CASIO

"Enemmän aikaa matematiikan opiskeluun,
vähemmän aikaa laskimen opetteluun."

Laske Laudatur ClassPadilla

Lyhyt matematiikka, syksy 2016

Casio Scandinavia

Keilaranta 17 | 02150 Espoo | info@casio.fi

Hyvä lukija,

Käsissäsi on ratkaisut syksyn 2016 lyhyen matematiikan yo-kokeen B-osan tehtäviin. A-osion tehtävien ratkaisuissa ei saa käyttää laskinta, joten vastaukset näihin tehtäviin löytyy YTL:n hyvän vastauksen piirteet –tiedostosta. (http://yle.fi/aihe/artikkeli/2016/09/27/2016-syksy-matematiikka-lyhyt-oppimaara)

Tämä vihkonen on ladattavissa suomenkielisiltä Casion tukisivuilta aiempien vuosien ratkaisujen tapaan (http://www.casio-laskimet.fi/fi/opettajakoulu/opetusmateriaalia/)

Uutuuskirja

Casio julkaisee lokakuussa 2016 lukion matematiikan oppimista tukevan ilmaisen digitaalisen kirjan. Kirjassa on n. 300 sivua teoriaa, esimerkkejä, tehtäviä ja ratkaisuja. ***Kirja tulee ladattavaksi Casion tukisivuilta*** ja soveltuu oppimisen syventämiseen, kokeisiin valmistautumiseen ja itseopiskeluun.

Kirjan kaksiosainen tehtäväjako ilman apuvälineitä laskettaviin tehtäviin ja CAS-tehtäviin noudattaa nykyisten kokeiden jakoa. Kaikkiin CAS-tehtäviin on linkitetty suomenkielinen videoratkaisu, jossa tehtävä tehdään reaaliajassa ja perustellen ClassPad II Managerilla. Lisäksi CAS-tehtäviin on ladattavissa tiedosto, jolloin ratkaisut aukeavat suoraan laskinohjelmassa tai laskimessa.

Laskuteknisiä vinkkejä ja Abitti-infoa sisältävä YouTube –kanava on suosittu ja kanavan videoita on katsottu jo 40 000 kertaa! Kanavan nimi on fx-CP400 ja linkki http://bit.ly/fx-cp400.

ClassPad II Manager

Ratkaisut kevään yo-kokeisiin on tehty ClassPad II Manager –ohjelmalla. Samat laskut voidaan tehdä myös laskimella fx-CP400 ja vastaustiedostotkin käyvät molempiin. Tämä tukee siirtymistä laskimista ohjelmien käyttöön. Casion ajatus helppokäyttöisyydestä sisältää sen, että laskimen käytön osaavat voivat suoraan siirtyä käyttämään ohjelmaa ilman erillistä opettelua tai perehdytystä.

ClassPad II Manager-ohjelman lisenssejä voi hankkia vuodeksi tai kolmeksi vuodeksi joko jälleenmyyjien kautta tai Casion nettikaupasta (https://edu.casio.com/softwarelicense/pop.php)

Mikäli et ole vielä ehtinyt kokeilemaan ohjelmaa, niin sen 90 päivän ilmaisen trial-version voit ladata osoitteesta https://edu.casio.com. Linkistä löydät myös mm. uusimmat käyttöjärjestelmien päivitykset.

Lyhyt matematiikka

Lyhyen matematiikan opiskelija hyötyy helppokäyttöisestä ja selkeästä CAS-ohjelmasta. Opiskelun aikana se yhdistää graafisen tarkastelun laskuihin, koetilanteessa se luo turvallisuuden tunnetta ja auttaa opiskelijaa saamaan parhaan osaamisensa esille. ClassPadin käytön periaate suosii tätä ajatusta ja esim. kuvaajan piirtäminen onnistuu raahaamalla vastaava lauseke koordinaatistoon. Virheiden määrä vähenee ja komentojen opettelu ei vie aikaa itse matematiikan oivaltamiselta.

Espoossa 29.9.2016

Pepe Palovaara

CASIO

B1-osa Ratkaise kolme tehtävistä 5–9.

5. Pöytäliinan alkuperäinen koko on 2 m kertaa 4 m. Se kutistuu pesussa 5 % sekä pituus- että leveyssuunnassa. Kuinka monella prosentilla pöytäliinan pinta-ala pienenee?

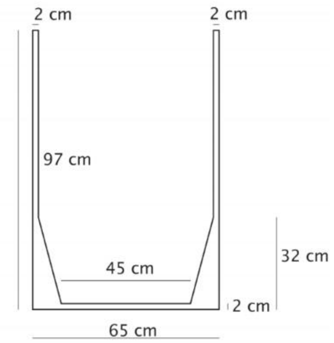
5) Lasketaan pienentyneen pinta−alan suhde alkuperäiseen ja muutetaan tulos prosenteiksi:

$$\left(1-\frac{0.95*2*0.95*4}{2*4}\right)*100$$

9.75

Pöytäliinan ala pieneni 9,75%.

6. Tommi ostaa uuden kompostikäymälän, jonka sisäosa on pyörähdyskappale, jolla on kuvan mukainen poikkileikkaus. Laske kompostikäymälän säiliön sisätilavuus.



<http://sauna.net>. Luettu 28.4.2015.

6) Sisäosan yläreuna on ympyrä, jonka ala on

$$ympyra1:=\pi\left(\frac{65-4}{2}\right)^2$$

2922.466566

ja alareuna on ympyrä, jonka ala on

$$ympyra2:=\pi\left(\frac{45}{2}\right)^2$$

1590.431281

Yläosan lieriön tilavuus + alaosan katkaistun kartion tilavuus kuutiosenttimetreinä on

$$ympyra1*(97-32)+\frac{1}{3}*(32-2)(ympyra1+\sqrt{ympyra1*ympyra2}+ympyra2)$$

256648.4848

Tämä on n. 260 dm^3.

7. Kahden riippumattoman tapahtuman A ja B todennäköisyyksille pätee kaava

$$P(A \text{ ja } B) = P(A)P(B).$$

a) Anna esimerkki kahdesta riippumattomasta tapahtumasta.
b) Anna esimerkki kahdesta tapahtumasta, jotka eivät ole riippumattomia.

Esimerkkejä voi hakea esimerkiksi nopanheitosta. Myös muunlaiset esimerkit ovat mahdollisia.

7) a) Heitetään kahta noppaa ja merkitään A="saadaan 1. nopalla silmäluku 6" ja B="saadaan 2. nopalla silmäluku 6". Toisen tapahtuman todennäköisyys ei vaikuta toiseen, joten tapahtumat ovat riippumattomia.

b) Mikä tahansa otanta ilman takaisinpanoa käy. Esim. valitaan luokasta kaksi opiskelijaa arpomalla ja merkitään A="ensimmäinen opiskelija on tyttö" ja B="toinen opiskelija on tyttö". Nyt ensimmäisen tapahtuman sattuminen vaikuttaa jälkimmäisen tapahtuman todennäköisyyteen ja tapahtumat eivät ole riippumattomia.

YO-ratkaisut netissä: http://www.casio-laskimet.fi/fi/opettajakoulu/opetusmateriaalia/

Laskuvinkkejä YouTubessa: http://bit.ly/fx-cp400

8. Kun kumipallo putoaa korkeudesta h, se ponnahtaa ylöspäin korkeuteen $0{,}8 \cdot h$ saakka. Pallo pudotetaan yhden metrin korkeudesta. Mikä on pallon kulkema matka, kun se kymmenennen kerran osuu lattiaan?

8) Pallon ensimmäinen pomppu on 0,8m korkea, toinen $0{,}8^2$m, kolmas $0{,}8^3$m, jne. Pomppujen korkeudet muodostavat geometrisen jonon. Huomioidaan laskussa myös pallon alaspäin kulkema matka kertomalla geometrinen summa kahdella.

Kaikki muut matkat pallo kulkee kahdesti, paitsi ensimmäisen pudotuksen yhtä metriä. Lisätään tämä 1 metri geometriseen summaan.

$$2\sum_{k=1}^{9}(0.8^k)+1$$

7.926258176

Pallon kulkema matka on n. 7,9m.

9. Kolmion kulman puolittaja jakaa kulman vastaisen sivun kulman viereisten sivujen pituuksien suhteessa. Kolmion kärkipisteet ovat $A(0,0)$, $B(2,1)$ ja $C(1,3)$.

a) Laske $\frac{|AC|}{|AB|}$,

b) Merkitään kirjaimella D sivun BC ja kulman A puolittajan leikkauspistettä. Laske pisteen D koordinaatit.

a) Lasketaan kysytty suhde:

$$\frac{\sqrt{(1-0)^2+(3-0)^2}}{\sqrt{(2-0)^2+(1-0)^2}}$$

$$\sqrt{2}$$

b) Pisteen D paikkavektori on $AC+\sqrt{2}*CB^0$. Ratkaistaan vektori AC ja yksikkövektori CB^0:

$AC:=[1-0\ \ 3-0]$

$$[1\ \ 3]$$

$$CB^0:=\frac{1}{\mathrm{norm}([2-1\ \ 1-3])}*[2-1\ \ 1-3]$$

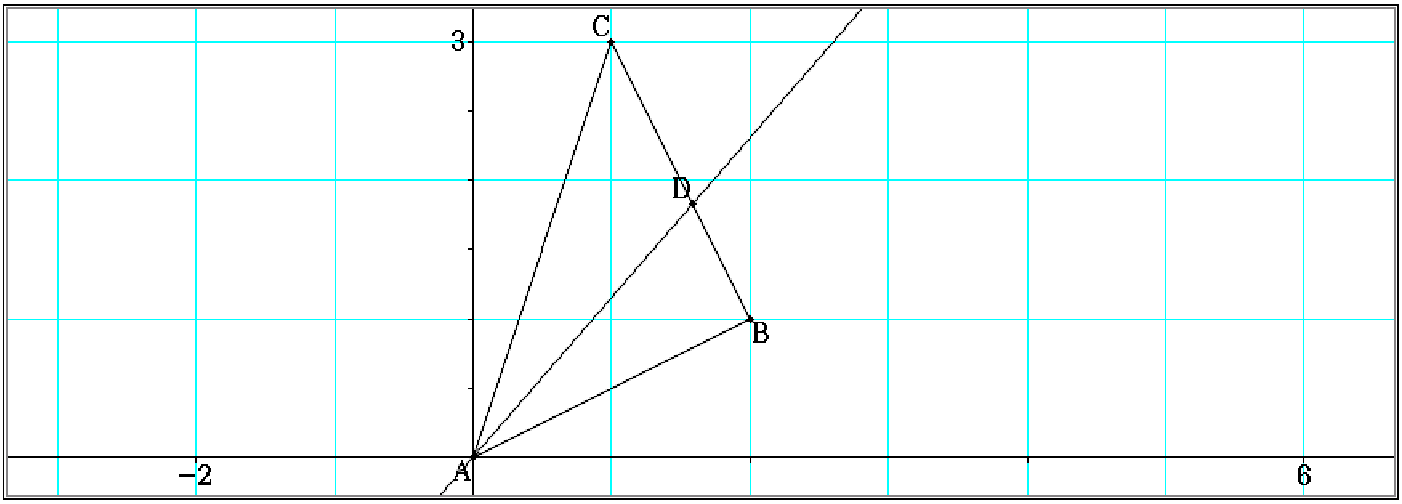
$$\left[\frac{\sqrt{5}}{5}\ \ \frac{-2\cdot\sqrt{5}}{5}\right]$$

Täten pisteen D paikkavektoriksi saadaan

$AC+\sqrt{2}*CB^0$

$$\left[\frac{\sqrt{10}}{5}+1\ \ \frac{-2\cdot\sqrt{10}}{5}+3\right]$$

Pisteen D koordinaatit ovat $\left(\frac{\sqrt{10}}{5}+1, \frac{-2\cdot\sqrt{10}}{5}+3\right)$.

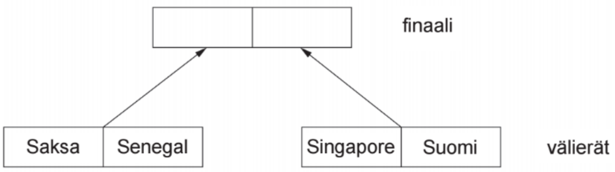


B2-osa Ratkaise kolme tehtävistä 10–13.

10. Jalkapalloturnauksen välieriin ovat selvinneet Suomen lisäksi Saksa, Senegal ja Singapore. Kummastakin välieräottelusta voittaja jatkaa finaaliin. Seuraavaan taulukkoon on listattu voittotodennäköisyyksiä prosenteissa. Tasapelejä ei ole, ja sama todennäköisyys pätee sekä välierässä että finaalissa.

Saksa voittaa Senegalin	65 %
Saksa voittaa Singaporen	55 %
Saksa voittaa Suomen	100 %
Senegal voittaa Singaporen	40 %
Senegal voittaa Suomen	60 %
Singapore voittaa Suomen	50 %

a) Mikä on todennäköisyys, että Suomi pelaa finaalissa Saksaa vastaan, jos välieräparit ovat Saksa–Senegal ja Singapore–Suomi? (2 p.)



b) Millä välieräpareilla Suomen todennäköisyys voittaa koko kilpailu on suurin? Mikä on todennäköisyys tässä tapauksessa? (4 p.)

10) a) Riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntöä soveltamalla Saksan voittotodennäköisyyteen 0,65 ja Suomen voittotodennäköisyyteen (1−0,5) saadaan

0.65*0.5

0.325

b) Jos Saksa pelaa Suomea vastaan, niin Suomi ei voi voittaa turnausta. Turnauksen loppuottelussa siis pitäisi pelata Suomi–Senegal tai Suomi–Singapore eikä Suomen joukkueen tule missään vaiheessa kohdata Saksaa. Tutkitaan näiden vaihtoehtojen todennäköisyydet:

Suomi voittaa finaalin Suomi–Singapore: Suomi on voittanut Senegalin (tn. 0,4), Singapore Saksan (tn. 0,45) ja Suomi voittaa vielä loppuottelun (tn. 0,5). Kertolaskusäännöllä

0.4*0.45*0.5

0.09

Suomen turnausvoiton tn. on 9%.

Suomi voittaa finaalin Suomi–Senegal: Suomi on voittanut välierissä Singaporen (tn. 0,5), Senegal Saksan (tn. 0,35) ja Suomi hoitaa finaalin (tn. 0,4). Kertolaskusäännöllä

0.5*0.35*0.4

0.07

Suomen turnausvoiton tn. on 7%.

Suurin voiton todennäköisyys on 9%, jos välieräparit ovat Suomi–Senegal ja Singapore–Saksa.

11. Suomessa verotetaan ansiotuloa progressiivisesti oheisen taulukon mukaisin veroastein. Yritysjohtaja Karhu haluaa houkutella maahan rikkaita maahanmuuttajia siirtymällä tasaveroprosenttimalliin, jossa käytetään samaa ansioveroprosenttia tulotasosta riippumatta. Arvioi taulukon ja oheisen lehtileikkeen perusteella, mikä on se tasaveroprosentti, jolla voidaan kerätä yhtä paljon verotuloa kuin nykymallilla. Tee tarvittavat oletukset tulojakaumasta ja kirjaa ne myös näkyviin.

Verotettava ansiotulo, €	Vero alarajan kohdalla, €	Vero alarajan ylittävästä tulon osasta, %
16 500–24 700	8	6,5
24 700–40 300	541	17,5
40 300–71 400	3 271	21,5
71 400–90 000	9 957,50	29,75
90 000–	15 491	31,75

Kauimmas kärki on karannut Kauniaisissa, missä hyvätuloisin prosentti ansaitsee vähintään 293 362 euroa vuodessa. Naapurikunnassa Espoossa huipun tulot ovat lähes puolet vähemmän, 155 273 euroa vuodessa.

Pienimmillä tuloilla hyvätuloisimman prosentin joukkoon pääsee Rautavaaralla, Sotkamon naapurissa (52 286 e). Eli Kauniaisissa tuloeliittiin pääsemiseen tarvitaan lähes neljännesmiljoona euroa vuodessa enemmän kuin Rautavaaralla.

Myös Suomen vähiten ansaitsevat asuvat Kauniaisissa, missä pienituloisin kymmenys ihmisistä ansaitsee alle 3 073 euroa vuodessa. Seuraavaksi pienituloisin 10 prosenttia löytyy Helsingistä (3 698 euroa vuodessa) ja Joensuusta (4 588 euroa vuodessa).

Suomen Kuvalehti
<http://suomenkuvalehti.fi>

Vastausvaihtoehtoja on tulkinnoista riippuen monta, joten suosittelen YTL:n hyvän vastauksen piirteet – tiedoston linkistä http://yle.fi/aihe/artikkeli/2016/09/27/2016-syksy-matematiikka-lyhyt-oppimaara

Teemaosioita

http://www.casio-laskimet.fi/fi/opettajakoulu/opettajalle5/

12. Sanomme, että derivoituva funktio on *konveksi,* jos sen derivaatta on kasvava funktio.

a) Osoita, että $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ ei ole konveksi.

b) Tutki, millä vakion $a \in \mathbf{R}$ arvoilla funktio $g(x) = x^4 + ax^2 + 2$ on konveksi.

12) a) Tutkitaan funktion f(x) derivaattafunktiota:

$\frac{d}{dx}(x^3+2x^2-1)$

$$3 \cdot x^2+4 \cdot x$$

Tämä on ylöspäin avautuva paraabeli eikä siis kasvava funktio.

b) Derivoidaan funktio g(x):

$\frac{d}{dx}(x^4+a*x^2+2)$

$$4 \cdot x^3+2 \cdot a \cdot x$$

Derivaattafunktio on kasvava funktio, mikäli sen derivaatta ≥ 0.

$\frac{d}{dx}(4 \cdot x^3+2 \cdot a \cdot x)$

$$12 \cdot x^2+2 \cdot a$$

Saadaan ehto $12 \cdot x^2+2 \cdot a \geq 0$. Kyseessä on ylöpäin avautuva paraabeli, jonka huippu on pisteessä (0, 2a). Tällöin funktio g(x) on konveksi, kun 2a≥0 eli a≥0.

13. Allu haluaa ostaa 1 800 € maksavan maastopyörän. Mummo antaa hänelle 700 €. Allu tallettaa mummolta saamansa rahat 30.12.2014 tilille, jonka vuosittainen korkotuotto on 0,6 %. Lisäksi Allu asettaa itselleen kuukausittaisen säästötavoitteen: hän tallettaa jokaisen kuukauden ensimmäisenä päivänä tietyn summan, alkaen helmikuusta 2015. Paljonko Allun tulee kuukausittain säästää, jotta hän saa vuoden 2015 loppuun mennessä kokoon 1 800 €? Oletetaan, että jokaisessa kuussa on 30 päivää ja että lähdevero on 30 %.

13) Jos Allu tallettaa summa a€ helmikuusta alkaen vuoden loppuun, talletuksia tulee yhteensä 11 kpl. Jokainen niistä kasvaa korkoa kuukausikoron 0,7*0,6%/12=0,035% mukaisesti, kun lähdevero on huomioitu. Helmikuun talletus 11 kertaa, maaliskuun talletus 10 kertaa, ..., joulukuun talletus kerran.

Omien talletusten korkotuotto vuodessa lähdeverojen jälkeen on

a*0.00035(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11)

$$0.0231 \cdot a$$

Lisätään mummon lahja (alle 4000 euroa, ei mene lahjaveroa) ja sen vuosikorko lähdeveron jälkeen Allun talletuksiin 11a ja korkoihin 0.0231•a, jolloin saadaan ratkaistua kuukausitalletus a yhtälöstä

solve((1+0.7*0.006)*700+(11+0.0231)a=1800,a)

{a=99.52372745}

Koska pyörään tarvitaan 1800 euroa, ei alaspäin pyöristystä voi käyttää. Siispä Allun on talletettava kuukausittain helmikuusta alkaen 99,53€.