”Enemmän aikaa matematiikan opiskeluun,
vähemmän aikaa laskimen opetteluun.”

Laske Laudatur ClassPadilla

Lyhyt matematiikka, kevät 2015

Casio Scandinavia

Keilaranta 4 | 02150 Espoo | info@casio.fi

Hyvä lukija,

Lyhyt matematiikkaa vaatii vastaajaltaa yhtä paljon kuin pitkän matematiikan vastaaminenkin: kolmen vuoden opinnot lukiossa ja jopa työläämmät tehvävien toimeksiannot. Käsissäsi on Casion ClassPadilla ratkaistut mallivastaukset lyhyen matematiikan kokeeseen. Tätä vihkosta saa käyttää omassa opetuksessa ja tuleviin kokeisiin valmistautumiseen – ilman erillistä lupaa.

Ratkaisut on tehty ClassPad II Manager-ohjelmalla ja ne tulevat Casion www-sivuille ladattaviksi pdf-tiedostona ja lisäksi myös ClassPadin tiedostomuodossa. Muutakin tukea ja mm. toisen asteen opintoja kertaavan kirjan kokonaisuudessaan löydät sivuilta

http://www.casio-laskimet.fi

Ratkaisutekniikka

ClassPad II Managerilla ja fx-CP400 laskimella voi vastata kokeisiin usealla eri tavalla. Tällä hetkellä yo-kokeet ja suurin osa kurssikokeista tehdään käyttämällä laskinta tai CAS-ohjelmistoa tehtävien hamotteluun, parametrien vaikutuksen arviointiin, laskujen suorittamiseen, kuvaajien piirtoon, kulkukaaviotarkasteluun tai vaikkapa taulukkolaskentaan. Tämän jälkeen vastaukset siirretään koepaperiin kynällä.

Sähköisissä kokeissa vaihtoehtoja on enemmän. Yksi mahdollisuus on siirtää vastaukset sähköiseen lomakkeeseen sieppausnäyttöinä. ClassPad II Managerissa tämä onnistuu oikean hiiren napin valikosta, funktionäppäimellä F8 tai tehtäväpalkin alasvetovalikosta. Siepata voidaan koko näkymä tai aktviivisen ikkunan sisältö. Nopeaa, helppoa ja varmaa. Näet näitä Ratkaisutapoja tässäkin vihkosessa.

Toinen mahdollisuus on tallentaa sähköiset vastaukset tiedostona. Tämän vihkosen vastaukset on tallennettu tiedostoiksi ja osa kuvaajista kuviksi. Vastaukset tallennetaan yksi kerrallaan tai koko koesuoritus voidaan laskea ja tallentaa myös yhteen tiedostoon. Tällöin alkupään tehtäviin on helppo palata kokeen loppupuolellakin, mikäli niissä huomaa tarkennettavaa.

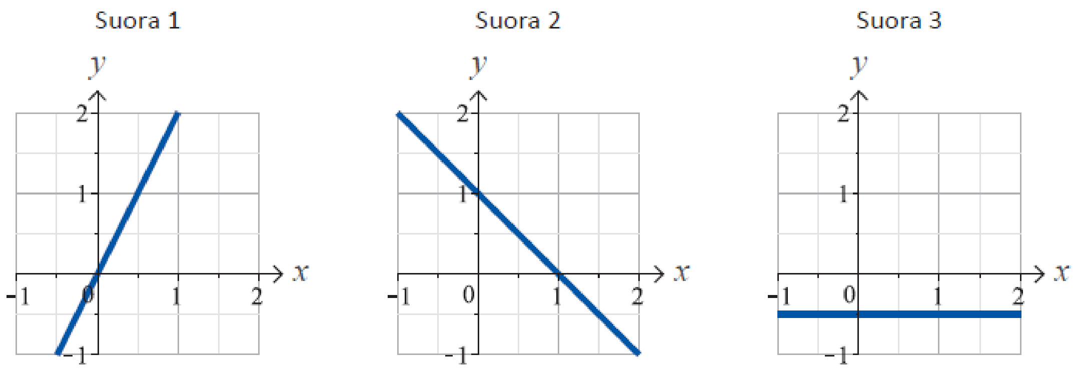
Kokeiden digitalisoitumisen myös lyhyt matematiikka siirtyy CAS-aikakauteen. Casion ClassPad II Manager on yksinkertainen ja helppokäyttöinen – ja sopii erinomaisesti lyhyen matematiikan symboliseksi ohjelmistoksi. Kysy lisää ja tilaa ilmainen koulutus koulullesi tai koulutusyhtymällesi osoitteesta info@casio.fi

Keväisin terveisin,

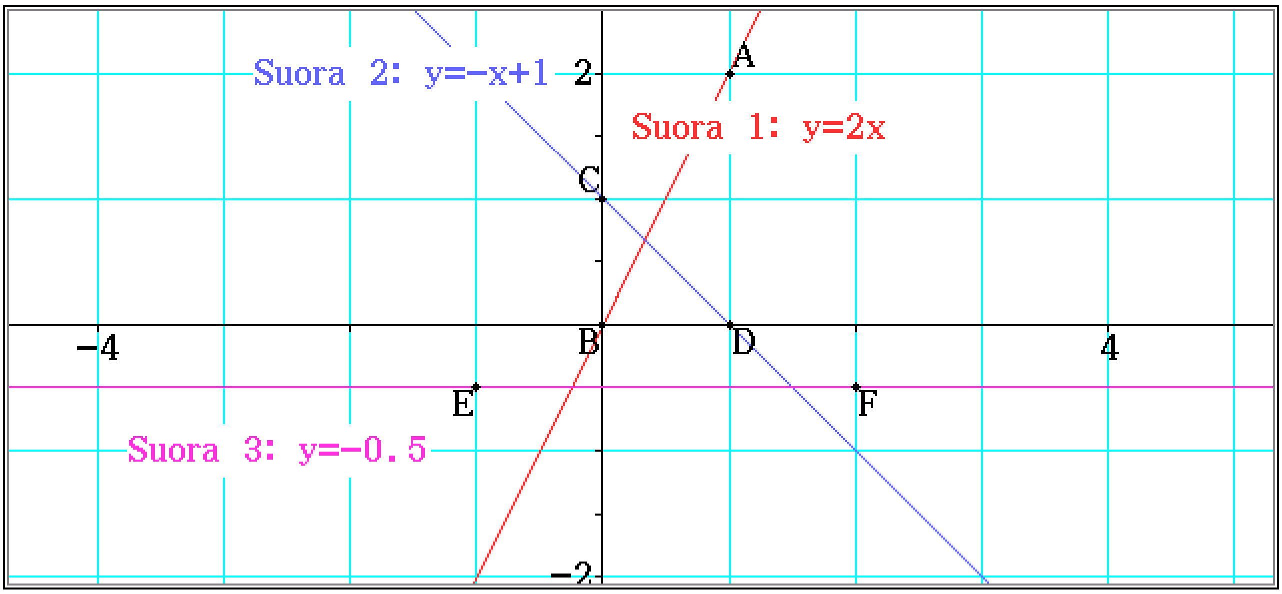
Espoossa 18.3.2014

Pepe Palovaara

1. Alla on kolmen suoran kuvaajat. Esitä niiden yhtälöt muodossa $y = kx + b$. Perusteluita ei tarvita.



Ratkaisu: Geometria-sovellus antaa suoran yhtälön, kun se valitaan kynällä/hiirellä.



2. **a)** Määritä lausekkeen $x(4x-2)-3x(x-1)-x$ arvo, kun $x=-1$.

b) Anna esimerkki toisen asteen yhtälöstä, jonka yksi juuri on $x=1$.

c) Muuttujan arvo $x=2$ toteuttaa yhtälön $x(x-5)+ax=2$. Määritä kerroin a.

Ratkaisu:

a) Sijoitetaan lausekkeeseen x=−1

$x(4x-2)-3x(x-1)-x \mid x=-1$

$$1$$

b) Mikä tahansa muotoa $a(x-1)(x-b)$ käy vastaukseksi. Esimerkiksi

$2(x-1)(x-3)$

$$2\cdot(x-1)\cdot(x-3)$$

expand(ans)

$$2\cdot x^2-8\cdot x+6$$

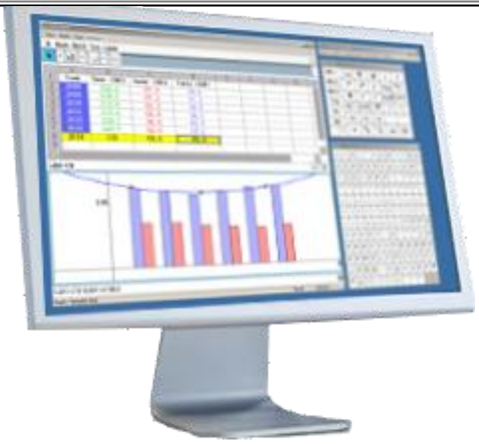
c) Sijoitetaan $x=2$ ja ratkaistaan a:

$x(x-5)+ax=2 \mid x=2$

$$2\cdot a-6=2$$

solve($2\cdot a-6=2, a$)

$$\{a=4\}$$



Kaikki laskut voi tehdä sekä laskimella fx-CP400 että tietokoneohjelmalla ClassPad II Manager. Ainoa ero on se, että Manager-ohjelman näytön koko on vapaasti muutettavissa kun taas laskimen näyttöä voi käyttää vaaka- tai pystysuuntaisena.

3. Erään mallin mukaan naisten kuntoharjoittelun maksimisyke lasketaan kaavalla $226 - T$ ja miesten maksimisyke kaavalla $220 - T$, kun T on henkilön ikä vuosina.

a) Kuinka monta prosenttia 18-vuotiaan naisen maksimisyke on samanikäisen miehen maksimisykettä korkeampi?

b) Erään suosituksen mukaan kuntoharjoittelussa sykkeen tulisi olla 60–70 % maksimisykkeestä. Määritä nämä rajat 30-vuotiaalle naiselle.

Ratkaisu:

a) Jaetaan naisen maksimisyke miehen maksimisykkeellä

$$\frac{226-18}{220-18}$$

1.02970297

Tämä on n. 3,0% korkeampi kuin miehen syke.

b) Alaraja 30-vuotiaalle naiselle on

0.6*(226-30)

117.6

ja yläraja

0.7*(226-30)

137.2

Kokonaislukuina sykealue on siis [118,137].

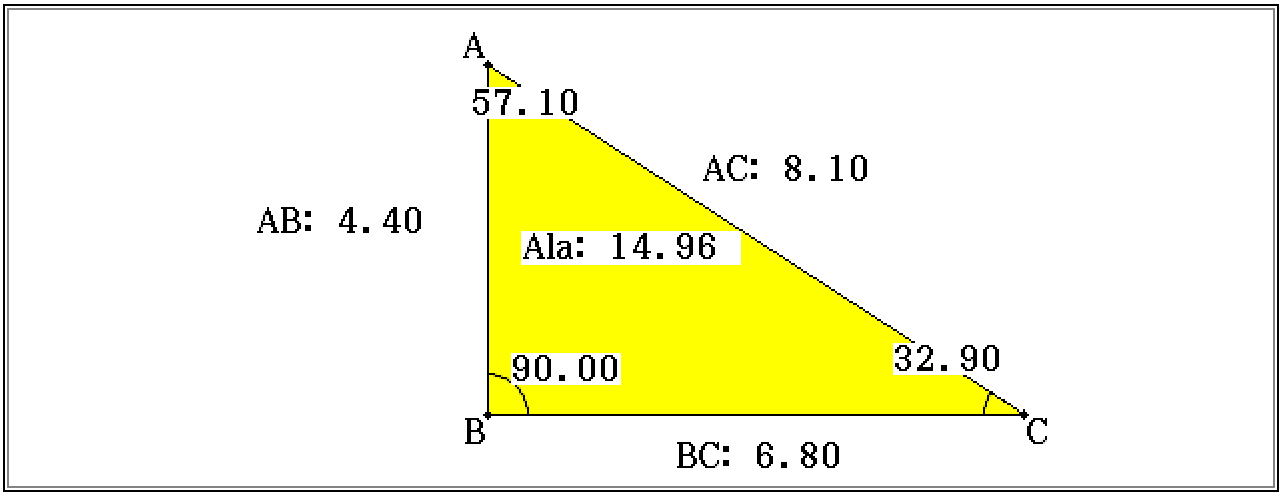
4. Suorakulmaisessa kolmiossa ABC kateetin AB pituus on 4,4 cm ja hypotenuusan AC pituus 8,1 cm.

a) Laske kateetin BC pituus.

b) Laske kolmion terävien kulmien suuruudet 0,1 asteen tarkkuudella.

c) Laske kolmion pinta-ala 0,1 neliösenttimetrin tarkkuudella.

Ratkaisu:



Kaikki laskut voidaan tehdä joko algebrallisesti Pythagoraan kaavaa ja trigonometriaa hyödyntäen tai suoraan Geometria–sovelluksen avulla.

a) Sivu BC on yhden desimaalin ja samalla millimetrin tarkkuudella

$\sqrt{8.1^2-4.4^2}$

6.8

b) Terävät kulmat BAC ja BCA ovat vastaavasti asteen kymmenyksen tarkkuudella

$\mathrm{solve}(\cos(BAC)=\frac{4.4}{8.1}, BAC) \mid 0 \le BAC \le 180$

{BAC=57.1}

BCA=180−90−57.1

BCA=32.9

c) Pinta–ala on neliösenttimetreinä yhden desimaalin tarkkuudella

$\frac{1}{2} * 4.4 * \sqrt{8.1^2-4.4^2}$

15.0

5. Yksinkertaistetun mallin mukaan ilman lämpötila laskee lineaarisesti korkeuden h suhteen noin 11 kilometriin saakka. Merenpinnan tasolla $h = 0$ keskilämpötila on $+15$ celsiusastetta ja 11 kilometrin korkeudella -56 celsiusastetta.

a) Kuinka monta astetta ilma jäähtyy, kun noustaan 5,0 kilometrin korkeudelta 1,0 kilometriä ylöspäin?

b) Määritä ilman lämpötilan lauseke $T = T(h)$ korkeuden h avulla lausuttuna ja piirrä sen kuvaaja (h,T)-koordinaatistoon, kun $0 \le h \le 11$ km.

Ratkaisu:

a) Piirretään suora pisteiden (0,15) ja (11,−56) kautta ja lasketaan mallin mukaan lämpötilan muutos välillä [5,6]:

$$y-15=\frac{15-(-56)}{0-11}(x-0)$$

$$y-15=\frac{-71\cdot x}{11}$$

$$\text{solve}\left(y-15=\frac{-71\cdot x}{11},y\right)$$

$$\left\{y=\frac{-71\cdot x}{11}+15\right\}$$

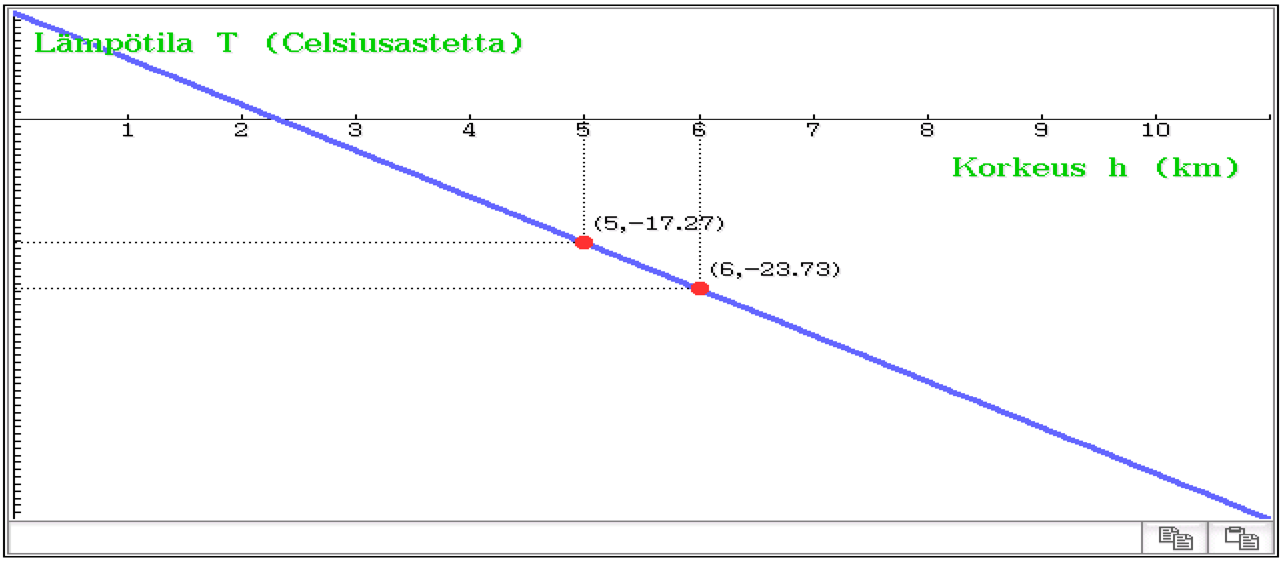
Ilma jäähtyy

$$\frac{-71\cdot 5}{11}+15-\left(\frac{-71\cdot 6}{11}+15\right)$$

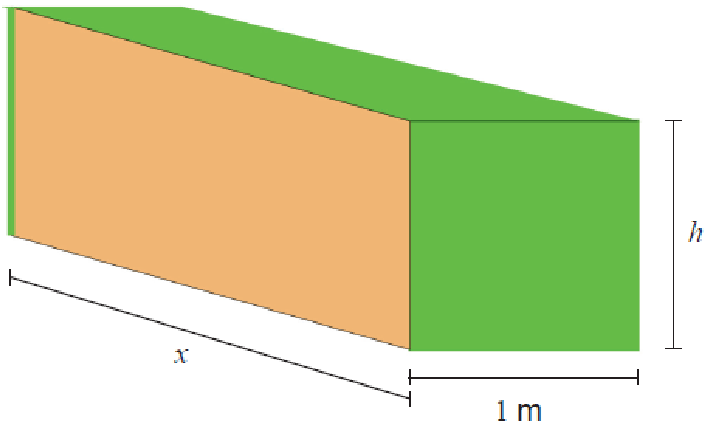
$$6.454545455$$

n. 6.5 astetta.

b) Edellä saatu suora on kysytty malli. Muutetaan muuttujat vastaamaan tehtävää $T=\frac{-71\cdot h}{11}+15$.



6. Metrin pituisista haloista kasataan suorakulmaisen särmiön muotoinen pino. Pino suojataan pressulla sekä päältä että kahdelta vastakkaiselta sivulta kuvion mukaisesti. Määritä halkopinon leveys x ja korkeus h silloin, kun pressun pinta-ala on 10 neliömetriä ja pinon tilavuus on suurin mahdollinen.



Ratkaisu:

Muodostetaan yhtälö pressun pinta−alalle ja ratkaistaan siitä h:

solve(2*1*h+1*x=10, h)

$$\left\{h=\frac{-x}{2}+5\right\}$$

Pinon tilavuuden lauseke x*h saadaan yhden muuttujan funktioksi

$x*h \mid h=\frac{-x}{2}+5$

$$-x\cdot\left(\frac{x}{2}-5\right)$$

ja sen suurin mahdollinen arvo on

$\text{fMax}\left(-x\cdot\left(\frac{x}{2}-5\right), x, 0, \infty\right)$

$$\left\{\text{MaxValue}=\frac{25}{2}, x=5\right\}$$

Lasketaan vielä pinon korkeus, kun tilavuus on suurin:

$h=\frac{-x}{2}+5 \mid x=5$

$$h=2.5$$

Siis pinon on oltava 5m leveä ja 2,5m korkea.

7. Eräällä tieosuudella käytetään kesällä ja talvella erilaisia nopeusrajoituksia. Talvinopeudella matkaan kuluu 15 minuuttia ja kesänopeudella 3 minuuttia vähemmän, kun ajetaan maksiminopeuksilla. Mikä talvinopeusrajoitus on silloin, kun kesänopeus on 20 km/h korkeampi kuin talvinopeus?

Ratkaisu:

Nopeus ja aika ovat kääntäen verrannolliset suureet. Merkitään nopeusrajoitusta talvella x, jolloin saadaan verrantoyhtälö

$$\frac{x}{x+20}=\frac{12}{15}$$

$$\frac{x}{x+20}=0.8$$

Ratkaistaan yhtälöstä x

$\text{solve}\left(\frac{x}{x+20}=0.8, x\right)$

$\{x=80\}$

Talvinopeusrajoitus on $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

8. Ravintoliuoksessa kasvatettavan bakteeripopulaation yksilömäärä $N(t)$ kasvaa eksponentiaalisen mallin $N(t)=1000\cdot 1{,}25^{t}$ mukaisesti, kun aika t ilmoitetaan tunteina.

a) Mikä on populaation koko 24 tunnin kuluttua? Anna vastaus tuhannen bakteerin tarkkuudella.

b) Kuinka monta prosenttia populaatio kasvaa jokaisen tunnin aikana?

c) Kuinka monta tuntia kestää, että populaation koko ylittää miljoonan?

Ratkaisu:

a) Populaation koko 24h kuluttua on N(24) eli

$1000*1.25^{24}$

211758.2368

mikä on tuhannen tarkkuudella n. 212000 yksilöä.

b) Bakteeripopulaatio kasvaa 25% tunnissa, koska kerroin on 1,25.

c) Koko ylittää miljoonan, kun tuntimäärä $t\in\mathbb{Z}$ toteuttaa ensimmäisen kerran ehdon $1000*1.25^{t}>1000000$. Ratkaistaan epäyhtälöstä t

$\text{solve}(1000*1.25^{t}>1000000, t)$

$\{t>30.95655348\}$

eli bakteereita on yli miljoona yksilöä 31 tunnin kuluttua.

CASIO

9. Käyrä $y=(x+1)(x+3)(x-4)$ leikkaa x-akselin kolmessa kohdassa. Määritä keskimmäiseen leikkauspisteeseen asetetun käyrän tangentin ja x-akselin välinen terävä kulma.

Ratkaisu:

Käyrän leikkauspisteet x–akselin kanssa saadaan ratkaisemalla yhtälö, jossa y=0:

solve((x+1)(x+3)(x−4)=0,x)

{x=−3,x=−1,x=4}

Keskimmäinen nollakohdista on x=−1. Käyrälle kohtaan x=−1 piirretyn tangentin kulmakerroin on sama kuin derivaatan arvo kohdassa x=−1

$\frac{d}{dx}((x+1)(x+3)(x-4))|x=-1$

−10

ja kysytty kulma saadaan ratkaisemalla yhtälö

solve(tan(α)=−10,α)|−90<α<90

{α=−84.28940686}

Kulma on n. −84,3°.

Pitkän matematiikan **YouTube-kanava** lukiokurssien esimerkkitehtävistä on osoittautunut todella suosituksi tukimuodoksi erityisesti opiskelijoiden keskuudessa. Tämän vuoksi myös lyhyen matematiikan kursseihin tulee videomateriaalia. Lyhyen matematiikan talousmatematiikan kurssi on jo valmiina ja lisää videoita on tulossa!

Käy katsomassa YouTubesta hakusanalla ”fx-CP400” tai lyhennetystä linkistä

http://bitly.com/fx-cp400

10. Kokeessa on 10 tehtävää, joissa valitaan kahdesta vaihtoehdosta oikea vastaus. Oikeasta vastauksesta saa yhden pisteen ja väärästä vastauksesta menettää yhden pisteen. Huonosti valmistautunut opiskelija valitsee kaikki vastaukset arvaamalla. Kuinka suurella todennäköisyydellä hän saa kokeesta vähintään 8 pistettä?

Ratkaisu:

Todennäköisyys sille, että opiskelija saa 8, 9 tai 10 pistettä tarkoittaa samaa kuin että hän saa 9 tai 10 oikein. Jokaisen valinnan todennäköisyys onnistua on $\frac{1}{2}$.

9 pistettä ei ole mahdollista saada, koska yksi väärä vastaus vähentää pisteitä. Tällöin tilanteessa 9 oikein väärä valinta poistaa yhden ansaitun pisteen ja tulokseksi jää 8 pistettä. Tehtävän mukaan opiskelija vastasi kuitenkin kaikkiin tehtäviin.

Valintoja voidaan pitää toisistaan riippumattomina, joten kyseessä on toistokoe. Siis

P(vähintään 8 pistettä)=P(8 tai 10 pistettä)=P(9 tai 10 oikein)=

$$\mathrm{nCr}(10,9)*\left(\frac{1}{2}\right)^{9}*\left(\frac{1}{2}\right)^{10-9}+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$\frac{11}{1024}$$

ans

0.0107421875

Todennäköisyys on n. 1%.

11. Teollisuusvakooja löytää lukitsemattoman tietokoneen ja alkaa kopioida tiedostoja. Tietokoneessa on vain 10 kilotavun kokoisia kuvatiedostoja ja 1 kilotavun kokoisia tekstitiedostoja, joista vakoojalle on luvattu vastaavasti 100 euroa tai 8 euroa kappaleelta.

a) Muodosta vakoojan kokonaispalkkion lauseke kopioitujen kuvatiedostojen lukumäärän x ja tekstitiedostojen lukumäärän y avulla lausuttuna.

b) Muotoile lukumääriä x ja y koskevat rajoitusehdot, kun vakoojan muistitikulla on vain 1000 kilotavua tilaa jäljellä ja aikaa kopioimiseen on 10 minuuttia. Kuvatiedoston kopioimiseen kuluu 5 sekuntia ja tekstitiedoston kopioimiseen 1 sekunti tiedostoa kohti.

c) Kuinka monta kuva- ja tekstitiedostoa vakoojan kannattaa kopioida?

Ratkaisu:

a) Kokonaispalkkio on $100x+8y$.

b) Molempien on lukumäärinä oltava vähintään nollia eli $x\geq 0, y\geq 0$. Aika asettaa omat rajansa eli $5x+y\leq 600$ ja muistitikun koko omat rajansa $10x+y\leq 1000$.

c) Ratkaistaan tämä lineaarisena optimointitehtävänä laskemalla ehtosuorien leikkauspisteet sekä toistensa että akseleiden kanssa.

$$\left.\begin{cases} x=0 \\ y=-5x+600 \end{cases}\right|_{x,y}$$

$$\{x=0, y=600\}$$

$$\left.\begin{cases} y=0 \\ y=-10x+1000 \end{cases}\right|_{x,y}$$

$$\{x=100, y=0\}$$

$$\left.\begin{cases} y=-5x+600 \\ y=-10x+1000 \end{cases}\right|_{x,y}$$

$$\{x=80, y=200\}$$

Sijoittamalla leikkauspisteiden koordinaatit eli kuva- ja tekstitiedostojen määrät kokonaispalkkion lausekkeeseen, nähdään suurimman palkkion antavat lukumäärät.

$100x+8y|\{x=0, y=600\}$

4800

$100x+8y|\{x=100, y=0\}$

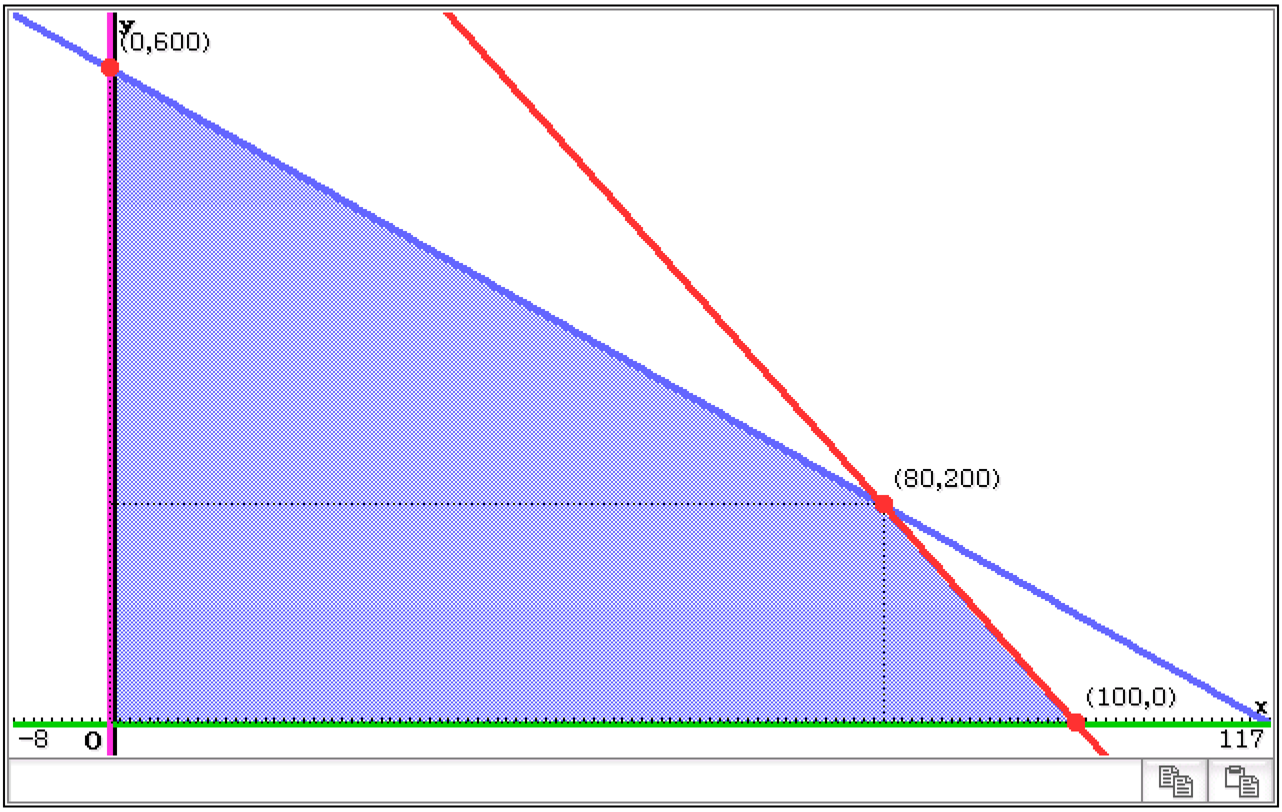
10000

$100x+8y|\{x=80, y=200\}$

9600

Palkkio on suurin, kun vakooja vie 100 kuvatiedostoa eikä lainkaan tekstitiedostoja.

Sama tehtävä piirrettynä Käyrä&Taulukko-Sovellukseen, kun graafin asetuksista on valittu epäyhtälöiden piirtämisen asetukseksi ”Leikkaus”.



Arkki1 Arkki2 Arkki3 Arkki4 Arkki5

- $y1 \le -5 \cdot x + 600$
- $y2 \le -10 \cdot x + 1000$
- $y3 \ge 0$
- $x4 \ge 0$

12. LED-TV:n suorakulmaisen kuvaruudun leveyden ja korkeuden suhde on 16 : 9. Kuvaruudun lävistäjän pituus on 40 tuumaa; yksi tuuma on 2,54 senttimetriä.

a) Määritä kuvaruudun leveys ja korkeus millimetrin tarkkuudella.

b) Määritä kuvaruudun pinta-ala neliösenttimetrin tarkkuudella.

Ratkaisu:

a) Olkoon kuvaruudun leveys 16a ja korkeus 9a, a>0. Lävistäjä jakaa kuvaruudun kahteen suorakulmaiseen kolmioon. Ratkaistaan Pythagoraan lauseesta a:

solve((16a)^2+(9a)^2=(40*2.54)^2,a)|a>0

{a=5.534504661}

Leveys on tällöin millimetrin tarkkuudella

16*5.534504661

88.6

ja korkeus vastaavasti

9*5.534504661

49.8

b) Kuvaruudun pinta-ala on 16a*9a eli

16*5.534504661*9*5.534504661

4410.8

mikä on neliösenttimetrin tarkkuudella 4411cm².

Casio on tukenut lyhyen matematiikan opiskelua ja yo-kokeisiin valmistautumista jo vuosia. Katso aiemmat lyhyen matematiikan yo-koeratkaisut osoitteesta

http://www.casio-laskimet.fi/fi/opettajakoulu/opetusmateriaalia/

CASIO

13. Erään koulun matematiikan ylioppilaskokeen arvosanajakauma oli oheisen taulukon mukainen. Määritä arvosanojen keskiarvo ja keskihajonta, kun arvosanoille käytetään taulukkoon merkittyjä numeroarvoja.

Arvosana	Numeroarvo	Lukumäärä
l	7	7
e	6	20
m	5	30
c	4	16
b	3	9
a	2	4
i	0	0

Ratkaisu:

Lasketaan tehtävä Taulukko-sovelluksessa, jolloin keskiarvoksi saadaan n. 4,9 ja keskihajonnaksi n. 1,25.

Taulukko-sovellus ->

	A	B	C	D	E	F
1	Arvosana	Numeroarvo	Lukumäärä			
2	l	7	7			
3	e	6	20			
4	m	5	30			
5	c	4	16			
6	b	3	9			
7	a	2	4			
8	i	0	0			

Lukumäärä

Yksi muuttuja

$\bar{x} = 4.8604651$

$\Sigma x = 418$

$\Sigma x^2 = 2166$

$\sigma_x = 1.2497701$

$s_x = 1.2571002$

Lähtö>> Linkki Sulje

14. Sijoitustilin talletukselle lasketaan vuotuinen korko, josta vähennetään lähdevero. Jäljelle jäänyt tuotto lisätään tilille vuoden lopussa. Hannele talletti vuoden 2010 lopussa 1 000 euroa säästötilille. Vuoden 2013 lopussa tilillä oli 1 086,37 euroa. Kyseisellä aikavälillä kuluttajahintaindeksi nousi arvosta 100,0 arvoon 108,5, toisin sanoen inflaatio oli tällä aikavälillä yhteensä 8,5 %.

a) Laske talletuksen nimellinen vuosikorkoprosentti näiden kolmen vuoden aikana.

b) Mikä on talletuksen todellinen korko euroina näiden kolmen vuoden aikana?

Ratkaisu:

a) Merkitään vuotuista korkokerrointa k, jolloin keskimääräinen vuotuinen kasvu saadaan ratkaisemalla

solve(k^3*1000=1086.37,k)

{k=1.027998753}

jolloin nimellinen vuosikorkoprosentti on n. 2,8.

b) Talletuksen todellinen korko saadaan, kun lasketaan talletuksen arvo vuoden 2013 rahassa ja vähennetään se tilin saldosta

1086.37-1.085*1000

1.37

Talletus oli kavanut todellisuudessa korkoa vain 1,37€.

15. **a)** Suorakulmion kolme kärkeä ovat origossa, pisteessä $(2,1)$ ja pisteessä $(2,-4)$. Määritä neljännen kärjen koordinaatit.

b) Määritä a-kohdan suorakulmion pinta-ala.

c) Yhdysjanat origosta pisteisiin $(1,2,1)$, $(1,-1,1)$ ja $(2,0,-2)$ muodostavat suorakulmaisen särmiön kolme särmää. Mihin pisteeseen päättyy origosta alkava särmiön avaruuslävistäjä?

Ratkaisu:

a) Merkitään suorakulmion origosta lähteviä sivuvektoreita OA ja OB.

[2 1]⇒OA

[2 1]

[2 −4]⇒OB

[2 −4]

Puuttuvan kulman C paikkavektori OC on

OA+OB

[4 −3]

ja piste on C(4,−3).

b) Suorakulmion pinta-ala on viereisten sivujen pituuksien tulo eli

norm(OA)*norm(OB)

10

c) Avaruuslävistäjä OP on samasta nurkasta lähtevien virittäjävektorien summa, joten lasku

[1 2 1]+[1 −1 1]+[2 0 −2]

[4 1 0]

antaa avaruuslävistäjän päätepisteeksi P(4,1,0).