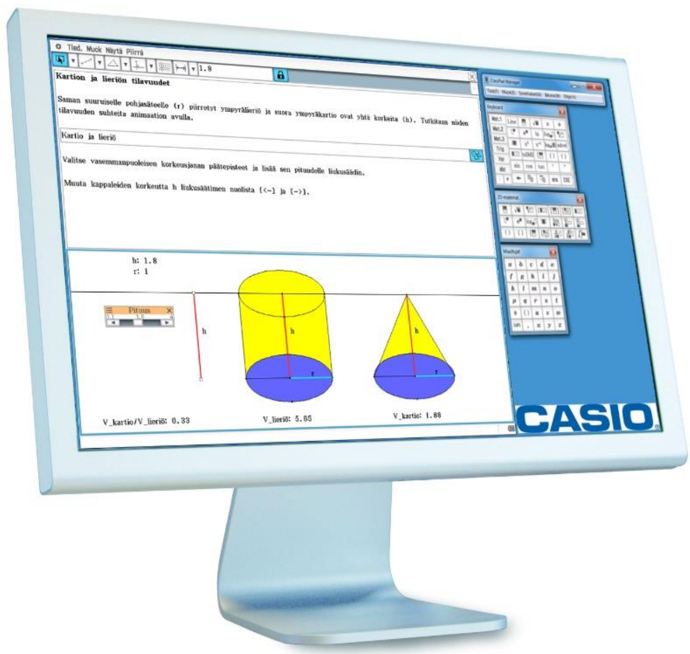
Laske Laudatur ClassPadilla
Lyhyt matematiikka, kevät 2021



Tiivistelmä

Kevään 2021 sähköisten yo-kokeiden ratkaisut ClassPad Managerilla laskettuina.

Pepe Palovaara

pepe.palovaara@fintegrity.fi

A-osa

Vastaa neljään tehtävään.

A-osa

Vastaa neljään tehtävään.

1. Laskuja 12 p.

Oikea vastaus 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

1.1 Lausekkeen $5(3+2)-5\cdot 4$ arvo on **2 p.**

5

1.2 Lausekkeen $3x+8$ arvo kun $x=-2$ on **2 p.**

2

1.3 Yhtälön $4(x+2)=12$ ratkaisu x on **2 p.**

1

1.4 Kaiuttimen alkuperäinen hinta on 120 euroa. Mikä sen hinta on 30 % alennuksen jälkeen? **2 p.**

84 e

1.5 Alla on esitetty tehtävä ja siihen kaksi ratkaisua. **2 p.**

Tehtävä: Kuinka monta prosenttia enemmän 210 on kuin 200?
Ratkaisu 1: $210/200=1{,}05$; $1{,}05-1=0{,}05$. Vastaus: 5 %.
Ratkaisu 2: $200/210=0{,}95$; $1-0{,}95=0{,}05$. Vastaus: 5 %.

Mikä seuraavista vaihtoehdoista on totta?

Vain ratkaisu 1 on oikein.

1.6 Tuotteen verottomaan hintaan lisätään arvonlisävero, jonka suuruus on 24 %. Mikä on arvonlisäveron osuus tuotteen myyntihinnasta kokonaisina prosentteina? **2 p.**

19 %

2. Jalkapallomatematiikkaa 12 p.

Aineisto

2.A Kuva: Jalkapallokenttä ylhäältä päin

Jalkapallokentän maalin leveys on 7,32 metriä. Kohtisuoraan 11,0 metrin päässä maaliviivan keskipisteestä sijaitsee rangaistuspotkupiste (aineisto 2.A). Kuinka suuressa kulmassa maali näkyy rangaistuspotkupisteeltä katsottuna? Kulma mitataan kentän pintaa pitkin. Anna vastaus asteen tarkkuudella.

$$2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{7{,}32 : 2}{11}\right) = 36{,}807...° \approx 37°.$$

3. Kaavoja 12 p.

Matematiikan sovelluksissa käytetään erilaisia kaavoja. Tässä tehtävänä on joko ratkaista kysytty suure kaavasta (kohdat 1–4) tai laskea sen lukuarvo (kohdat 5 ja 6). Jokaisesta osatehtävästä voi saada 2 pistettä.

1. Ratkaise aika t: $v = v_0 + at$.
2. Ratkaise moolimassa M: $n = \frac{m}{M}$.
3. Ratkaise nopeus v: $E = \frac{1}{2}mv^2$.
4. Ratkaise kateetin pituus a: $a^2 + b^2 = c^2$.
5. Laske säde r: $V = \frac{4\pi r^3}{3}$, kun $V = 2$.
6. Laske aika t: $K = k(1 + \frac{p}{100})^t$, kun $K = 1\,000$, $k = 500$ ja $p = 2$.

1. $t = \dfrac{v - v_0}{a}$

2. $M = \dfrac{m}{n}$

3. $v = \pm\sqrt{\dfrac{2E}{m}}$

4. $a = \sqrt{c^2 - b^2}$

5. $r = \sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot 2}{4\pi}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2\pi}}$

6. $1000 = 500 \cdot \left(1 + \dfrac{2}{100}\right)^t \Leftrightarrow 2 = 1{,}02^t \Leftrightarrow t = \dfrac{\ln(2)}{\ln(1{,}02)} \approx 35.$

4. Suorat 12 p.

Aineisto

4.A Kuva: GeoGebra-kuvakaappaus

Kuvaan 4.A on piirretty kuusi suoraa ja kolme pistettä. Alla on kuuden suoran yhtälöt. Valitse kunkin yhtälön kohdalta, esittääkö se kuvassa näkyvää pisteen A, B tai C kautta kulkevaa suoraa vai ei. Oikea vastaus 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

4.1 $y = 2x$ **2 p.**

Suoraa ei ole piirretty kuvaan.

4.2 $y = -2x - 5$ **2 p.**

Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen B kau...

4.3 $y - 2 = x - 3$ **2 p.**

Suoraa ei ole piirretty kuvaan.

4.4 $y - 3 = 3(x + 4)$ **2 p.**

Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen B kau...

4.5 $3y + 7x = 1$ **2 p.**

Suoraa ei ole piirretty kuvaan.

4.6 $y - \frac{3}{2} = \frac{1}{6}x$ **2 p.**

Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen A kau...

4.1. Suoran tulisi kulkea origon kautta eikä kuvassa ole sellaista suoraa.

4.2. Suora leikkaa y-akselin pisteessä (0,-5) ja sen jyrkkyys on -2 eli kun x-koordinaatti kasvaa yhdellä, niin y-koordinaatti pienenee kahdella. Tällainen suora on pisteen B kautta kulkeva laskeva suora.

4.3. Suoran yhtälön ratkaistu muoto on y=x-1, joten se leikkaa y-akselin pisteessä (0,-1). Tällaista suoraa ole kuvassa.

4.4. Suoran ratkaistu muoto on y=3x+15, joten sen jyrkkyys on 3 eli kun x-koordinaatti kasvaa yhdellä, niin y-koordinaatti kasvaa kolmella. Ainoa tällainen suora voi olla pisteen B kautta kulkeva nouseva suora. Otetaan suoralta kaksi pistettä, esim. (-4,3) ja (-5,0), ja sijoitetaan niiden koordinaatit suoran yhtälöön. Mikäli molemmat pisteet toteuttavat suoran yhtälön, niin kyseinen suora on kuvassa. Laskemalla saadaan 3=3*(-4)+15 eli 3=3 ja 0=3*(-5)+15 eli 0=0. Molemmat sijoitukset ovat tosia eli suora on pisteen B kautta kulkeva nouseva suora.

4.5. Suoran ratkaistu muoto on y=-7/3x+1/3, joten se leikkaa y-akselin pisteessä (0,1/3) eikä kuvassa ole tämän pisteen kautta kulkevaa suoraa.

4.6. Suoran ratkaistu muoto on y=1/6x+3/2. Suora on siis nouseva ja leikkaa y-akselin pisteessä (0,3/2). Tällainen suora voi olla pisteen A kautta kulkeva nouseva suora. Otetaan tältä suoralta kaksi pistettä, esim. (-3,1) ja (3,2), ja sijoitetaan niiden koordinaatit suoran yhtälöön. Saadaan 1=1/6*(-3)+3/2 eli 1=1 ja 2=1/6*3+3/2 eli 2=2. Molemmat sijoitukset ovat tosia, joten suora on piirretty kuvaan ja se on pisteen A kautta kulkeva nouseva suora.

B1-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

5. Lipputulot 12 p.

Maaotteluun on ostettu 4 802 lippua. Pääkatsomon lippu maksaa 35 euroa ja ylä- ja sivukatsomoiden liput 25 euroa. Ottelun lipputuloja kertyi yhteensä 136 900 euroa. Kuinka moni katsojista istui pääkatsomossa?

Merkitään pääkatsomon lippujen määrää x ja muiden lippujen y. Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x + y = 4802 & \| \cdot (-25) \\ 35x + 25y = 136900 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -25x - 25y = -120050 \\ 35x + 25y = 136900 \end{cases}$$

$$10x = 16850$$

$$x = 1685$$

Vastaus: Pääkatsomossa oli 1685 katsojaa.

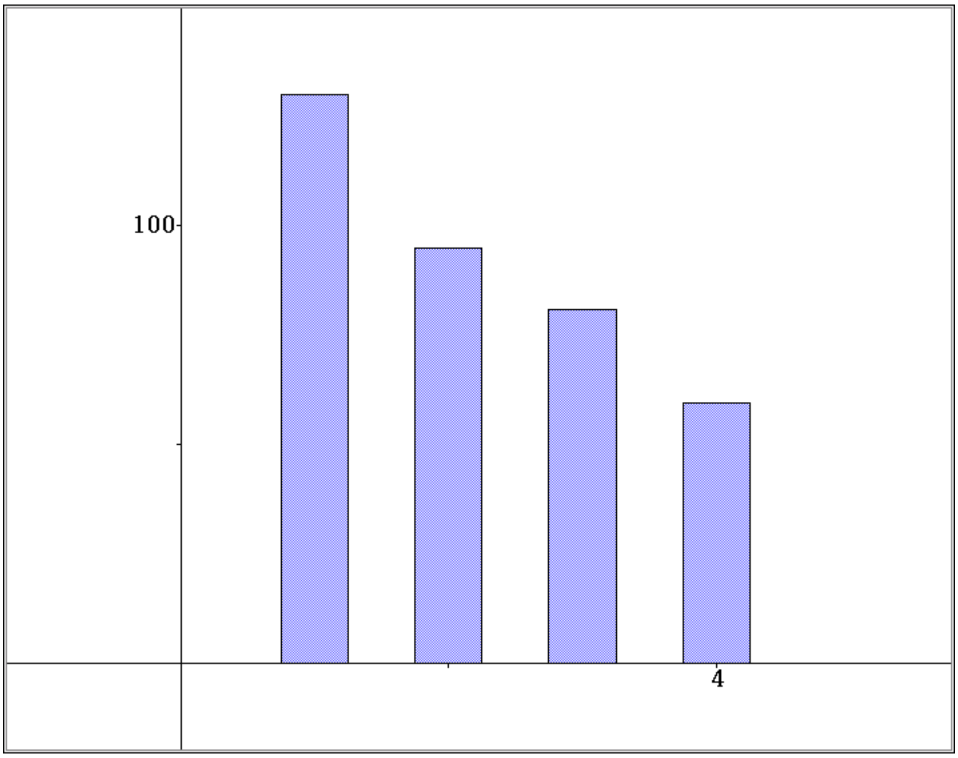
6. Autojen hiilidioksidipäästöt 12 p.

Autojen hiilidioksidipäästöt ilmoitetaan yksikkönä grammaa/kilometri. EU on päättänyt uusien autojen päästörajoista vuoteen 2030 saakka:

Vuosi	Päästöraja
2015	130 g/km
2020	95 g/km
2025	15 % alempi kuin vuonna 2020
2030	37,5 % alempi kuin vuonna 2020

1. Kuinka monta prosenttia pienempi on päästöraja vuonna 2020 vuoteen 2015 verrattuna? Anna vastaus 0,1 prosenttiyksikön tarkkuudella. **(4 p.)**
2. Kuinka monta prosenttia pienempi on tavoiteltu päästöraja vuonna 2030 vuoteen 2025 verrattuna? Anna vastaus 0,1 prosenttiyksikön tarkkuudella. **(4 p.)**
3. Muodosta laskentaohjelmaa käyttämällä vuosien 2015, 2020, 2025 ja 2030 päästörajoja havainnollistava pylväsdiagrammi. **(4 p.)**

1. $\frac{95}{130} = 0{,}73076... \approx 0{,}731 = 73{,}1\%$ alkuperäisestä eli $100\% - 73{,}1\% = 26{,}9\%$ pienempi.
2. $\frac{0{,}625 \cdot 95}{0{,}85 \cdot 95} = 0{,}73529... \approx 0{,}735 = 73{,}5\%$ alkuperäisestä eli $100\% - 73{,}5\% = 26{,}5\%$ pienempi.



Pystyakselilla on päästöjen määrä g/km ja vaaka-akselilla on mittausvuodet (1=2015, 2=2020, 3=2025, 4=2030).

7. Keno-peli 12 p.

Aineisto

7.A Taulukko: Kenotason 4 tulokset, kertoimet ja rivien lukumäärät

Kenossa arvotaan kaksikymmentä (20) numeroa seitsemästäkymmenestä (70) numerosta. Pelin tasolla 4 valitaan neljä numeroa näistä seitsemästäkymmenestä. Näin muodostuu 916 895 eri riviä. Tulos "3 oikein" tarkoittaa, että valituista numeroista täsmälleen 3 kuuluu arvottujen kahdenkymmenen numeron joukkoon jne. Voittosumma saadaan kertomalla valittu panos tuloksen kertoimella (aineisto 7.A).

1. Mikä on pelirivin todennäköisin tulos? Entä mikä on epätodennäköisin tulos? **(2 p.)**
2. Matti pelaa yhden pelirivin ja hänen panoksensa on 3 euroa. Hän saa tuloksen 4 oikein. Kuinka paljon hän voittaa? **(2 p.)**
3. Matti pelaa kaksi peliriviä. Mikä on todennäköisyys, että toisella pelirivillä on neljä oikein ja toisella ei yhtään oikein? **(4 p.)**
4. Miten "4 oikein" -rivien lukumäärä 4 845 lasketaan? **(4 p.)**

1. Todennäköisin pelirivin tulos on se, jossa on suurin rivien lukumäärä eli 1 oikein. Epätodennäköisimmässä vaihtoehdossa rivien lukumäärä on pienin eli 4 oikein.
2. 4 oikein tuloksessa saa rahan takaisin 32-kertaisena, jolloin voittoa tulee $32 \cdot 3 - 3 = 93€$.
3. Todennäköisyys on P("4 oikein ja 0 oikein tai 0 oikein ja 4 oikein")

$$= \frac{4845}{916895} \cdot \frac{230300}{916895} + \frac{230300}{916895} \cdot \frac{4845}{916895} = 0{,}0026544\ldots \approx 0{,}003 = 0{,}3\% \quad .$$

4. Erilaisten neljän numeron osajoukkojen lukumäärä 20 arvottavasta numerosta on

$$\binom{20}{4} = \frac{20!}{16!4!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 5 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 17 = 4845 \quad .$$

8. Taitellaan pahvista laatikko 12 p.

Aineisto

8.A Kuva: Leikattu pahvilevy

Neliön muotoisen pahvilevyn sivun pituus on 1,0 m. Sen jokaisesta kulmasta leikataan pois pienempi neliö, jonka sivun pituus on x (aineisto 8.A). Tämän jälkeen kaikki neljä reunoille jäänyttä suorakulmion muotoista osaa taitetaan 90 astetta ylöspäin ja teipataan kiinni vierekkäisiin osiin niin, että syntyy suorakulmainen laatikko ilman kantta. Millä muuttujan x arvolla tämän laatikon tilavuus on mahdollisimman suuri?

Laatikon tilavuus on $V(x) = (1-2x) \cdot (1-2x) \cdot x = x - 4x^2 + 4x^3$. Tilavuus on "olemassa" eli saa positiivisen arvon, kun $0 < x < \frac{1}{2}$, sillä jos $x = 0$ ei laatikolla ole korkeutta ja jos $x = \frac{1}{2}$ ei laatikolla ole pohjan pinta-alaa.

Etsitään tilavuuden suurin arvo derivaatan avulla. $V'(x) = 1 - 8x + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{2}\right) \vee x = \frac{1}{6}$. Laatikolle saadaan suurin tilavuus, kun $x = \frac{1}{6} \approx 0{,}17m$.

9. Pii 12 p.

Aineisto

9.A Taulukko: Piin desimaalit

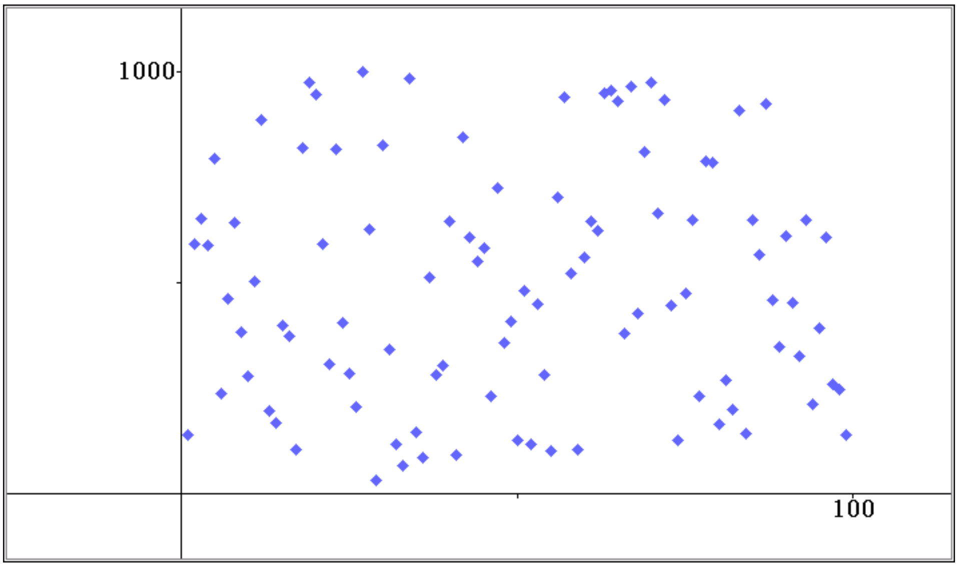
Taulukossa 9.A on luvun π ensimmäiset 297 desimaalia, joista on muodostettu 99 lukua jakamalla ne kolmen numeron ryhmiin. Selvitä näin syntyneiden 99 luvun

1. vaihteluväli **(2 p.)**
2. moodi ja mediaani **(3 p.)**
3. keskiarvo ja keskihajonta. **(3 p.)**
4. Pohdi, vaikuttaako tämän aineiston perusteella siltä, että nämä 99 lukua ovat jakautuneet normaalijakauman mukaisesti. **(4 p.)**

1. Vaihteluväli saadaan vähentämällä suurimmasta luvusta pienin. Hyödynnetään ClassPad Managerin taulukkolaskennan laskutoimintoja ja määritetään pienin luvuista komennolla =min(A1:A99) ja suurin komennolla =max(A1:A99).

Vaihteluväliksi saadaan $998 - 34 = 964.$

2. ClassPad Managerin taulukkolaskennassa moodi saadaan komennolla =mod(A1:A99) ja mediaani komennolla =med(A1:A99). Saadaan moodiksi 648 ja mediaaniksi 462.
3. Kuten edellä, keskiarvo on =mean(A1:A99) ja keskihajonta =stdDev(A1:A99). Saadaan keskiarvoksi n. 493,02 ja keskihajonnaksi n. 279,57.
4. Lukujen keskiarvo on lähellä vaihteluvälin keskiarvoa, kuten normaalisti jakautuneessa aineistossakin. Keskihajonta on hiukan liian suuri, jotta kahden hajonta-askeleen ulkopuolelle jäisi 2% sekä ala- että yläpäähän aineistosta. Piirretään lukuja vastaavat havaintopisteet. Koska pisteet eivät näytä noudattavan Gaussin kellokäyrän muotoa, piin desimaalien kolmen peräkkäisen numeron muodostamat luvut eivät noudata normaalijakaumaa.



B2-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

10. Koiran ikä 12 p.

Erään vanhan käsityksen mukaan koiran ikä kerrotaan luvulla 7, jotta saadaan kuva siitä, kuinka vanhaa ihmistä koira vastaa. Esimerkiksi vanhimmat ihmiset ovat yli 100-vuotiaita, mutta koirat elävät harvoin yli 20-vuotiaiksi. Viime aikoina on esitetty muitakin tapoja tulkita koiran ikää. Tarkastellaan seuraavaa mallia, joka perustuu logaritmiin.

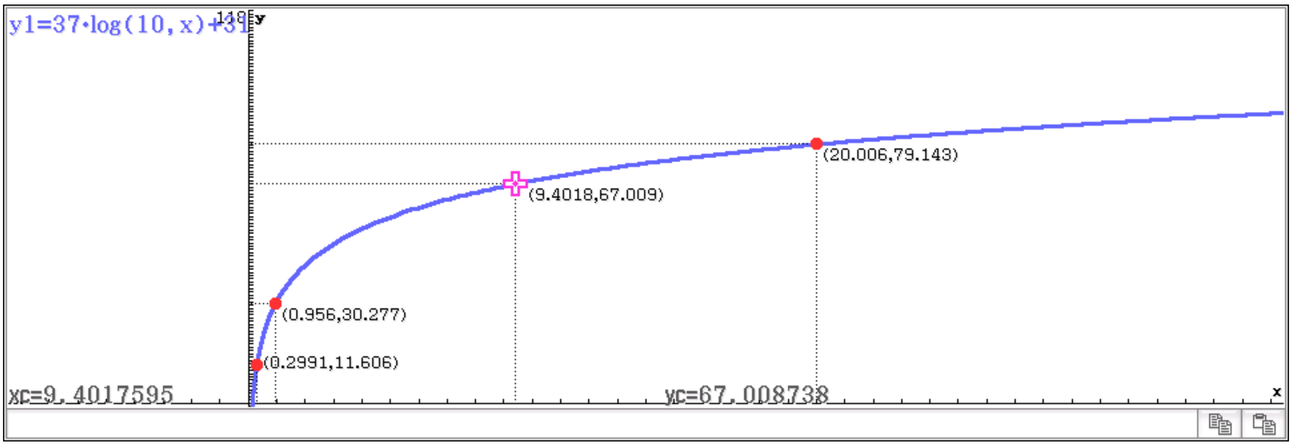
Jos koiran todellinen ikä on t (vuotta), niin 10-kantaisen logaritmin avulla lausekkeella $37\lg t + 31$ voidaan laskea vastaava ihmisikä.

1. Koiran todellinen ikä on 2 vuotta. Mitä ihmisikää se vastaa tämän mallin mukaan? **(3 p.)**
2. Koiran ikää vastaava ihmisikä mallin mukaan on 25 vuotta. Mikä on koiran todellinen ikä? **(3 p.)**
3. Arvioi, kuinka hyvin malli toimii alhaisen ja korkean iän kohdalla. **(6 p.)**

1. $37 \cdot \lg(2) + 31 = 42{,}138\ldots \approx 42$ vuotta

2. $37 \cdot \lg(t) + 31 = 25 \Leftrightarrow \lg(t) = -\dfrac{6}{37} \Leftrightarrow t = 10^{-\frac{6}{37}} = 0{,}688\ldots$ vuotta eli n. 8 kk.

3. Koirat elävät harvoin yli 20-vuotiaiksi, mutta mallin mukaan tämä vastaa ihmisikää n. 79 vuotta. Ihmisille ei ole harvinaista elää yli 79-vuotiaiksi, joten malli ei toimi hyvin korkean iän kohdalla. Myös alhaisen iän kohdalla malli näyttää toimivan huonosti. Esim. vain muutaman kk ikäinen koiranpentu vastaisi jo yli 10-vuotiasta ihmistä ja vuoden ikäinen koira jo yli 30-vuotiasta ihmistä. Noin 67 ihmisvuoden kohdalla malli antaa suunnilleen vanhan käsityksen mukaisen arvion koiran iälle. Alla ClassPad Managerin kuvaaja logaritmisesta mallista edellä mainituin esimerkkipistein.



Huom. Yllä mallissa muuttuja x vastaa tehtävän mallin muuttujaa t.

11. Kirja-arvioita 12 p.

Kirjaviisauteen kyllästynyt dosentti aikoo myydä kaikki kirjansa antikvariaattiin. Tarjouspyyntöä varten hän arvioi kirjojen lukumäärää.

1. Kolmella umpimähkäisellä mittauksella hän saa seuraavat tulokset:
   Mittaus 1: 25 kirjaa yhteensä 65,0 cm
   Mittaus 2: 28 kirjaa yhteensä 76,0 cm
   Mittaus 3: 14 kirjaa yhteensä 30,0 cm

   Missä näistä kolmesta mittauksesta on keskimäärin paksuimmat kirjat? **(3 p.)**

2. Kirjoja on yhteensä 38,07 hyllymetriä. Dosentti arvioi kirjojen kokonaismäärää kohdan 1 kolmen mittauksen perusteella. Hänellä on mielessään kaksi menetelmää:

   Menetelmä 1: Jaan pituuden 38,07 kohdassa 1 laskettujen keskiarvojen keskiarvolla.

   Menetelmä 2: Lasken kolmen mittauksen kirjamäärät ja yhteispaksuuden ja saan näin arvion keskimääräisen kirjan paksuudesta. Jaan pituuden 38,07 tällä luvulla.

   Laske kummankin menetelmän mukainen arvio kirjojen kokonaismäärälle ja arvioi, kumpi menetelmä on parempi. **(9 p.)**

1. Lasketaan jokaisen mittauksen mukainen kirjan paksuuden keskiarvo.

Mittaus 1: $\frac{65{,}0}{25} = 2{,}60$ cm.

Mittaus 2: $\frac{76{,}0}{28} \approx 2{,}71$ cm.

Mittaus 3: $\frac{30{,}0}{14} \approx 2{,}14$ cm.

Keskimäärin paksuimmat kirjat ovat mittauksessa 2.

2. Käytetään laskussa pyöristämättömiä keskiarvoja tarkemman vastauksen saamiseksi. Muutetaan hyllymetrit senttimetreiksi ennen laskemista.

Menetelmä 1: $\frac{3807}{\left(\frac{65}{25} + \frac{76}{28} + \frac{30}{14}\right) : 3} \approx 1530$ kirjaa.

Menetelmä 2: Mittausten kirjamäärät ovat yhteensä $25 + 28 + 14 = 67$ kpl ja yhteispaksuus $65 + 76 + 30 = 171$ cm. Keskimääräisen kirjan paksuus näiden avulla on $\frac{171}{67} = 2{,}55\ldots$ cm, jolloin kirjojen määrän arvioksi saadaan

$\frac{3807}{\frac{171}{67}} = 1491{,}63\ldots \approx 1490$ kirjaa.

Paras tarkkuus keskiarvoon saadaan jakamalla mitattu hyllymetrimäärä lasketulla kappalemäärällä. Mitä pidempi on mitattu matka ja sitä vastaava laskettu kirjamäärä, sitä parempi on menetelmän antama arvio. Siispä menetelmä 2 on parempi.

12. Asunnon ostaminen (12 p.)

Jessi on ostamassa asuntoa ja on löytänyt kaksi vaihtoehtoa, jotka ovat hänen mielestään yhtä mukavia. Hän valitsee asunnon taloudellisin perustein. Asuntojen tiedot ovat seuraavat:

Asunto 1: 2 h + k, 47 m^2, myyntihinta 89 000 €, yhtiövastike 220 €/kk

Asunto 2: 1 h + avok. + s, 42 m^2, myyntihinta 96 000 €, yhtiövastike 147 €/kk

1. Laske asuntojen neliöhinnat. **(2 p.)**
2. Jessillä on 19 000 euroa säästöjä. Hän aikoo maksaa loppuosan asunnon hinnasta ottamalla kymmenen vuoden tasaerälainan, jonka vuosikorko on 2,4 %. Kuinka paljon rahaa Jessiltä kuluu kymmenen vuoden aikana korkoihin ja vastikkeisiin näissä kahdessa eri asuntovaihtoehdossa? Lainaa lyhennetään kuukausittain. **(7 p.)**
3. Kuvaile sanallisesti, mitä muita seikkoja kannattaa ottaa huomioon, jos halutaan tarkemmin arvioida näiden kahden asuntovaihtoehdon kokonaisedullisuutta. **(3 p.)**

1. Asunto 1: $\frac{89000}{47} = 1893{,}617\ldots \approx 1893{,}62\frac{€}{m^2}$ ja asunto 2: $\frac{96000}{42} = 2285{,}714\ldots \approx 2285{,}71\frac{€}{m^2}$.

2. Asunto 1: 70000€ laina 120 kuukaudeksi 0,2% kuukausikorolla antaa kuukausittaiseksi annuiteetiksi

$$70000 \cdot \frac{(1+0{,}002)^{120} \cdot 0{,}002}{(1+0{,}002)^{120} - 1} = 656{,}7109\ldots \approx 656{,}71€$$

. 10 vuodessa korkoihin ja vastikkeisiin kuluu

$$120 \cdot 656{,}71 - 70000 + 120 \cdot 220 = 35205{,}20€ \quad .$$

Asunto 2: 77000€ laina 120 kuukaudeksi 0,2% kuukausikorolla antaa kuukausittaiseksi annuiteetiksi

$$77000 \cdot \frac{(1+0{,}002)^{120} \cdot 0{,}002}{(1+0{,}002)^{120} - 1} = 722{,}3820\ldots \approx 722{,}38€$$

. 10 vuodessa korkoihin ja vastikkeisiin kuluu

$$120 \cdot 722{,}38 - 77000 + 120 \cdot 147 = 27325{,}60€ \quad .$$

3. Riippuen sopimuksesta joko annuiteetin suuruus tai takaisinmaksuaika voi muuttua korkojen muuttuessa. Korkojen nousu tekee suuremmasta lainasta epäedullisemman. Suurin vaikutus asuntojen arvoon tulevaisuudessa on asuntojen hinnankehitys esimerkiksi niissä olevan tekniikan, peruskorjausten ja sijainnin perusteella. Yhtiökokoukset määrittävät yhtiövastikkeet, vesimaksut ja esim. yhteisesti rahoitettavat hankinnat tai korjaukset. Näistä voi tiedustella asuntoa ostettaessa, mutta 10 vuoden päätöksiä on vaikea ennakolta haarukoida.

13. Funktioiden kuvaajat 12 p.

Tutkitaan funktioiden

$$f(x) = 7x^4 - 8x^3 - 7x^2 + 8x - 1$$
$$g(x) = -4x^3 + 2x^2 + 6x + 1$$
$$h(x) = \sqrt{4x+2} - 1$$
$$p(x) = |x - 3|$$

kuvaajia. Voit vastata kysymyksiin 2–5 kuvaajien perusteella, mutta esitä myös lausekkeeseen perustuva perustelu sille, että ehto todella toteutuu.

Esimerkki: Mikä kuvaajista kulkee pisteen $(0, 1)$ kautta?
Vastaus: Kyseessä on funktion g kuvaaja, sillä muuttujan arvolla $x = 0$ on

$$g(0) = -4 \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 + 1 = 1.$$

1. Piirrä funktioiden kuvaajat koordinaatistoon. Valitse akselien mittakaavat sopiviksi. **(2 p.)**
2. Mikä kuvaajista leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 3)$? **(2 p.)**
3. Minkä funktion derivaatalla on nollakohta muuttujan arvolla $x \approx 0{,}4$? **(2 p.)**
4. Mikä funktioista saa ainoastaan lukua 1 suurempia arvoja, kun $x > 1$? **(3 p.)**
5. Mikä kuvaajista leikkaa x-akselin neljä kertaa? **(3 p.)**

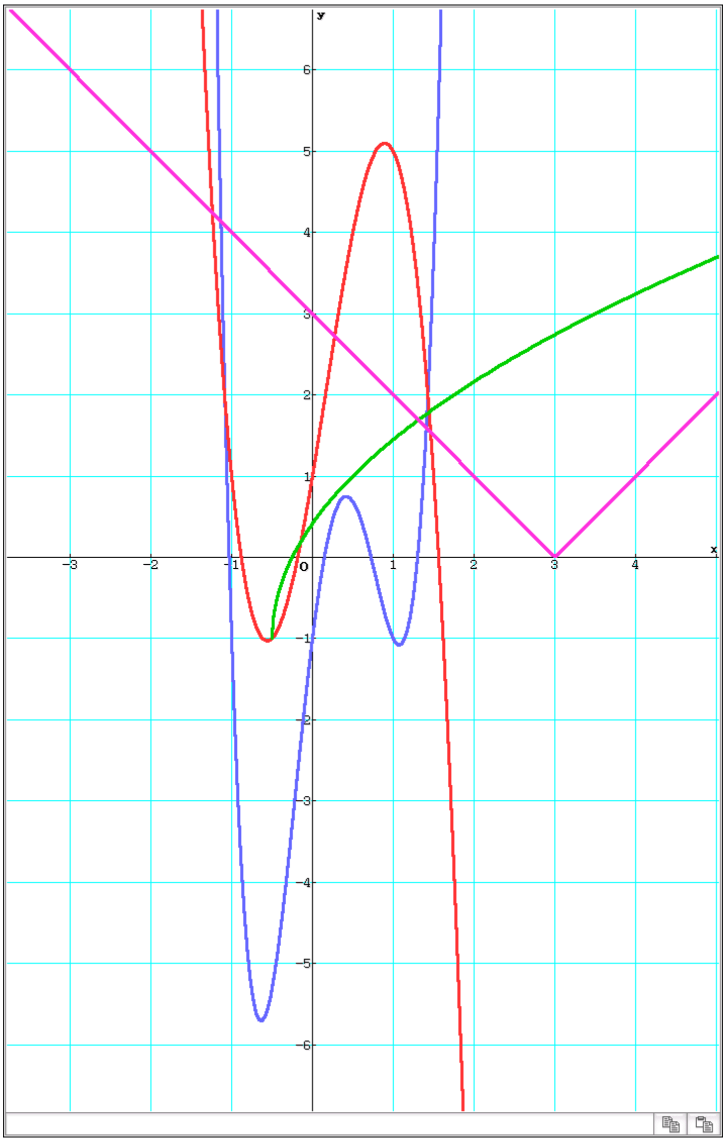
Sheet1 Sheet2 Sheet3 Sheet4 Sheet5

$y1=7\cdot x^4-8\cdot x^3-7\cdot x^2+8\cdot x-1$

$y2=-4\cdot x^3+2\cdot x^2+6\cdot x+1$

$y3=\sqrt{4\cdot x+2}-1$

$y4=|x-3|$



y1=f(x)
y2=g(x)
y3=h(x)
y4=p(x)

2. Funktion p kuvaaja leikkaa y-akselin pisteessä (0,3), koska p(0)=|0-3|=|-3|=3.

3. Funktion f derivaatalla on nollakohta, kun x on n. 0,4, sillä f'(x)=0 laskimella kun x on n. -0,6 tai kun x on n. 0,4 tai kun x on n. 1,1.

4. Funktio h saa lukua 1 suurempia arvoja, kun x>1, sillä se on aidosti kasvava funktio ja sen arvo h(1)=sqrt(6)-1>1,4.

5. Funktion f kuvaaja leikkaa x-akselin neljästi, sillä se on polynomifunktiona jatkuva ja sen peräkkäiset ääriarvokohdat ovat erimerkkiset. Kohtaa 3 hyödyntäen f(-0,6)<-5, f(0,4)>0 ja f(1,1)<-1.