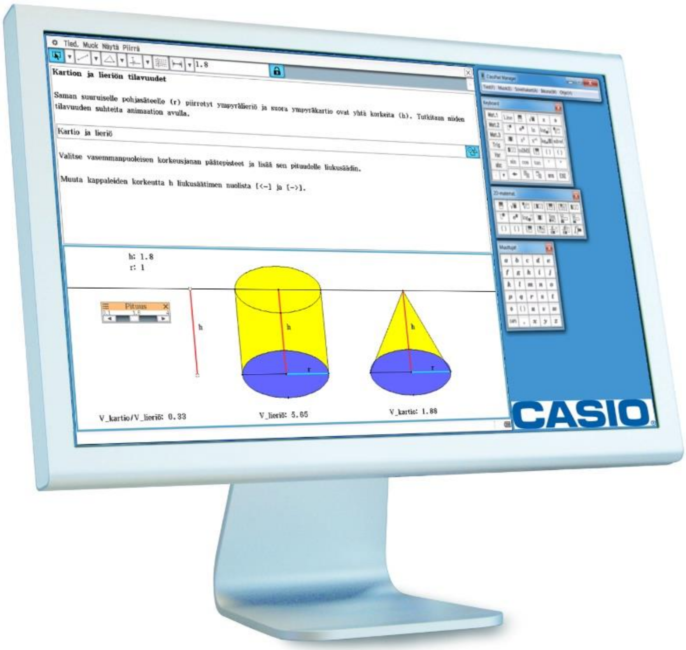
Laske Laudatur ClassPadilla

CASIO



Lyhyt matematiikka, kevät 2019

Tiivistelmä

Syksyn 2019 sähköisten yo-kokeiden ratkaisut ClassPad Managerilla laskettuina. Laskujen tiedostot ovat ladattavissa Casion tukisivuilta osoitteesta https://www.casio-laskimet.fi

Pepe Palovaara

pepe.palovaara@casio.fi

Hyvä lukija,

Kädessäsi on järjestyksessään toinen sähköinen matematiikan yo-koe. Kokeen rakenne oli entisellään ja jokaisen tehtävän maksimipistemäärä oli 12. Aiempaan tapaan A-osassa opiskelijoiden käytössä oli vain kaavaeditori ja B-osassa lisäksi laskinohjelmat. Tehtävissä oli hyödynnetty myös tehtäviä havainnollistavia aineistoja.

Tämä vihkonen on ladattavissa pdf-muodossa ja kaikki tehtävien ratkaisut ovat saatavilla myös ClassPadin tiedostoina (.xcp) Casion kotisivuilta. ClassPadin tiedostot aukeavat suoraan eActivity -sovellukseen kaksoisklikkaamalla. Tiedostoja voidaan hyödyntää myös esim. Abitti-kokeissa, tehtävien palautuksessa sähköiseen oppimisympäristöön tai jaettuun resurssiin (pilvipalveluun). Tukesi löytyy osoitteesta

http://www.casio-laskimet.fi

Casio Academy – videot soittolistalla

Casio tukee opiskelijoita matkalla ylioppilaiksi Casio Academy toiminnalla. Nyt päivitetystä YouTuben soittolistasta löytyy jo yli 30 yo-tehtävän ja esimerkin malliratkaisut reaaliajassa ratkaistuina videoina. Linkki soittolistaan on

https://bit.ly/casio-academy

ClassPad-perhe

Abitti-kokeen B-osan tehtävissä oli tätä koetta ratkoessa käytössä ClassPad Manager, jolla tämän vihkon ratkaisutkin on laadittu. Casion uusi selainpohjainen CAS-ohjelma ClassPad.net sopii jo hyvin sähköisten kokeiden ratkaisemiseen, matematiikan opettamisen välineeksi ja - ennen kaikkea - matematiikan hahmottamiseen ja oppimiseen. Tutustu uutuuteen osoitteessa

https://classpad.net/

Mukavia hetkiä sähköisten yo-kokeiden ratkaisujen parissa!

Espoossa 24.9.2019

Pepe Palovaara

Nordic School Coordinator
Casio Scandinavia

A-osa

Ratkaise kaikki tämän osan tehtävät 1–4.

---

1. Lukujonot (12 p.)

Alla on annettu eräiden lukujonojen yleisten termien lausekkeet. Valitse kunkin jonon alasvetovalikosta, onko jono aritmeettinen, geometrinen, kumpaakin vai ei kumpaakaan tyyppiä.

1.1. $a_n = 3 \cdot 2^n$ (2 p.)

1.2. $b_n = n \cdot 3^n$ (2 p.)

1.3. $c_n = 7^{n+1}$ (2 p.)

1.4. $d_n = 5$ (2 p.)

1.5. $e_n = 2019 - 1/n$ (2 p.)

1.6. $f_n = 3 - 9n$ (2 p.)

A–osa

1. Lukujonot

1.1. Jono on geometrinen (q=2), koska indeksi on vain eksponentissa.

1.2. Jono ei ole kumpaakaan, sillä indeksi on sekä kertoimena että eksponentissa.

1.3. Jono on geometrinen (q=7), koska indeksi on vain eksponentissa.

1.4. Jono on sekä geometrinen (q=1) että aritmeettinen (d=0).

1.5. Jono ei ole kumpaakaan, sillä indeksi on jakajana.

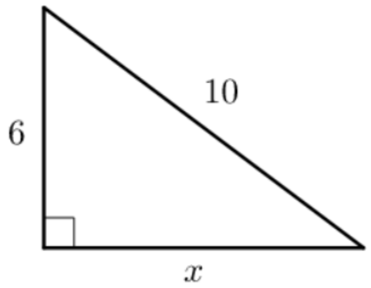
1.6. Jono on aritmeettinen, sillä indeksi on kertoimena (d=−9).

2. Kuusi kolmiota

Alla on esitetty kuusi kolmiota, joista on annettu joitakin tietoja. Tarkoituksena on ratkaista sivu x tai kulma θ.

Valitse kunkin kolmion osalta tilanteeseen parhaiten soveltuva kaava ja kirjoita vastauskenttään sivun x pituus tai kulman θ suuruus asteen tarkkuudella. Älä perustele tämän tehtävän vastauksia. Tässä tehtävässä ei voi käyttää kaavaeditoria. Kunkin vastauksen maksimipituus on 10 merkkiä.

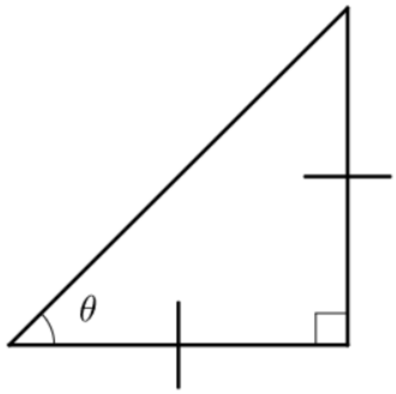
2.1. Valitse kolmion osalta tilanteeseen parhaiten soveltuva kaava ja kirjoita vastauskenttään sivun x pituus. (1 p.)



- $a^2 + b^2 = c^2$
- $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
- $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
- $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
- $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

2.2. Kohdan 2.1. kolmiossa pätee sivun pituudelle $x =$ ____ yksikköä. (1 p.)

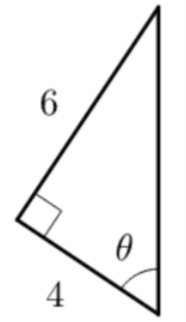
2.3. Valitse kolmion osalta tilanteeseen parhaiten soveltuva kaava ja kirjoita vastauskenttään kulman θ suuruus. (1 p.)



- $a^2 + b^2 = c^2$
- $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
- $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
- $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
- $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

2.4. Kohdan 2.3. kolmiossa pätee kulman suuruudelle $\theta =$ ____°. (1 p.)

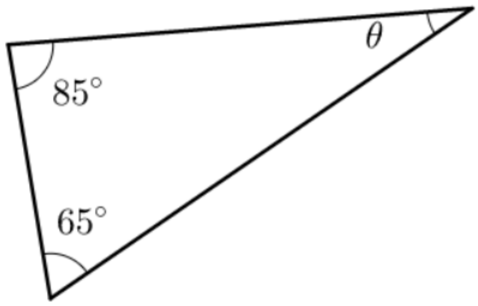
2.5. Valitse kolmion osalta tilanteeseen parhaiten soveltuva kaava ja kirjoita vastauskenttään kulman θ suuruus asteen tarkkuudella. (1 p.)



- $a^2 + b^2 = c^2$
- $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
- $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
- $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
- $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

2.6. Kohdan 2.5. kolmiossa pätee kulman suuruudelle $\theta \approx$ ____°. (1 p.)

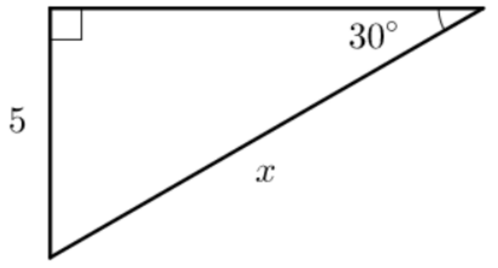
2.7. Valitse kolmion osalta tilanteeseen parhaiten soveltuva kaava ja kirjoita vastauskenttään kulman θ suuruus. (1 p.)



- $a^2 + b^2 = c^2$
- $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
- $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
- $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
- $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

2.8. Kohdan 2.7. kolmiossa pätee kulman suuruudelle $\theta =$ ____°. (1 p.)

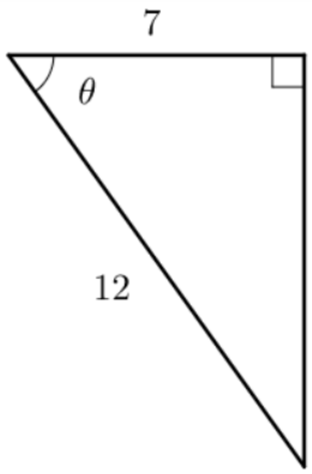
2.9. Valitse kolmion osalta tilanteeseen parhaiten soveltuva kaava ja kirjoita vastauskenttään sivun x pituus. (1 p.)



- $a^2 + b^2 = c^2$
- $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
- $\sin\alpha = \frac{a}{c}$
- $\cos\alpha = \frac{b}{c}$
- $\tan\alpha = \frac{a}{b}$

2.10. Kohdan 2.9. kolmiossa pätee sivun pituudelle $x =$ ____ yksikköä. (1 p.)

2.11. Valitse kolmion osalta tilanteeseen parhaiten soveltuva kaava ja kirjoita vastauskenttään kulman θ suuruus asteen tarkkuudella. (1 p.)



- $a^2 + b^2 = c^2$
- $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
- $\sin\alpha = \frac{a}{c}$
- $\cos\alpha = \frac{b}{c}$
- $\tan\alpha = \frac{a}{b}$

2.12. Kohdan 2.11. kolmiossa pätee kulman suuruudelle $\theta \approx$ ____°. (1 p.)

2. Kuusi kolmiota

2.1. Pythagoraan lauseen $a^2+b^2=c^2$ avulla

2.2. saadaan ratkaistua $x=\sqrt{10^2-6^2}=8$.

2.3. Kolmion kulmien summakaavan $\alpha+\beta+\gamma=180°$ avulla

2.4. saadaan tasakylkisestä kolmiosta ratkaistua $\theta=180°-90°-45°=45°$.

2.5. Suorakulmaisessa kolmiossa tangentin määrittelyn $\tan(\alpha)=\frac{a}{b}$ avulla

2.6. saadaan ratkaistua $\tan(\theta)=\frac{6}{4} \Leftrightarrow \theta=\tan^{-1}(\frac{6}{4})\approx 56°$.

2.7. Kolmion kulmien summakaavan $\alpha+\beta+\gamma=180°$ avulla

2.8. saadaan kolmiosta ratkaistua $\theta=180°-85°-65°=30°$.

2.9. Suorakulmaisessa kolmiossa sinin määrittelyn $\sin(\alpha)=\frac{a}{c}$ avulla

2.10. saadaan ratkaistua $\sin(30°)=\frac{5}{x} \Leftrightarrow x=\frac{5}{\sin(30°)} \Leftrightarrow x=\frac{5}{0.5} \Leftrightarrow x=10$.

2.11. Suorakulmaisessa kolmiossa kosinin määrittelyn $\cos(\alpha)=\frac{b}{c}$ avulla

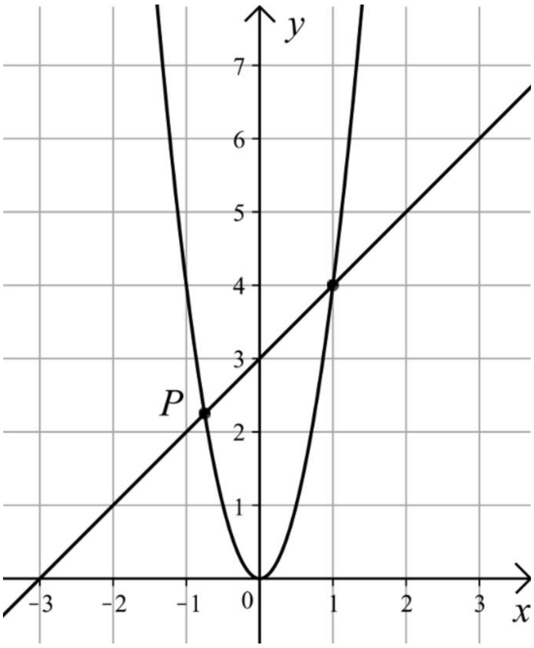
2.12. saadaan ratkaistua $\cos(\theta)=\frac{7}{12} \Leftrightarrow \theta=\cos^{-1}(\frac{7}{12})\approx 54°$.

Harjoittele tuleviin kokeisiin Casio Academy -videoiden avulla. Linkki soittolistaan on https://bit.ly/casio-academy

3. Paraabeli ja suora (12 p.)

Aineisto:
3.A Kuva: Leikkauspisteet

Kuvassa 3.A on paraabeli $y = 4x^2$ ja eräs suora. Määritä graafisesti suoran yhtälö. Määritä laskemalla leikkauspiste P suoran ja paraabelin yhtälöiden avulla.



3. Paraabeli ja suora

Suora kulkee kuvaajasta luettuna pisteiden $(1,4)$ ja $(-2,1)$ kautta. Sen yhtälö on $y-4=\frac{4-1}{1-(-2)}(x-1) \Leftrightarrow y-4=x-1 \Leftrightarrow y=x+3$.

Lasketaan leikkauspiste P yhtälöparin avulla:

$\begin{cases} y=x+3 \\ y=4x^2 \end{cases}\Bigg|_{x,\,y}$. Sijoitetaan ylemmän yhtälön y:n arvo alempaan yhtälöön ja ratkaistaan näin saatu yhtälö:

$x+3=4x^2 \Leftrightarrow 4x^2-x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot4\cdot(-3)}}{2\cdot4} \Leftrightarrow x=\frac{1\pm7}{8} \Leftrightarrow x=-\frac{3}{4}$ tai $x=1$. Pisteen P x-koordinaatti on $x=-\frac{3}{4}$ ja sitä vastaava y-koordinaatti on $y=-\frac{3}{4}+3=\frac{9}{4}$.

Vastaus: Suoran yhtälö on $y=x+3$ ja piste $P\left(-\frac{3}{4},\frac{9}{4}\right)$.

4. Numerotemppu (12 p.)

Riikka on kehittänyt seuraavan numerotempun ja testaa sitä serkullaan Almalla. Alma on syntynyt 1.2.2000. Riikka esittää Almalle seuraavat askeleet:

(a) Valitse luku väliltä $1-9$.
(b) Kerro valitsemasi luku luvulla 2.
(c) Lisää saamaasi lukuun 5.
(d) Kerro nyt saamasi luku luvulla 50.
(e) i) Jos olet jo viettänyt syntymäpäiväsi tänä vuonna, lisää lukuusi luku 1769.
ii) Jos et ole vielä viettänyt syntymäpäivääsi tänä vuonna, lisää lukuusi luku 1768.
(f) Vähennä nyt tuloksesta syntymävuotesi.
(g) Kerro, minkä tuloksen olet saanut.

Kun Alma vastaa 319, niin Riikka tietää kertoa, että Alma on 19-vuotias ja että hän valitsi alussa luvun 3.

Selitä matemaattisesti, miksi Riikan numerotemppu toimi Almalle, ja miksei se toimi Alman isoisoäidille, joka on yli 100-vuotias.

Tutkitaan, miten valittu luku x muuttuu askelten myötä:
(a) Luvun pitää olla joku kokonaisluku 1-9.
(b) Luvusta tulee $2x$.
(c) Luku on $2x+5$.
(d) Kertolaskun jälkeen luku on $100x+250$.
(e) Luku on nyt $100x+2019$ (i) tai $100x+2018$ (ii).
(f) Jos numerotemppu tehdään 1.2.2019 jälkeen, on Alma jo viettänyt vuoden 2019 syntymäpäivänsä ja luku on $100x+2019-(2019-\text{ikä})=100x+\text{ikä}$.

Jos numerotemppu tehdään ennen 1.2.2019, ei Alman syntymäpäivät ole vielä olleet, joten luku on $100x+2018-(2019-\text{ikä}-1)=100x+\text{ikä}$.
(g) Tulos on joka tapauksessa $100x+\text{ikä}$, joten Alman vastaus 319 kertoo hänen valinneen alussa luvun 3 ja että hän on 19-vuotias.

Alman isoisoäiti on yli 100-vuotias ja hänen tapauksessaan vastauksen $100x+\text{ikä}$ tulos menee pieleen, koska hänen iässään on 3 numeroa ja ne lasketaan välillä 100-900 olevan luvun kanssa yhteen. Tällöin kaksi viimeistä numeroa ei kerro hänen ikäänsä. Temppu kuitenkin saadaan toimimaan myös 100-vuotiaille ja sitä vanhemmille, jos taikuri päättelee ensin henkilön iäkkääksi ja sitten vähentää ensimmäisestä luvun numerosta ykkösen ja laittaa näin saadun numeron luvun alkuun ja ykkösen sen perään.

Esim. 111 vuotias valitsee kohdassa (a) luvun 8, jolloin lopussa hänen saamansa luku on 911. Taikuri ottaa ensimmäisen numeron 9, vähentää siitä yhden ja laittaa numerot uudeksi luvuksi "(8+1)11" eli 8111. Tästä voi lukea sekä arvauksen että iän.

B1-osa

Ratkaise kolme tehtävistä 5–9. Tässä osassa saat käyttää kaikkia koejärjestelmän ohjelmia ja omaa laskintasi, kun olet palauttanut A-osan vastaukset.

5. Akun varaus (12 p.)

Akun varausta kuvaa malli $a \cdot q^t$, kun t on aika tunneissa, $a = 100$ C ja $q = 0{,}877$. Mikä on akun varauksen puoliintumisaika?

5. Akun varaus

Ratkaistaan, millä muuttujan t arvolla varausta on jäljellä puolet:

solve(100*0.877^t=0.5*100,t)

{t=5.281190318}

Vastaus: Puoliintumisaika on n. 5,3 tuntia.

Tukimateriaalit ja tuotetiedot löytyvät palvelevilta kotisivuiltamme

https://www.casio-laskimet.fi

6. Algoritmista ajattelua (12 p.)

Alakoulun oppilaat harjoittelevat algoritmista ajattelua ja ohjelmointia. Oppilaiden tehtävänä on ohjelmoida toisiaan toimimaan täsmälleen tarkasti annettujen ohjeiden mukaan. Eräs oppilas antaa luokkatoverilleen seuraavat ohjeet:

(a) Aloita pisteestä A.
(b) Kulje täsmälleen 2 metriä suoraan eteenpäin.
(c) Käänny 90 astetta oikealle.
(d) Kulje täsmälleen 4 metriä eteenpäin.
(e) Käänny 90 astetta oikealle.
(f) Kulje täsmälleen 7 metriä eteenpäin ja olet perillä pisteessä B.

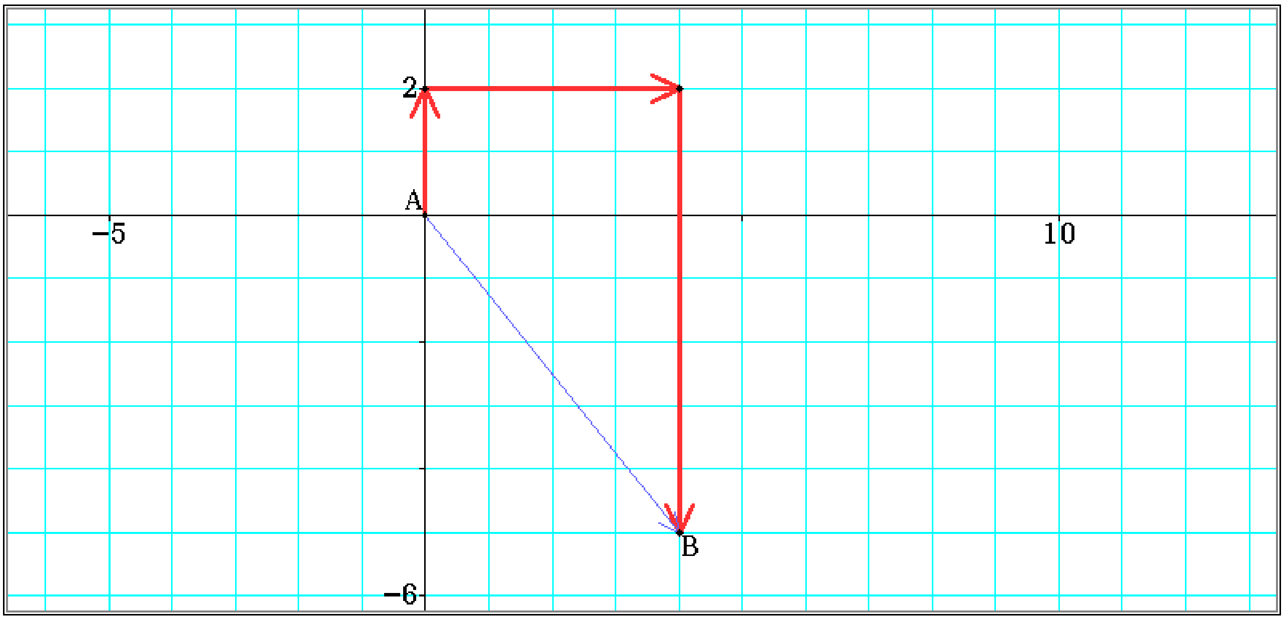
6.1. Esitä oppilaan kulkema reitti käyttämällä sopivaa piirto-ohjelmaa ja kuvakaappaustyökalua. (6 p.)
6.2. Laske pisteiden A ja B välinen etäisyys. (6 p.)

6. Algoritmista ajattelua

Piirretään reitti vektorien (punainen) avulla ClassPad Managerin geometriasovelluksessa. Sijoitetaan alkupiste A origoon ja käytetään yksikkönä yksi ruutu on yksi metri.

Oppilaan reitti =>

Pätepisteeseen (4,−5) vie summavektori (sininen) ja sen pituus on sama kuin pisteiden A ja B etäisyys: $\sqrt{4^2+(-5)^2}=\sqrt{41}\approx 6,4$ metriä.



7. Osakekaupat (12 p.)

Aineisto:
7.A Tiedosto: Pörssikurssit

Aineistossa 7.A on Helsingin pörssin kolmen eri osakkeen osakekurssit, joiden mukaisin hinnoin Roope osti ja myi osakkeita. Hän ostaa 1.2.2018 kello 14.00 osaketta B yhteensä 1 000 eurolla. Hän vaihtaa 2.2.2018 kello 10.00 kaiken osakkeeseen C, ja samana päivänä kello 18.00 hän vaihtaa edelleen kaiken osakkeeseen A. Hän myy kaiken 3.2.2018 kello 16.00. Jokaisesta osto- ja myyntitoimeksiannosta Roope maksaa 4,00 euroa välityspalkkiota. Vaihdon yhteydessä tapahtuu sekä myynti- että ostotoimeksianto. Kuinka paljon Roopella on rahaa osakkeet myytyään?

7. Osakekaupat

Aineisto =>

B-osakkeen hinta 1.2.2018 klo 14.00 on 3,00€ (solu D3). Roopella on palkkion maksun jälkeen 1000€-4€=996€, jolla saa 332 B-osaketta ja hänen kaikki rahansa on sijoitettu.

B-osakkeen hinta 2.2.2018 klo 10.00 on 2,50€ (solu G3). Roope saa 332 osakkeestaan 830€ ja joutuu maksamaan 4€ myyntipalkkiota. Hän ostaa C-osakkeita, joihin hänellä on 4€ ostopalkkion jälkeen käytettävissä 822€. C-osakkeiden kappalehinta on 6,00€ (solu G4). Roope saa 137 C-osaketta.

Samana päivänä hän myy 137 C-osaketta hintaan 7,00€ (solu K4) ja myyntipalkkion vähennyksen jälkeen hänellä on 959€-4€=955€. A-osakkeen hinta on 3,00€ (solu K2), joten Roope saa ostopalkkion jälkeen 951€ kaikkiaan 317 A-osaketta.

3.2.2018 klo 16.00 A-osakkeen arvo on 2,80€ (solu O2). Roope saa 887,60€ ja maksaa tästä 4€ myyntipalkkiota. Roopelle jää rahaa 883,60€.

8. Kuvaajan tangentti (12 p.)

Tarkastellaan polynomia $p(x) = x^3 + 5x$ ja sen kuvaajan tangenttia pisteessä $(1, 6)$. Määritä derivaatan avulla tämän tangentin yhtälö.

8. Kuvaajan tangentti

Tutkitaan aluksi, onko piste (1,6) kuvaajalla: $1^3+5*1=6$ eli pisteen koordinaatit toteuttavat funktion yhtälön ja piste on funktion kuvaajalla.

Tangentin kulmakerroin on derivaatan arvo kohdassa $x=1$. Derivaattafunktio $f'(x)=3x^2+5$ ja $f'(1)=3*1^2+5=8$.

Tangentin yhtälö on $y-6=8(x-1) \Leftrightarrow y=8x-2$.

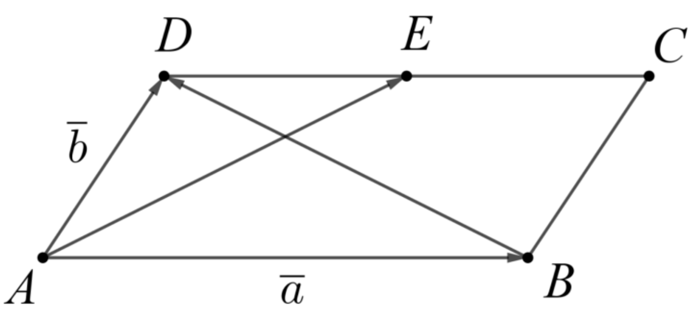
9. Vektorit / 12-sivuinen noppa (12 p.)

Jos valitset tämän tehtävän, ratkaise joko 9.1. TAI 9.2. (Voit valita kumman tahansa tehtävän riippumatta siitä, minkä opetussuunnitelman mukaisesti olet opiskellut.)

9.1. (Vanha opetussuunnitelma, ennen 1.8.2016 lukion aloittaneet)

Aineisto:
9.A Kuva: Suunnikas

Kuvassa 9.A on suunnikas. Esitä vektorit $\overline{AE}$ ja $\overline{BD}$ vektorien $\overline{a} = \overline{AB}$ ja $\overline{b} = \overline{AD}$ avulla lausuttuina, kun piste E on janan CD keskipiste.



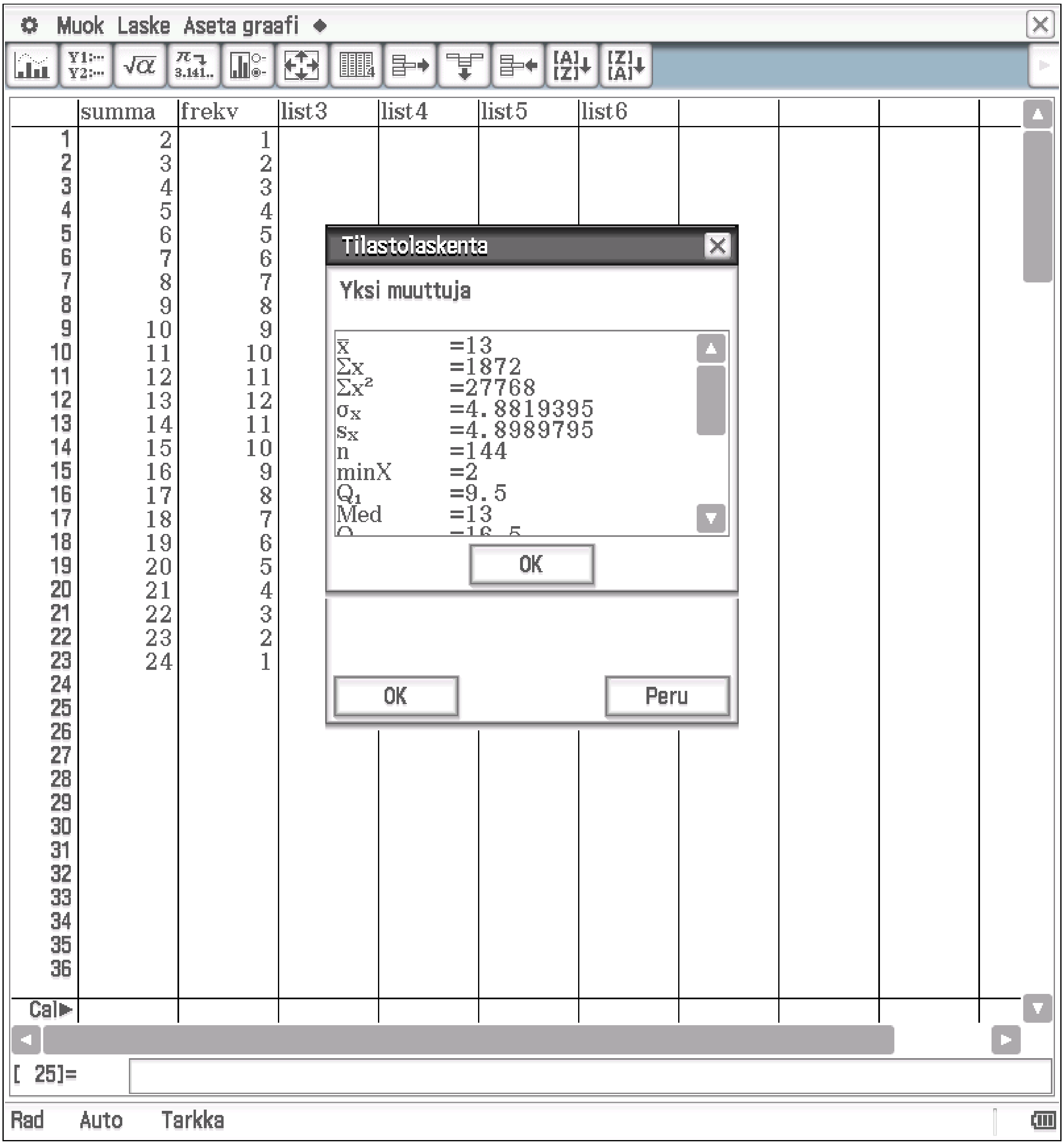
9.1. Vektorit

Vektori $AE=AD+DE=b+\frac{1}{2}a$.

Vektori $BD=BA+AD=-a+b=b-a$.

9.2. (Uusi opetussuunnitelma, 1.8.2016 tai sen jälkeen lukion aloittaneet)

Heitetään kahta 12-sivuista noppaa, joiden silmäluvut ovat 1, 2, ..., 12. Laske tulosten summan odotusarvo ja keskihajonta esimerkiksi taulukkolaskentaohjelman avulla.



	summa	frekv
1	2	1
2	3	2
3	4	3
4	5	4
5	6	5
6	7	6
7	8	7
8	9	8
9	10	9
10	11	10
11	12	11
12	13	12
13	14	11
14	15	10
15	16	9
16	17	8
17	18	7
18	19	6
19	20	5
20	21	4
21	22	3
22	23	2
23	24	1

Odotusarvo on 13 ja keskihajonta n. 4,882.

B2-osa

Ratkaise kolme tehtävistä 10–13. Tässä osassa saat käyttää kaikkia koejärjestelmän ohjelmia ja omaa laskintasi, kun olet palauttanut A-osan vastaukset.

---

10. Perheen keski-ikä (12 p.)

Matti ja Maija menevät naimisiin, kun he ovat 23- ja 21-vuotiaita. Heille syntyy ensimmäinen lapsi tasan 2 vuotta häiden jälkeen. Esikoisen jälkeen perheeseen syntyy vielä kolme lasta tasan 4 vuoden välein. Milloin perheen keski-ikä on pienimmillään? Mikä on perheen keski-ikä silloin?

10. Perheen keski-ikä

Lasketaan perheen keski-ikä naimisiinmenohetkellä ja jokaisen lapsen syntymän aikaan. Koska jokainen ikääntyy, ei tarvitse laskea keski-ikää niinä vuosina, kun lasten määrä ei muutu. Keski-ikä on

1) Alussa

$$\frac{21+23}{2}=22$$

2) 1. lapsen synnyttyä

$$\frac{23+25+0}{3}=16$$

3) 2. lapsen synnyttyä

$$\frac{27+29+4+0}{4}=15$$

4) 3. lapsen synnyttyä

$$\frac{31+33+8+4+0}{5}=15.2$$

5) 4. lapsen synnyttyä

$$\frac{35+37+12+8+4+0}{6}=16$$

Pienin keski-ikä 15 vuotta on heti 2. lapsen synnyttyä.

11. Neliöjuuren likiarvo (12 p.)

Opiskelijoiden tehtävänä on määrittää lävistäjän pituus sellaiselle suorakulmiolle, jonka sivujen pituudet ovat 1 ja 2. Käytössä on kuitenkin vain laskin, jolla voi laskea yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja, mutta ei neliöjuuria. Opiskelijat tietävät, että luvun 5 neliöjuurelle voi määrittää likiarvoja seuraavan jonon avulla:

$$x_1 = 3,$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right),\ n \geq 1.$$

Ilpo yrittää päästä helpolla ja tarjoaa luvulle $\sqrt{5}$ arviota x_2. Simo puolestaan päättää käyttää arviota x_4. Vertaa arvioita x_2 ja x_4 laskimen antamaan luvun $\sqrt{5}$ likiarvoon. Kuinka monta prosenttia liian suuria Ilpon ja Simon arviot ovat?

11. Neliöjuuren likiarvo

Käytetään iterointikaavaa ja lasketaan arviot:

$x_1:=3$

$$3$$

$x_2:=\frac{1}{2}\left(3+\frac{5}{3}\right)$

$$\frac{7}{3}$$

$x_3:=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}+\frac{5}{\frac{7}{3}}\right)$

$$\frac{47}{21}$$

$x_4:=\frac{1}{2}\left(\frac{47}{21}+\frac{5}{\frac{47}{21}}\right)$

$$\frac{2207}{987}$$

Ilpon arvio on

$\frac{x_2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}*100$

$$4.34983895$$

n. 4,3% liian suuri, kun taas Simon arvio on

$\frac{x_4-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}*100$

$$4.106062871\text{E-}5$$

vain noin 0,000041% liian suuri.

12. Suureiden suhteet (12 p.)

12.1. Tasapaksusta marmeladilevystä leikataan herkkupaloja isolla ja pienellä ympyränmuotoisella muotilla. Ison muotin halkaisija on kaksi kertaa niin suuri kuin pienen. Namuska on tottunut syömään kolme isoa marmeladipalaa. Kuinka monta pientä palaa hänen pitäisi syödä saadakseen yhtä paljon marmeladia? (4 p.)

12.2. Lassi Lounastaja on tottunut syömään lounaallaan kaksi isoa perunaa. Eräänä päivänä tarjolla on pieniä perunoita, joiden halkaisija on vain 60 prosenttia ison perunan halkaisijasta. Kaikki perunat ovat yhdenmuotoisia. Kuinka monta pikkuperunaa Lassin pitäisi syödä saadakseen saman verran perunaa? (6 p.)

12.3. Erään musiikkikappaleen esittämiseen kuluu 40-henkiseltä kuorolta 7 minuuttia ja 40 sekuntia. Eräässä esityksessä kolme kuoron jäsentä on flunssan takia poissa. Kuinka kauan tämän kappaleen esittämiseen kuluu 37-henkiseltä kuorolta? (2 p.)

12. Suureiden suhteet

12.1. Palojen korkeudet pysyvät samoina, koska levy on tasapaksuista. Tilavuuteen vaikuttaa ainoastaan ympyrän pinta-ala. Ympyrät ovat keskenään yhdenmuotoiset, joten niiden pinta-alat suhtautuvat kuten vastinjanojen suhteen toinen potenssi (mittakaava toiseen). Vastinjanoiksi voidaan valita halkaisijat, jolloin niiden suhde on 1:2 ja mittakaavan neliö 1:4. Siis pieniä paloja pitää syödä 4-kertainen määrä eli 12 kpl.

12.2. Koska perunat ovat yhdenmuotoisia on niiden välillä mittakaava. Mikä tahansa vastinjanojen suhde käy, joten valitaan halkaisijat. Mittakaava on täten 1:0,6. Perunoiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio eli $1:0,6^3 \Leftrightarrow 1:0,216$. Isojen perunoiden verran perunaa sisältää 2:0,216 pientä perunaa eli n. 9,26 pientä perunaa. Tämän voi pyöristää 9 pieneen perunaan ja vielä yhteen neljännekseen.

12.3. Jäsenten määrä ei vaikuta kappaleen kestoon. Vastaus on 7 min 40 s.

13. Suomen väestön rakenne (12 p.)

Aineisto:
13.A Taulukko: Suomen väestön rakenne

Aineistossa 13.A on esitetty Suomen väestön rakenne. Laske 15–64-vuotiaiden asukkaiden lukumäärät vuosina 1900, 1950, 1990, 2000, 2010 ja 2016. Sovita laskemaasi aineistoon lineaarinen malli $f(x)$ ja toisen asteen polynomi $g(x)$. Ennusta molempien mallien avulla Suomen 15–64-vuotiaiden lukumäärät vuosina 2035 ja 2350 ja pohdi ennusteiden mielekkyyttä.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Väkiluku**	**Yksikkö**	**1900**	**1950**	**1990**	**2000**	**2010**	**2016**
2	**Yhteensä**	**1000**	**2656**	**4030**	**4998**	**5181**	**5375**	**5503**
3	Miehet	1000	1311	1926	2426	2529	2638	2712
4	Naiset	1000	1345	2104	2572	2652	2737	2791
5	**Ikä**							
6	0–14 v.	%	35,0	30,0	19,3	18,1	16,5	16,2
7	15–64 v.	%	59,6	63,3	67,2	66,9	66,0	62,9
8	65– v.	%	5,4	6,7	13,5	15,0	17,5	20,9
9	**Kieli**							
10	Suomi	%	86,8	91,1	93,5	92,4	90,4	88,3
11	Ruotsi	%	12,9	8,6	5,9	5,6	5,4	5,3
12	Saame	%	0,1	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0
13	Venäjä	%	0,3	0,1	0,1	0,5	1,0	1,4
14	Muu	%	0,0	0,1	0,4	1,4	3,2	5,1
15	**Siviilisääty**							
16	Naimattomat	%	60,9	53,4	45,5	47,1	47,3	48,2
17	Miehet	%	63	55,6	49,5	51,1	51,3	52,1
18	Naiset	%	58,9	50,8	41,7	43,2	43,6	44,5
19	Naimisissa	%	33,6	39,4	41,6	38,3	37,5	36,3
20	Miehet	%	34	41,2	42,8	39,2	38,1	36,8
21	Naiset	%	33,2	38	40,5	37,5	36,8	35,8
22	Eronneet ja lesket	%	5,5	7,2	12,9	14,6	15,2	15,5
23	Miehet	%	3	3,2	7,6	9,7	10,6	11,1
24	Naiset	%	7,9	11,2	17,8	19,3	19,6	19,7
25	**Uskontokunta**							
26	Suomen evankelis-luterilainen kirkko	%	98,1	95	87,8	85,1	78,3	72
27	Ortodoksiset kirkot	%	1,7	1,7	1,1	1,1	1,1	1,1
28	Muu	%	0,2	0,5	0,9	1,1	1,4	1,6
29	Väestörekisteri tai tuntematon	%	-	2,8	10,2	12,7	19,2	25,3

13. Suomen väestön rakenne

Sijoitetaan tarvittavat luvut ClassPad Managerin taulukkolaskentaohjelmaan. Lasketaan riville 2 suomalaisten 15–64–vuotiaiden lukumäärät (tuhatta ihmistä).

Taulukko tarvittavin osin =>

Lineaarinen regressio on y=17.333545·x−31285.37, missä y on tuhatta ihmistä ja x on vuosiluku. Korrelaatiokerroin r=0.9878003. Määritellään malli funktioksi

define f(x)=17.333545·x−31285.37

done

ja lasketaan mallin avulla ennusteet vuosille 2035 ja 2350:

f({2035,2350})

{3988.394075,9448.46075}

2. asteen regressio on y=−0.067023·x^2+279.83144·x−288169.6 ja selitysaste r^2=0.988864. Määritellään tämä funktioksi g ja lasketaan ennusteet:

define g(x)=−0.067023·x^2+279.83144·x−288169.6

done

g({2035,2350})

{3730.057225,−700.2335}

CASIO

Ennusteet lineaarisen mallin mukaan ovat 3988 tuhatta ja 9448 tuhatta suomalaista, kun taas 2. asteen regressio antaa 3730 tuhatta ja −700 tuhatta suomalaista.

Molempien mallien vuoden 2035 malli on mahdollinen ja eroa on noin. 258 tuhatta 15−64−vuotiasta. Luotettavuus riippuu monista asioista kuten ilmastopakolaisista, maailmanrauhasta, syntyvyydestä, epidemioista, yhteiskunnan kannusteista ja

Lineaarisen mallin vuoden 2350 ennuste vaikuttaa olevan todella suuri, sillä 15−64−vuotiaiden määrän pitäisi kasvaa n. 2,4−kertaiseksi. 2. asteen mallin ennuste vuodelle 2350 on väärä, sillä ihmisten määrä ei voi olla negatiivinen. 2. asteen malli ei sovi tämän datan pohjalta pitkäaikaisen ennusteen tekemiseen.

	A	B	C
1	Vuosi	15−64 v.	Yht (tuhatta)
2	1900	1582.976	2656
3	1950	2550.99	4030
4	1990	3358.656	4998
5	2000	3466.089	5181
6	2010	3547.5	5375
7	2016	3461.387	5503
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			

=0.629•C7

Lineaarinen regr

$y=a\cdot x+b$

$a = 17.333545$

$b = -31285.37$

$r = 0.9878003$

$r^2 = 0.9757495$

$MSe = 18599.508$

2. asteen regr

$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$

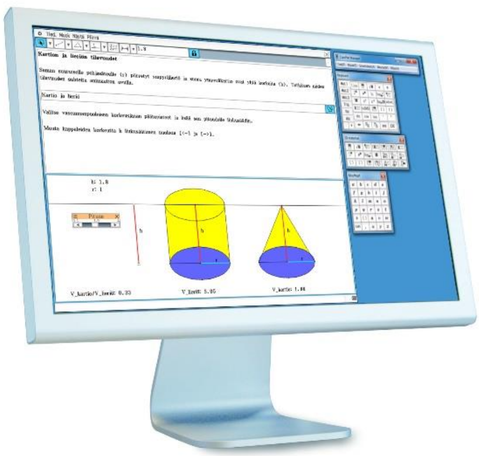
$a = -0.067023$

$b = 279.83144$

$c = -288169.6$

$r^2 = 0.988864$

$MSe = 11388.046$



ClassPad Manager apuna opiskelussa.