

11. Viiden luvun mediaani 12 p.

Lukujen

$$x+1, \quad 2x+5, \quad 3x-2, \quad 4x+1 \quad \text{ja} \quad 5x^2$$

keskiarvo on 1.

Määritä näiden lukujen mediaanin kaikki mahdolliset arvot.

Ratkaistaan yhtälö, jossa lukujen keskiarvoksi on asetettu 1:

$$\text{solve}\left(\frac{x+1+2x+5+3x-2+4x+1+5x^2}{5}=1, x\right)$$

{x=−2, x=0}

Sijoitetaan vastaukset annettuihin lukuihin, jolloin saadaan kaksi eri mahdollisuutta.

x=0: Luvut pienimmästä suurimpaan ovat −2, 0, 1, 1, 5 ja mediaani on 1.

x=−2: Luvut pienimmästä suurimpaan ovat −8, −7, −1, 1, 20 ja mediaani on −1.

x+1 | x=0	1
2x+5 | x=0	5
3x−2 | x=0	−2
4x+1 | x=0	1
$5x^2$ | x=0	0

x+1 | x=−2	−1
2x+5 | x=−2	1
3x−2 | x=−2	−8
4x+1 | x=−2	−7
$5x^2$ | x=−2	20

12. Tornin rakentaminen 12 p.

Linnaan rakennetaan katkaistun pyramidin muotoista tornia. Tornin korkeudeksi on suunniteltu 10 metriä ja seinän leveydeksi tornin huipulla 80 % leveydestä tornin juurella. Saatavilla oleva rakennusmateriaali rajoittaa tornin seinien pinta-alan 120 neliömetriin. Laske seinän leveys tornin juurella.

Merkitään tornin juurella olevan seinän leveyttä a, jolloin huipulla olevan seinän leveys on 0.8a. Tornin seinät ovat muodoltaan puolisuunnikkaita ja seinän korkeus saadaan Pythagoraan lauseesta $\sqrt{10^2+(0.1a)^2}$.

Puolisuunnikkan ala on sen korkeus kerrottuna yhdensuuntaisten sivujen keskiarvolla $\sqrt{10^2+(0.1a)^2} * \frac{a+0.8a}{2}$.

Koska seiniä on neljä ja niiden ala on 120 m^2, voidaan a>0 ratkaista yhtälön avulla:

solve$(4*\sqrt{10^2+(0.1a)^2} * \frac{a+0.8a}{2}=120, a) | a>0$

$$\left\{a=\frac{10\cdot\sqrt{30\cdot(\sqrt{226}-15)}}{3}\right\}$$

ans

$$\{a=3.331485073\}$$

Vastaus: Seinän leveys tornin juurella on n. 3,3 metriä.

13. Noppapeli 12 p.

Eräässä pelissä aloittava pelaaja A heittää tavallista noppaa. Mikäli hänen tuloksensa on 1 tai 2, hän voittaa pelin. Muussa tapauksessa pelaaja B heittää samaa noppaa. Mikäli hänen tuloksensa on 1, 2 tai 3, hän voittaa. Muussa tapauksessa peli päätyy tasapeliin, eikä kumpikaan voita. Laske pelaajien A ja B todennäköisyydet voittaa peli.

P("Pelaaja A voittaa")=P("A heittää 1 tai 2")$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

P("Pelaaja B voittaa")=P("A ei voita ja B heittää 1, 2 tai 3")$=\frac{2}{3}*\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$.

Vastaus: Molempien voiton todennäköisyys on $\frac{1}{3}$.

Tukivideoita, tuotetietoja ja esim. aiempien vuosien yo-kokeiden ratkaisuvihkot löydät sivulta

https://www.casio-laskimet.fi