Laske Laudatur
ClassPad.netin ja ClassPad Managerin avulla
Lyhyt matematiikka, kevät 2022

CASIO®

Tiivistelmä
Kevään 2022 sähköisten yo-kokeiden ratkaisut selainpohjaisella ClassPad.netillä ja työasemalle ladattavalla ClassPad Managerilla laskettuina.

Pepe Palovaara
pepe.palovaara@fintegrity.fi

FI – Matematiikka, lyhyt oppimäärä

23.3.2022

Koe koostuu 13 tehtävästä, joista vastataan kymmeneen. Tehtävät on jaettu kolmeen osaan. A-osassa on neljä kaikille pakollista tehtävää. B1-osassa on viisi tehtävää, joista vastataan kolmeen. B2-osassa on neljä tehtävää, joista vastataan kolmeen. Kaikki tehtävät arvostellaan pistein 0–12, joten kokeen maksimipistemäärä on 120.

A-osassa saat käyttää koejärjestelmässä olevaa taulukkokirjaa ja perusohjelmia. A-osa palautetaan tehtävän 4 jälkeen olevalla painikkeella. Tämän jälkeen A-osan vastauksia ei voi enää muokata. A-osan palauttamisen jälkeen kaikki koejärjestelmän ohjelmat ovat käytettävissäsi. Voit vastata B-osien tehtäviin myös ennen A-osan palauttamista.

Useimmissa tehtävissä kaikkien osatehtävien vastaukset kirjoitetaan samaan vastauskenttään. Jaottele vastauksesi osatehtävien mukaisesti. Halutessasi voit tuottaa vastausten tueksi piirroksia, kaavioita tai taulukoita ja liittää niistä kuvakaappauksen mihin tahansa tekstivastaukseen.

Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

1. Peruslaskuja 12 p.

Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset ilman välivaiheita ja perusteluja. Jokaisen kohdan vastaus on kokonaisluku.

Tehtävässä ei voi käyttää kuvakaappauksia eikä kaavaeditoria. Kunkin vastauksen maksimipituus on 5 merkkiä. Vastaukset arvostellaan tietokoneavusteisesti, ja ohjeiden noudattamatta jättäminen voi johtaa pistevähennyksiin. Jokaisesta kohdasta voi saada 2 pistettä.

1.1 Lausekkeen $(-9) \cdot (42 - 35)$ arvo on **2 p.**

-63

1.2 Funktion $f(x) = 4x - 12$ nollakohta on **2 p.**

$x =$ 3

1.3 Suora kulkee pisteiden $A = (1, 15)$ ja $B = (7, 81)$ kautta. Suoran kulmakerroin on **2 p.**

$k =$ 11

1.4 Lausekkeen $6^3 \cdot 2^{-2}$ arvo on **2 p.**

54

1.5 Geometrinen lukujono alkaa luvuilla $a_1 = 256$, $a_2 = 128$ ja $a_3 = 64$. Lukujonon viides jäsen on **2 p.**

$a_5 =$ 16

1.6 Yhtälön $2^{2x-5} = 8$ ratkaisu on **2 p.**

$x =$ 4

2. Useita ratkaisutapoja 12 p.

Yhtälöitä ratkaistaessa käytetään usein osittelulakia esimerkiksi silloin, kun kerrotaan sulut auki;

$$4(x+1)=4x+4$$

on esimerkki sulkujen aukikertomisesta.

1. Ratkaise yhtälö $12(x-7)=24$ kahdella eri tavalla, joista toisessa käytetään osittelulakia ja toisessa ei käytetä. **(6 p.)**
2. Ratkaise yhtälö $(2x+1)(x-6)=0$ kahdella eri tavalla, joista toisessa käytetään osittelulakia ja toisessa ei käytetä. **(6 p.)**

1.

$$12\left(x-7\right)=24\Leftrightarrow 12x-84=24\Leftrightarrow 12x=108\Leftrightarrow x=9$$

$$12\left(x-7\right)=24\Leftrightarrow x-7=2\Leftrightarrow x=9$$

2.

$$\left(2x+1\right)\left(x-6\right)=0\Leftrightarrow 2x+1=0\vee x-6=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\vee x=6$$

$$\left(2x+1\right)\left(x-6\right)=0\Leftrightarrow 2x^2-11x-6=0\Leftrightarrow x=\frac{11\pm\sqrt{\left(-11\right)^2-4\cdot 2\cdot\left(-6\right)}}{2\cdot 2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{11\pm 13}{4}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\vee x=6$$

3. Sisään ja ympäri piirretyt ympyrät 12 p.

1. Neliön sisään piirretään mahdollisimman suuri ympyrä. Ympyrän säde on 6,0 cm. Määritä neliön kaikkien kärkien kautta kulkevan ympyrän säde 0,1 cm:n tarkkuudella. **(6 p.)**
2. Tasasivuisen kolmion sisään piirretään mahdollisimman suuri ympyrä. Ympyrän säde on 6,0 cm. Määritä kolmion kaikkien kärkien kautta kulkevan ympyrän säde 0,1 cm:n tarkkuudella. **(6 p.)**

1. Säde on yhtä pitkä kuin etäisyys neliön keskipisteestä yhteen sen kärjistä eli yhtä pitkä kuin sellaisen neliön halkaisija, jonka sivun pituus on 6.

$$r=\sqrt{2}\cdot 6\approx 8{,}5cm.$$

2. Säde on yhtä pitkä kuin etäisyys ympyrän keskipisteestä yhteen kolmion kärjistä eli yhtä pitkä kuin hypotenuusa suorakulmaisessa kolmiossa, jonka 30∘ kulmaa vastapäisen kateetin pituus on 6.

$$r=\frac{6}{\sin(30\circ)}=12{,}0cm$$

4. Frekvenssitaulukko 12 p.

Aineisto

4.A Taulukko: Koirien selän pituus

Taulukossa 4.A on esitetty aineisto beagle-koirien selän pituudesta.

1. Mikä on aineiston tyyppiarvo eli moodi? **(2 p.)**
2. Kuinka monta koiraa aineistoon sisältyy? **(2 p.)**
3. Mikä on aineiston koirien selän pituuden keskiarvo? **(8 p.)**

4.A Taulukko: Koirien selän pituus

Pituus (cm)	Lukumäärä
42	1
43	0
44	8
45	7
46	4
47	11
48	3

Lähde: YTL.

1. Moodi on se pituus, jonka lukumäärä on suurin eli 47cm.
2. Taulukon eri pituisten koirien lukumäärien summa on

$$1+0+8+7+4+11+3=34$$

3. Koirien selän pituuden keskiarvo on

$$\frac{1\cdot 42+0\cdot 43+8\cdot 44+7\cdot 45+4\cdot 46+11\cdot 47+3\cdot 48}{34}\approx 45{,}7cm$$

B1-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

5. Päivämatkan pituus 12 p.

Aku ja Aulis ovat pitkällä vaelluksella. Käveltyään eräänä päivänä kolmasosan päivämatkastaan he päättävät kävellä vielä 7 km ennen lounastaukoa. Lounaan jälkeen he huomaavat, että jäljellä on puolet aiotusta päivämatkasta. Kuinka pitkä aiottu päivämatka on?

Merkitään x=aiotun päivämatkan pituus (km) ja ratkaistaan yhtälö

$$\frac{1}{3}x+7=\frac{1}{2}x \Leftrightarrow 2x+42=3x \Leftrightarrow x=42km$$

Ratkaisu ClassPad.netin avulla:

Merkitään x=aiotun päivämatkan pituus (km) ja ratkaistaan yhtälö:

$$\text{solve}\left(\frac{1}{3}x+7=\frac{1}{2}x,x\right)$$

$$\{x=42\}$$

Vastaus: 42km.

Ratkaisu ClassPad Managerin avulla:

Merkitään x = aiotun päivämatkan pituus (km) ja ratkaistaan yhtälö

$\text{solve}(\frac{1}{3}x+7=\frac{1}{2}x, x)$

$\{x=42\}$

Vastaus: 42km.

6. Voiton tavoittelu 12 p.

Tarkastellaan jällenmyyjän tekemää voittoa. Yksinkertaisuuden vuoksi tehtävässä ei oteta verotusta huomioon.

1. Jälleenmyyjä maksoi takista tukkukauppiaalle 120 euroa. Takki ei mennyt kaupaksi, joten jälleenmyyjä alensi hintaa 10 %:a. Mikä takin myyntihinnan pitää olla, jotta 10 %:n alennuksen jälkeen jälleenmyyjä tekee 20 %:a voittoa? **(6 p.)**

2. Jälleenmyyjä maksoi juhlakengistä tukkukauppiaalle 140 euroa ja asetti kenkien hinnaksi 199 euroa. Kengät eivät kuitenkaan menneet kaupaksi tähän hintaan, joten jälleenmyyjä päätti alentaa hintaa. Mikä on suurin mahdollinen alennusprosentti, jos hän haluaa tehdä vähintään 20 %:a voittoa ja alennusprosentin pitää olla kokonaisluku? **(6 p.)**

1. Merkitään x=takin myyntihinta (€) ja ratkaistaan yhtälö

$$0{,}9x = 1{,}2 \cdot 120 \Leftrightarrow x = \frac{1{,}2 \cdot 120}{0{,}9} \Leftrightarrow x = 160€$$

2. Merkitään k=alennuksen määrää kuvaava prosenttikerroin ja ratkaistaan yhtälö

$$k \cdot 199 \geq 1{,}20 \cdot 140 \Leftrightarrow k \geq \frac{1{,}20 \cdot 140}{199} \Leftrightarrow k \geq 0{,}844\ldots$$

Alennusprosentti voi siis suurimmillaan olla

$$(1 - 0{,}844\ldots) \cdot 100 \approx 15{,}577\ldots\%$$

Koska alennusprosentin piti olla kokonaisluku, on vastaus 15%.

Ratkaisu ClassPad.netin avulla:

1. Merkitään x=takin myyntihinta (€) ja ratkaistaan yhtälö

$$\text{solve}(0.9x = 1.2 \cdot 120, x)$$

$$\{x = 160\}$$

2. Merkitään k=alennuksen määrää kuvaava prosenttikerroin ja ratkaistaan yhtälö

$$\text{solve}(k \cdot 199 \geq 1.20 \cdot 140, k)$$

$$k \geq 0.8442211055$$

Alennusprosentti voi siis suurimmillaan olla

$$(1 - 0.8442211055) \cdot 100$$

$$15.57788945$$

Koska alennusprosentin piti olla kokonaisluku, on vastaus 15%.

Ratkaisu ClassPad Managerin avulla:

1. Merkitään x = takin myyntihinta (€) ja ratkaistaan yhtälö
```
solve(0.9x=1.2*120,x)
                                                    {x=160}
```
Vastaus: Takin myyntihinta on 160€.

2. Merkitään k = alennuksen määrää kuvaava prosenttikerroin ja ratkaistaan yhtälö
```
solve(k*199≥1.20*140,k)
                                          {k≥0.8442211055}
```
Alennusprosentti voi siis suurimmillaan olla
```
(1−0.8442211055)*100
                                               15.57788945
```
Koska alennusprosentin piti olla kokonaisluku, on vastaus 15%.
Vastaus: Alennusprosentti voi suurimmillaan olla 15%.

7. Taloudellisempi auto 12 p.

Aineisto

7.A Taulukko: Autojen tiedot

Matti aikoo ostaa joko sähkö- tai polttomoottoriauton. Hän vertailee vaihtoehtoja taulukon 7.A arvioiden perusteella.

Matti tarvitsee auton koko hinnan suuruisen tasalyhennyslainan. Lainan vuosikorko on 2,4 % (jolloin kuukausikorko on 0,2 %) ja lyhennys 200 euroa kuukaudessa.

Laske autojen arvot ja jäljellä olevien lainojen määrät viiden vuoden kuluttua. Laske myös autojen käyttökustannukset ja lainojen korkokustannukset viiden vuoden aikana. Kumpi vaihtoehto olisi ollut viiden vuoden käytön jälkeen taloudellisempi valinta? Tehtävässä ei tarvitse ottaa huomioon rahan arvon muutosta, eli inflaatiota tai deflaatiota.

7.A Taulukko: Autojen tiedot

Sähköauto:

- Hinta 25 000 euroa
- Sähkö 30 euroa kuukaudessa
- Muut kulut 800 euroa vuodessa
- Auton arvo alenee 8 % vuodessa

Polttomoottoriauto:

- Hinta 12 000 euroa
- Polttoaine 150 euroa kuukaudessa
- Muut kulut 1 200 euroa vuodessa
- Auton arvo alenee 12 % vuodessa

Muita kuluja ovat esimerkiksi vakuutus, vero, katsastus ja huolto.

Lähde: YTL.

Tukivideoita ylkkäreistä: https://bit.ly/casio-academy

Sähköauton käyttökulut viidessä vuodessa ovat

$$5 \cdot 12 \cdot 30 + 5 \cdot 800 = 5800€$$

ja korkoihin menee aritmeettisen summan kaavan avulla laskettuna

$$60 \cdot \frac{0{,}002 \cdot 25000 + 0{,}002 \cdot (25000 - 59 \cdot 200)}{2} = 2292 \approx 2300€$$

Sähköauton hinnasta on jäljellä viiden vuoden kuluttua

$$0{,}92^5 \cdot 25000 = 16477{,}04 \approx 16500€$$

Polttomoottoriautolle käyttökulut viidessä vuodessa ovat

$$5 \cdot 12 \cdot 150 + 5 \cdot 1200 = 15000€$$

ja korkoihin menee aritmeettisen summan kaavan avulla laskettuna

$$60 \cdot \frac{0{,}002 \cdot 12000 + 0{,}002 \cdot (12000 - 59 \cdot 200)}{2} = 732 \approx 700€$$

Polttomoottoriauton hinnasta on jäljellä viiden vuoden kuluttua

$$0{,}88^5 \cdot 12000 = 6332{,}78 \approx 6300€$$

Viiden vuoden kuluttua sähköauton omistajalla olisi myyntihinnan ja kulujen erotuksena

$$16500 - 2300 - 5800 = 8400€$$

ja polttomoottoriauton omistajalla

$$6300 - 15000 - 700 = -9400€$$

Sähköauto on siis taloudellisempi ratkaisu. Ero on niin suuri, että lukujen pyöristäminen sadan euron tarkkuuteen on perusteltua.

Ratkaisu ClassPad.netin avulla:

Sähköauton käyttökulut (€) viidessä vuodessa ovat

$$5 \cdot 12 \cdot 30 + 5 \cdot 800$$

$$5800$$

ja korkoihin menee aritmeettisen summan kaavan avulla laskettuna

$$60 \cdot \frac{0.002 \cdot 25000 + 0.002 \cdot (25000 - 59 \cdot 200)}{2}$$

$$2292$$

Sähköauton hinnasta on jäljellä viiden vuoden kuluttua

$$0.92^5 \cdot 25000$$

$$16477.03808$$

Viiden vuoden kuluttua sähköauton omistajalla olisi myyntihinnan ja kulujen erotuksena

$$16477 - 2292 - 5800$$

$$8385$$

ja polttomoottoriauton omistajalla

$$6333 - 15000 - 732$$

$$-9399$$

Sähköauto on siis taloudellisempi ratkaisu. Ero on niin suuri, että lukujen pyöristämisellä euron tarkkuuteen on perusteltua.

Ratkaisu ClassPad Managerin avulla:

Sähköauton käyttökulut (€) viidessä vuodessa ovat

5*12*30+5*800

5800

ja korkoihin menee aritmeettisen summan kaavan avulla laskettuna

$$60*\frac{0.002*25000+0.002*(25000-59*200)}{2}$$

2292

Sähköauton hinnasta on jäljellä viiden vuoden kuluttua

$$0.92^5*25000$$

16477.03808

Polttomoottoriauton käyttökulut (€) viidessä vuodessa ovat

5*12*150+5*1200

15000

ja korkoihin menee aritmeettisen summan kaavan avulla laskettuna

$$60*\frac{0.002*12000+0.002*(12000-59*200)}{2}$$

732

Polttomoottoriauton hinnasta on jäljellä viiden vuoden kuluttua

$$0.88^5*12000$$

6332.783002

Viiden vuoden kuluttua sähköauton omistajalla olisi myyntihinnan ja kulujen erotuksena n.

16477−2292−5800

8385

ja polttomoottoriauton omistajalla n.

6333−15000−732

−9399

Sähköauto on siis taloudellisempi ratkaisu. Ero on niin suuri, että lukujen pyöristäminen euron tarkkuuteen ei vaikuta vastaukseen.

8. Suurin arvo 12 p.

Lukuun 10 lisätään erään positiivisen luvun neliön ja kuution erotus. Määritä derivaatan avulla suurin mahdollinen arvo, joka näin voidaan saada.

Merkitään x=positiivinen luku ja muodostetaan tehtävän ongelmasta funktio

$$f(x) = 10 + x^2 - x^3,\ x > 0$$

Derivoidaan funktio ja lasketaan derivaattafunktiolle nollakohdat suurimman arvon määrittämiseksi

$$f'(x) = 2x - 3x^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2 - 3x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2}{3}$$

Derivaattafunktion nollakohdista ensimmäinen ei käy, koska luvun piti olla positiivinen. Derivaattafunktion kuvaaja on alaspäin avautuva paraabeli, joten sen merkit nollakohtien määräämissä väleissä ovat - | + | - . Ainoa derivaattafunktion nollakohdista on siis paikallinen maksimikohta ja sitä vastaava maksimiarvo on

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 10 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 10 + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{270 + 12 - 8}{27} = \frac{274}{27}$$

Ratkaisu ClassPad.netin avulla:

Merkitään x=positiivinen luku ja muodostetaan tehtävän ongelmasta funktio

$$f(x) := 10 + x^2 - x^3$$

done

Derivoidaan funktio ja lasketaan derivaattafunktiolle nollakohdat suurimman arvon määrittämiseksi

$$f'(x) := \frac{d}{dx}(f(x))$$

done

$$f'(x)$$

$$-3 \cdot x^2 + 2 \cdot x$$

$$\text{solve}(f'(x) = 0, x) \mid x > 0$$

$$\left\{x = \frac{2}{3}\right\}$$

Derivaattafunktion kuvaaja on alaspäin avautuva paraabeli, joten sen merkit nollakohdan ympärillä ovat - | + ja nollakohta on paikallinen maksimikohta. Sitä vastaava maksimiarvo on

$$f\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{274}{27}$$

Ratkaisu ClassPad Managerin avulla:

Merkitään x = positiivinen luku ja muodostetaan tehtävän ongelmasta funktio

define $f(x)=10+x^2-x^3$

done

Derivoidaan funktio ja lasketaan derivaattafunktiolle nollakohdat suurimman arvon määrittämiseksi

define $f'(x)=\frac{d}{dx}(f(x))$

done

$f'(x)$

$-3 \cdot x^2+2 \cdot x$

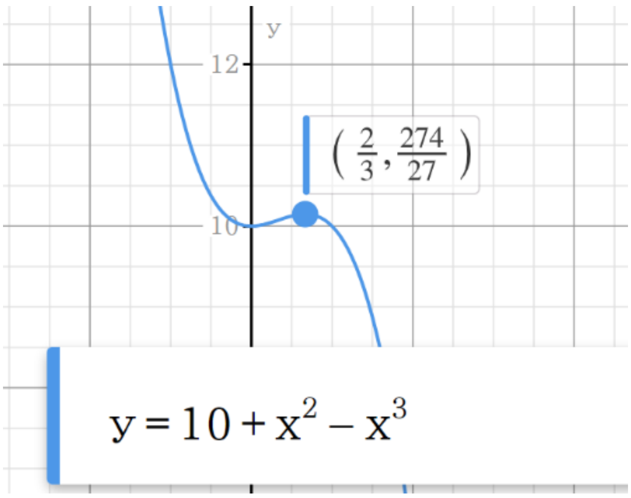
solve$(f'(x)=0,x) \mid x>0$

$\left\{x=\frac{2}{3}\right\}$

Derivaattafunktion kuvaaja on alaspäin avautuva paraabeli, joten sen merkit nollakohdan ympärillä ovat − | + ja nollakohta on paikallinen maksimikohta. Sitä vastaava maksimiarvo on

$f\left(\frac{2}{3}\right)$

$\frac{274}{27}$



9. Monivalintakoe 12 p.

Kokeessa on 10 monivalintatehtävää. Jokaisessa tehtävässä on neljä vaihtoehtoa, joista vain yksi on oikein. Oikeasta vastauksesta saa 3 pistettä ja väärästä saa –1 pistettä. Lopuksi pisteet lasketaan yhteen, ja jos summa on negatiivinen, se muutetaan pistemääräksi nolla.

1. Eräs opiskelija ei osaa vastata yhteenkään tehtävään tietojensa pohjalta, ja hän vastaa kaikkiin tehtäviin arvaamalla. Millä todennäköisyydellä hän saa kokeesta nolla pistettä? **(6 p.)**

2. Toinen opiskelija pystyy sulkemaan jokaisesta tehtävästä pois yhden väärän vastausvaihtoehdon, ja hän vastaa kaikkiin tehtäviin arvaamalla jäljellä olevista vaihtoehdoista. Millä todennäköisyydellä hän saa kokeesta täydet pisteet? **(6 p.)**

1. Opiskelija voi saada 0 pistettä vain, jos hänellä on 0, 1 tai 2 tehtävää oikein. (Jos hänellä on 3 tehtävää oikein, niin pienin mahdollinen pistemäärä kokeesta on $3\cdot 3 - 7\cdot 1 = 2 > 0$.) Tehtävä voidaan laskea toistokokeena binomitodennäköisyyden avulla, sillä yksittäisen tehtävän onnistumisen todennäköisyys pysyy samana $1/4 = 0{,}25$ läpi kokeen.

$$\binom{10}{0}\cdot 0{,}25^0\cdot 0{,}75^{10} + \binom{10}{1}\cdot 0{,}25^1\cdot 0{,}75^9 + \binom{10}{2}\cdot 0{,}25^2\cdot 0{,}75^8 \approx 0{,}53$$

2. Täysiin pisteisiin vaaditaan 10 oikeaa arvausta, joista jokaisen todennäköisyys on 1/3.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{10} = \frac{1}{59049} \approx 0{,}000017$$

Ratkaisu ClassPad.netin avulla:

1. Opiskelija voi saada 0 pistettä vain, jos hänellä on 0, 1 tai 2 tehtävää oikein (jos hänellä on 3 tehtävää oikein, niin pienin mahdollinen pistemäärä kokeesta on 3*3-7*1=2>0). Tehtävä voidaan laskea toistokokeena binomitodennäköisyyden avulla, sillä yksittäisen tehtävän onnistumisen todennäköisyys pysyy samana 0,25 läpi kokeen.

$$\mathrm{nCr}(10,0)\cdot 0.25^0\cdot 0.75^{10}+\mathrm{nCr}(10,1)\cdot 0.25^1\cdot 0.75^9+\mathrm{nCr}(10,2)\cdot 0.25^2\cdot 0.75^8$$

$$0.525592804$$

Vastaus: n. 0,53.

2. Täysiin pisteisiin vaaditaan 10 oikeaa arvausta, joista jokaisen todennäköisyys on 1/3.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

$$\frac{1}{59049}$$

ans

$$0.00001693508$$

Vastaus: n. 0,000017.

Ratkaisu ClassPad Managerin avulla:

1. Opiskelija voi saada 0 pistettä vain, jos hänellä on 0, 1 tai 2 tehtävää oikein (jos hänellä on 3 tehtävää oikein, niin pienin mahdollinen pistemäärä kokeesta on 3*3-7*1=2>0). Tehtävä voidaan laskea toistokokeena binomitodennäköisyyden avulla, sillä yksittäisen tehtävän onnistumisen todennäköisyys pysyy samana 0,25 läpi kokeen.

$nCr(10,0)*0.25^0*0.75^{10}+nCr(10,1)*0.25^1*0.75^8+nCr(10,1)*0.25^1*0.75^8$

0.5568780899

Vastaus: n. 0,53.

2. Täysiin pisteisiin vaaditaan 10 oikeaa arvausta, joista jokaisen todennäköisyys on 1/3.

$\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$

$\frac{1}{59049}$

ans

0.00001693508

Vastaus: n. 0,000017.

B2-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

10. Lukujono 12 p.

Lukujono alkaa luvuilla 4 ja 9. Kuinka moni lukujonon jäsen on pienempi kuin 1 000, jos lukujono on

1. aritmeettinen **(6 p.)**
2. geometrinen? **(6 p.)**

1. Aritmeettisen lukujonon peräkkäisten jäsenten erotus d = 9 - 4 = 5. Muodostetaan aritmeettisen jonon yleisen termin lausekkeen avulla epäyhtälö ja ratkaistaan se

$$4+(n-1)\cdot 5<1000 \Leftrightarrow 4+5n-5<1000 \Leftrightarrow 5n<1001 \Leftrightarrow n<200{,}2$$

Koska n ∈ $\mathbb{Z}$+, on vastaus 200.

2. Geometrisen lukujonon peräkkäisten jäsenten suhde q = 9/4. Muodostetaan nyt epäyhtälö geometrisen jonon yleisen termin lausekkeen avulla

$$4\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}<1000 \Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}<250 \Leftrightarrow (n-1)\cdot\ln\frac{9}{4}<\ln 250 \Leftrightarrow n\cdot\ln\frac{9}{4}-\ln\frac{9}{4}<\ln 250$$

$$\Leftrightarrow n<\frac{\ln 250+\ln\frac{9}{4}}{\ln\frac{9}{4}}\approx 7{,}8 \quad \left(huom:\ \ \ln\frac{9}{4}>0,\ jaettaessa\ epäyhtälömerkin\ suunta\ säilyy\right)$$

Koska n ∈ $\mathbb{Z}$+, on vastaus 7.

Ratkaisu ClassPad.netin avulla:

1. Aritmeettisen lukujonon peräkkäisten jäsenten erotus d=9-4=5. Muodostetaan aritmeettisen jonon yleisen termin lausekkeen avulla epäyhtälö ja ratkaistaan se

$$\text{solve}(4+(n-1)\cdot 5<1000,n)$$

$$\{n<200.2\}$$

Koska n on positiivinen kokonaisluku, on vastaus 200.

2. Geometrisen lukujonon peräkkäisten jäsenten suhde q=9/4. Muodostetaan nyt epäyhtälö geometrisen jonon yleisen termin lausekkeen avulla ja ratkaistaan se

$$\text{solve}\left(4\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}<1000,n\right)$$

$$\{n<7.80879909\}$$

Koska n on positiivinen kokonaisluku, on vastaus 7.

Ratkaisu ClassPad Managerin avulla:

1. Aritmeettisen lukujonon peräkkäisten jäsenten erotus d=9−4=5. Muodostetaan aritmeettisen jonon yleisen termin lausekkeen avulla epäyhtälö ja ratkaistaan se

solve(4+(n−1)*5<1000,n)

{n<200.2}

Koska n on positiivinen kokonaisluku, on vastaus 200.

2. Geometrisen lukujonon peräkkäisten jäsenten suhde q=9/4. Muodostetaan nyt epäyhtälö geometrisen jonon yleisen termin lausekkeen avulla ja ratkaistaan se

$$\text{solve}\left(4*\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}<1000,n\right)$$

{n<7.80879909}

Koska n on positiivinen kokonaisluku, on vastaus 7.

11. Virustartunnat 12 p.

Syksyllä 2020 koronaviruspandemian toisen aallon alkuvaiheessa Suomessa raportoitiin edeltävien kahden viikon (14 vuorokauden) aikana havaittujen tartuntatapausten lukumääriä. Tämä lukumäärä oli 7. syyskuuta 389 ja kaksi viikkoa myöhemmin 21. syyskuuta 719 koronavirustartuntaa. (Lähde: www.hs.fi. Luettu 21.9.2020.) Oletetaan, että havaittujen tartuntojen määrä noudattaa eksponentiaalista mallia.

1. Kuinka monta koronavirustartuntaa havaittiin mallin mukaan päivämäärää 8.1.2021 edeltävällä kahden viikon jaksolla? Tammikuun 8. päivä on 140 vuorokautta päivämäärän 21.9.2020 jälkeen. **(4 p.)**
2. Merkitään muuttujalla t aikaa vuorokausina niin, että päivämäärä 7.9.2020 vastaa arvoa $t=0$. Eksponentiaalisen mallin mukaan edeltävän kahden viikon aikana havaittujen tapausten lukumäärälle k pätee $k=a\cdot 2^{bt}$. Määritä vakiot a ja b. **(4 p.)**
3. Pohdi syitä sille, miksi tässä tehtävässä käytetty malli ei ole hyvä ennuste tartuntamäärien kehitykselle pitkällä aikavälillä. **(4 p.)**

1. Mallinnetaan tilannetta eksponentiaalisen mallin avulla.

$$\left(\frac{719}{389}\right)^{\frac{140}{14}}\cdot 389=181026\approx 181000$$

2. Sijoitetaan tehtävästä saatavat luvut k = 389 ja t = 0 annettuun yhtälöön ja ratkaistaan siitä a ja b

$$389=a\cdot 2^{b\cdot 0}\Leftrightarrow 389=a\cdot 1=a$$

Ratkaistaan b sijoittamalla saatu a:n arvo yhtälöön ja käyttämällä muita tehtävästä saatuja arvoja k = 719 ja t = 14

$$719=389\cdot 2^{b\cdot 14}\Leftrightarrow \frac{719}{389}=2^{14b}\Leftrightarrow \ln\frac{719}{389}=14b\cdot\ln 2\Leftrightarrow b=\frac{\ln\frac{719}{389}}{14\cdot\ln 2}=0{,}063301\ldots\approx 0{,}063$$

3. Uudelleen tartunnat, rokotukset, paranemiset ja väestön rajallisuus eivät tue eksponentiaalista mallia.

Ratkaisu ClassPad.netin avulla:

1. Mallinnetaan tilannetta eksponentiaalisen mallin avulla.

$$\left(\frac{719}{389}\right)^{\frac{140}{14}} \cdot 389$$

181026.6405

Tartuntoja on n. 181000.

2. Sijoitetaan tehtävästä saatavat luvut k=389 ja t=0 annettuun yhtälöön ja ratkaistaan siitä a

$$\text{solve}\left(389 = a \cdot 2^{b \cdot 0}, a\right)$$

$\{a = 389\}$

Sijoitetaan saatu a:n arvo yhtälöön ja käytetään muita tehtävästä saatuja arvoja k=719 ja t=14. Ratkaistaan b

$$\text{solve}\left(719 = 389 \cdot 2^{b \cdot 14}, b\right)$$

$\{b = 0.06330154396\}$

Siis a on 389 ja b on noin 0,063.

3. Uudelleen tartunnat, rokotukset, paranemiset ja väestön rajallisuus eivät tue eksponentiaalista mallia.

Ratkaisu ClassPad Managerin avulla:

1. Mallinnetaan tilannetta eksponentiaalisen mallin avulla.

$$\left(\frac{719}{389}\right)^{\frac{140}{14}} * 389$$

181026.6405

Tartuntoja on n. 181000.

2. Sijoitetaan tehtävästä saatavat luvut k = 389 ja t = 0 annettuun yhtälöön ja ratkaistaan siitä a

solve(389=a*2^(b*0),a)

{a=389}

Sijoitetaan saatu a:n arvo yhtälöön ja käytetään muita tehtävästä saatuja arvoja k = 719 ja t = 14. Ratkaistaan b

solve(719=389*2^(b*14),b)

{b=0.06330154396}

Siis a on 389 ja b on noin 0,063.

3. Uudelleen tartunnat, rokotukset, paranemiset ja väestön rajallisuus eivät tue eksponentiaalista mallia.

12. Myyntitulojen maksimointi 12 p.

Tuotteen nykyinen hinta on 60 euroa. Kauppias arvioi, että tällä hinnalla tuotetta myydään 1 000 kappaletta. Myyntituloja kasvattaakseen kauppias päättää muuttaa tuotteen hintaa. Vastaavan tuotteen myynnistä kertyneen kokemuksen perusteella kauppias arvioi, että jokainen euro, jolla tuotteen hinta nousee, vähentää myyntiä kymmenellä kappaleella. Vastaavasti jokainen euro, jolla tuotteen hintaa laskee, kasvattaa myyntiä kymmenellä kappaleella.

1. Kuinka suuret myyntitulot ovat, jos tuotteen hinta on 55 euroa? **(2 p.)**
2. Muodosta myyntituloja mallintava funktio $f(x)$, kun x on tuotteen hinnan muutos, ja laske sen derivaatta $f'(x)$. **(5 p.)**
3. Määritä se tuotteen hinta, jolla saadaan suurimmat mahdolliset myyntitulot. **(5 p.)**

1. Tuotteita myydään 1000 + (60 - 55)*10 kpl ja hinta kappaleelta on 55€, joten myyntitulot ovat

$$1050 \cdot 55 = 57750€$$

2. Merkitään x = tuotteen hinnan muutos (€), jolloin

$$f(x) = (60 + x)(1000 - 10x) = -10x^2 + 400x + 60000 \quad \text{ja}$$

$$f'(x) = -20x + 400$$

3. Derivaattafunktion kuvaaja on laskeva suora, joten sen merkit nollakohdan ympärillä vaihtuvat + | -. Täten derivaatan nollakohta on paikallinen maksimikohta.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -20x + 400 = 0 \Leftrightarrow x = 20$$

Suurin tuotto saadaan, kun tuotteen hinta on 20 + 60 = 80€.

Ratkaisu ClassPad.netin avulla:

1. Tuotteita myydään 1000+(60-55)*10 kpl ja hinta kappaleelta on 55€, joten myyntitulot ovat

$$(1000+(60-55)\cdot 10)\cdot 55$$

$$57750$$

2. Merkitään x=tuotteen hinnan muutos (€), jolloin saadaan

$$\mathbf{f}(x):=(60+x)\cdot(1000-10x)$$

done

$$\text{expand}(\mathbf{f}(x))$$

$$-10\cdot x^2+400\cdot x+60000$$

$$\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x))$$

$$-20\cdot x+400$$

3. Derivaattafunktion kuvaaja on laskeva suora, joten sen merkit nollakohdan ympärillä vaihtuvat + | -. Täten derivaatan nollakohta on paikallinen maksimikohta.

$$\text{solve}(-20x+400=0,x)$$

$$\{x=20\}$$

Suurin tuotto saadaan, kun tuotteen hinta on 20+60=80€.

Ratkaisu ClassPad Managerin avulla:

1. Tuotteita myydään 1000+(60−55)∗10 kpl ja hinta kappaleelta on 55€, joten myyntitulot ovat
(1000+(60−55)∗10)∗55

57750

2. Merkitään x = tuotteen hinnan muutos (€), jolloin saadaan
define f(x)=(60+x)∗(1000−10x)

done

expand(f(x))

$-10\cdot x^2+400\cdot x+60000$

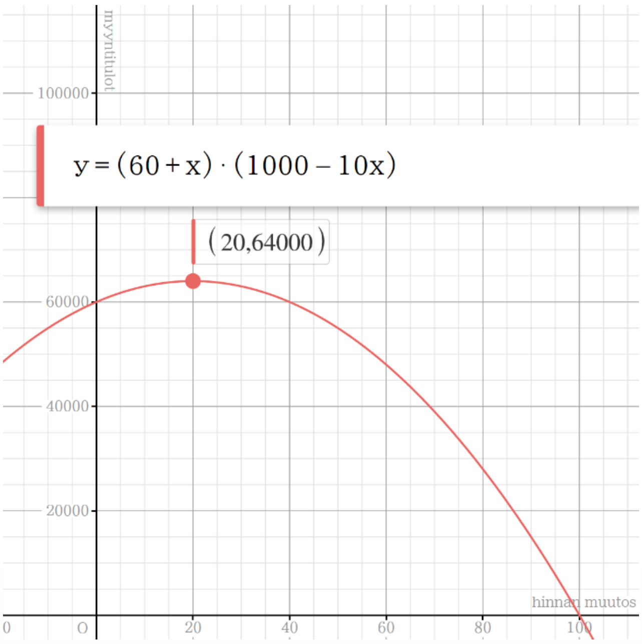
$\frac{d}{dx}(f(x))$

$-20\cdot x+400$

3. Derivaattafunktion kuvaaja on laskeva suora, joten sen merkit nollakohdan ympärillä vaihtuvat + | −. Täten derivaatan nollakohta on paikallinen maksimikohta.
solve(−20·x+400=0, x)

{x=20}

Suurin tuotto saadaan, kun tuotteen hinta on 20+60=80€.



13. Kuutioista monitahokkaita 12 p.

Aineisto

13.A Kuva: Puuveistokset

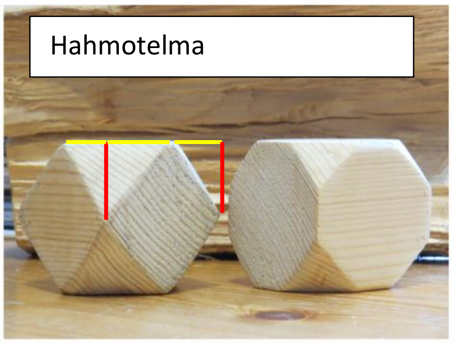
Puisen kuution särmän pituus on 2,0 cm. Tarkastellaan kahta monitahokasta, jotka saadaan sahaamalla pois kuutioiden nurkista pyramidin muotoiset kappaleet, alla kuvatuilla tavoilla, ks. kuva 13.A.

1. Piirretään kuution tahkoihin janat, jotka yhdistävät vierekkäisten särmien keskipisteet. Poistetaan kuution nurkista pyramidit, joiden pohjasärminä ovat piirretyt janat. Määritä näin saadun monitahokkaan tilavuus. **(6 p.)**
2. Piirretään kuution tahkoihin sellaiset janat, joiden päätepisteet ovat vierekkäisillä särmillä niin, että tahkoihin muodostuu säännöllinen 8-kulmio. Poistetaan kuution nurkista pyramidit, joiden pohjasärminä ovat piirretyt janat. Määritä näin saadun monitahokkaan pinta-ala. **(6 p.)**

13.A Kuva: Puuveistokset

Lähde: YTL.

13.A Kuva: Puuveistokset



Lähde: YTL.

1. Vähennetään alkuperäisen kuution tilavuudesta 8 kpl kartioita, joista jokaisen kanta on suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat 1 ja 1 ja korkeus 1:

$$2^3 - 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 1 = 8 - \frac{4}{3} = 6\frac{2}{3} cm^3$$

2. Alkuperäisen kuution tahkon pinta-ala on 4 cm^2 ja jokaisesta identtisestä kuudesta tahkosta poistetaan 4 suorakulmaista kolmiota, joiden kateettien pituutta merkitään x. Koska 8-kulmio on säännöllinen ja kuution korkeus on 2 cm, niin 8-kulmion yksi sivu on 2 - 2x. Tämä on samalla poistettavan suorakulmaisen kolmion hypotenuusa, joten Pythagoraan lauseen nojalla

$$x^2 + x^2 = (2-2x)^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 4 - 8x + 4x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$ joista vain pienempi käy vastaukseksi, sillä kateetin on oltava alle puolet alkuperäisen kuution sivun pituudesta 2. Näin ollen kaikkien kuuden 8-kulmion yhteenlasketuksi pinta-alaksi saadaan

$$6 \cdot \left(2^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)^2\right) = 6 \cdot \left(4 - 2 \cdot \left(4 - 4\sqrt{2} + 2\right)\right) = 6 \cdot \left(4 - 12 + 8\sqrt{2}\right)$$

$$= 6 \cdot \left(-8 + 8\sqrt{2}\right) = 48\sqrt{2} - 48 cm^2$$

Määritetään kulmiin muodostuneet 8 kpl tasasivuista kolmiota, joiden sivun pituus on 2 - 2x:

$$8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(2 - 2 \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)\right)^2 \cdot \sin(60°) = 4 \cdot \left(-2 + 2\sqrt{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \cdot \left(4 - 8\sqrt{2} + 8\right)$$

$= 24\sqrt{3} - 16\sqrt{6} cm^2$ ja lisätään tämä 8-kulmioiden pinta-alaan, jolloin koko kappaleen pinta-alaksi saadaan

$$48\sqrt{2} - 48 + 24\sqrt{3} - 16\sqrt{6} cm^2 \approx 22{,}3 cm^2$$

Ratkaisu ClassPad.netin avulla:

1. Vähennetään alkuperäisen kuution tilavuudesta 8 kpl kartioita, joista jokaisen kanta on suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat 1 ja 1 ja korkeus 1:

$$2^3 - 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 1$$

$$\frac{20}{3}$$

ans

$$6.666666667$$

Monitahokkaan tilavuus on n. 6,7 kuutiosenttimetriä.

2. Alkuperäisen kuution tahkon pinta-ala on 4 neliösenttimetriä ja jokaisesta identtisestä kuution tahkosta poistetaan 4 suorakulmaista kolmiota, joiden kateettien pituutta merkitään x. Koska 8-kulmio on säännöllinen ja kuution korkeus 2 cm, niin 8-kulmion yksi sivu on 2-2x. Tämä on samalla poistettavan suorakulmaisen kolmion hypotenuusa, joten Pythagoraan lauseella voidaan ratkaista x

$$\text{solve}\left(x^2 + x^2 = (2 - 2x)^2\right)$$

$$\left\{x = -\sqrt{2} + 2, x = \sqrt{2} + 2\right\}$$

Näistä vastauksista vain pienempi käy, sillä kateetin on oltava alle puolet alkuperäisen kuution sivun pituudesta 2. Kaikkien kuuden 8-kulmion yhteenlasketuksi pinta-alaksi saadaan

$$6 \cdot \left(2^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)^2\right)$$

$$6 \cdot \left(-2 \cdot \left(-\sqrt{2} + 2\right)^2 + 4\right)$$

simplify(ans)

$$48 \cdot \sqrt{2} - 48$$

Määritetään kulmiin muodostuneiden kahdeksan tasasivuisen kolmion pinta-alojen summa. Kolmioiden sivut ovat 2-2x:

$$8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(2 - 2 \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)\right)^2 \cdot \sin(60^\circ)$$

$$2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(-2 \cdot \left(-\sqrt{2} + 2\right) + 2\right)^2$$

simplify(ans)

$$-16 \cdot \sqrt{6} + 24 \cdot \sqrt{3}$$

Lisätään näiden kolmioiden yhteenlaskettu pinta-ala 8-kulmioiden pinta-alaan, jolloin koko kappaleen pinta-alaksi saadaan

$$48\sqrt{2} - 48 + 24\sqrt{3} - 16\sqrt{6}$$

$$22.25963449$$

Vastaus: Pinta-ala on n. 22,3 neliösenttimetriä.

Ratkaisu ClassPad Managerin avulla:

1. Vähennetään alkuperäisen kuution tilavuudesta 8 kpl kartioita, joista jokaisen kanta on suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat 1 ja 1 ja korkeus 1:

$$2^3-8*\frac{1}{3}*\frac{1}{2}*1^2*1$$

$$\frac{20}{3}$$

ans

$$6.666666667$$

Monitahokkaan tilavuus on n. 6,7 kuutiosenttimetriä.

2. Alkuperäisen kuution tahkon pinta-ala on 4 neliösenttimetriä ja jokaisesta identtisestä kuution tahkosta poistetaan 4 suorakulmaista kolmiota, joiden kateettien pituutta merkitään x. Koska 8-kulmio on säännöllinen ja kuution korkeus 2 cm, niin 8-kulmion yksi sivu on 2-2x. Tämä on samalla poistettavan suorakulmaisen kolmion hypotenuusa, joten Pythagoraan lauseella voidaan ratkaista x

$$\text{solve}(x^2+x^2=(2-2x)^2, x)$$

$$\{x=-\sqrt{2}+2, x=\sqrt{2}+2\}$$

Näistä vastauksista vain pienempi käy, sillä kateetin on oltava alle puolet alkuperäisen kuution sivun pituudesta 2. Kaikkien kuuden 8-kulmion yhteenlasketuksi pinta-alaksi saadaan

$$6*\left(2^2-4*\frac{1}{2}*(2-\sqrt{2})^2\right)$$

$$6\cdot\left(-2\cdot(-\sqrt{2}+2)^2+4\right)$$

simplify(ans)

$$48\cdot\sqrt{2}-48$$

Määritetään kulmiin muodostuneiden kahdeksan tasasivuisen kolmion pinta-alojen summa. Kolmioiden sivut ovat 2-2x:

$$8*\frac{1}{2}*(2-2*(2-\sqrt{2}))^2*\sin(60^\circ)$$

$$2\cdot\sqrt{3}\cdot(-2\cdot(-\sqrt{2}+2)+2)^2$$

simplify(ans)

$$-16\cdot\sqrt{6}+24\cdot\sqrt{3}$$

Lisätään näiden kolmioiden yhteenlaskettu pinta-ala 8-kulmioiden pinta-alaan, jolloin koko kappaleen pinta-alaksi saadaan

$$48\cdot\sqrt{2}-48+24\cdot\sqrt{3}-16\cdot\sqrt{6}$$

$$22.25963449$$

Vastaus: Pinta-ala on n. 22,3 neliösenttimetriä.