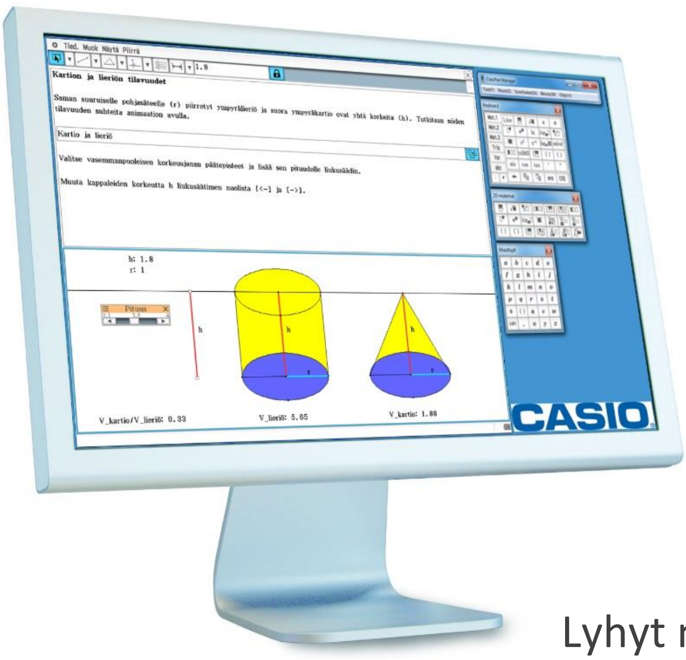


LASKE LAUDATUR CLASSPADILLA

Lyhyt matematiikka, kevät 2019

Tiivistelmä

Kevään 2019 sähköisten yo-kokeiden ratkaisut ClassPad Managerilla laskettuina. Laskujen tiedostot ovat ladattavissa Casion tukisivuilta osoitteesta https://www.casio-laskimet.fi

Pepe Palovaara
pepe.palovaara@casio.fi

Hyvä lukija,

Ensimmäinen täysin sähköinen matematiikan yo-koe on tehty! Kokeen rakenne oli entisellään, tosin pisteytys tehtävää kohden muuttui 6:sta 12:een mahdollistaen perustelujen aiempaa tarkemman pisteytyksen. Näin kokeen ohje asian kiteyttää:

”Koe koostuu 13 tehtävästä, joista vastataan kymmeneen. Tehtävät on jaettu kolmeen osaan. A-osassa on neljä kaikille pakollista tehtävää. B1-osassa on viisi tehtävää, joista vastataan kolmeen. B2-osassa on neljä tehtävää, joista vastataan kolmeen. Kaikki tehtävät arvostellaan pistein 0–12, joten kokeen maksimipistemäärä on 120.”

Mukana oli myös tehtäviin liittyviä aineistoja. Tämä vihkonen on ladattavissa pdf-muodossa ja kaikki tehtävien ratkaisut ovat saatavilla myös ClassPadin tiedostoina (.xcp) Casion kotisivuilta. ClassPadin tiedostot aukeavat suoraan eActivity -sovellukseen kaksoisklikkaamalla. Tiedostoja voidaan hyödyntää myös esim. Abitti-kokeissa, tehtävien palautuksessa sähköiseen oppimisympäristöön tai jaettuun resurssiin (pilvipalveluun). Tukesi löytyy osoitteesta

http://www.casio-laskimet.fi

Casio Academy – videot soittolistalla

Tänä keväänä jo 4. kertaa pidetyssä Casio Academy -harjoittelupäivässä opiskelijoilla oli mahdollisuus harjoitella matematiikan yo-kokeisiin netin välityksellä matematiikan opettajien kera. Opiskelijoiden tukeminen ja opinnoissa auttaminen on meille tärkeää. Aiemmat malliratkaisut löytyvät tallenteina YouTubesta

https://bit.ly/casio-academy

ClassPad-perhe

Abitti-kokeen B-osan tehtävissä on käytössä ClassPad Manager, jolla tämän vihkon ratkaisutkin on laadittu. Casion uusi selainpohjainen CAS-ohjelma ClassPad.net sopii jo hyvin sähköisten kokeiden ratkaisemiseen, matematiikan opettamisen välineeksi ja - ennen kaikkea - matematiikan hahmottamiseen ja oppimiseen. Kannattaa testata ohjelmaa jo syksyn MAY1-kurssilla!

Mukavia hetkiä sähköisten yo-kokeiden ratkaisujen parissa!

Espoossa 2.4.2019

Pepe Palovaara

Nordic School Coordinator
Casio Scandinavia

A-osa

Ratkaise kaikki tämän osan tehtävät 1–4.

---

1. Lukujonojen määritelmiä (12 p.)

Aineisto:
1.A Luettelo: Lukujonot A–G

Yhdistä kukin lukujonon määritelmä 1.1.–1.6. siihen jonoon A–G, joka määritelmän perusteella saadaan. Kaikki jonot alkavat jäsenestä a_1, ja yksi vastausjono jää käyttämättä. Vastauksia ei tarvitse perustella.

1.1. $a_n = 2n - 1$ C. (1, 3, 5, 7, ...) (2 p.)

1.2. $a_n = n^2$ D. (1, 4, 9, 16, ...) (2 p.)

1.3. $a_n = n^3$ E. (1, 8, 27, 64, ...) (2 p.)

1.4. $a_n = 2^n$ G. (2, 4, 8, 16, ...) (2 p.)

1.5. $a_1 = 2$ ja $a_n = a_{n-1} + 2$, kun $n \geq 2$ F. (2, 4, 6, 8, ...) (2 p.)

1.6. $a_1 = 1, a_2 = 2$ ja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, kun $n \geq 3$ B. (1, 2, 3, 5, ...) (2 p.)

2. Paraabelien huiput (12 p.)

Määritä seuraavien paraabelien huippujen x- ja y-koordinaatit. Vastaukset voi antaa vain tekstimuodossa. Vastauksia ei tarvitse perustella.
Anna vastaukset muodossa "x =___, y =___".

2.1. $y = 2x^2 + 1$ (4 p.)

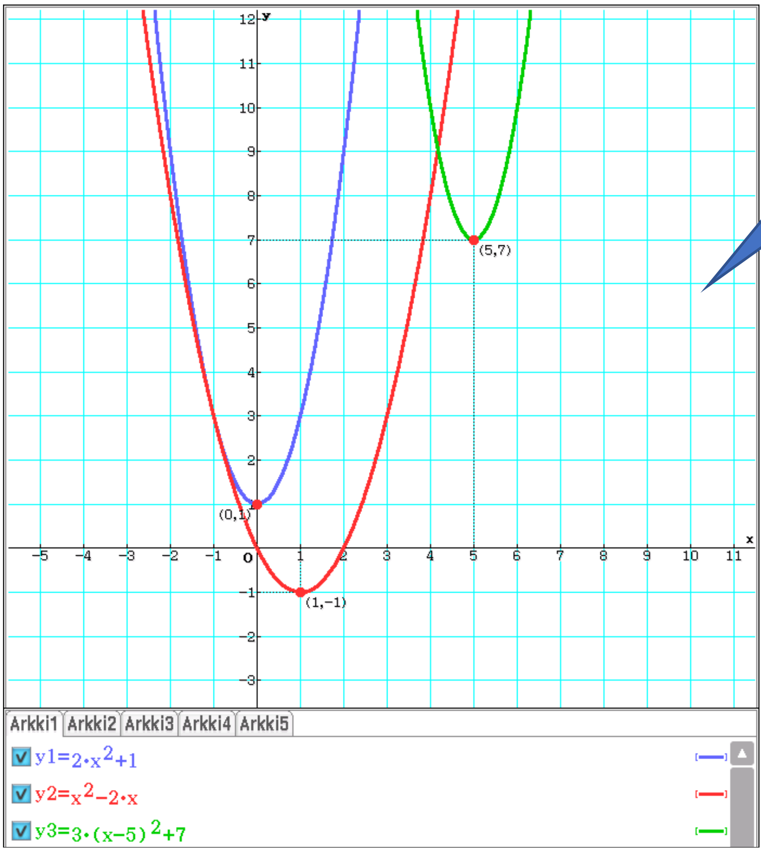
2.2. $y = x^2 - 2x$ (4 p.)

2.3. $y = 3(x - 5)^2 + 7$ (4 p.)

2.1. Paraabelin huippu on ylöspäin avautuvassa paraabelissa ainoassa derivaatan nollakohdassa. y'=4x=0, jos ja vain jos x=0. Tällöin $y=2*0^2+1=1$.

2.2. Parabelin huippu on ylöspäin avautuvan paraabelin nollakohtien puolivälissä. Nollakohdat ovat $x^2-2x=0$, josta $x(x-2)=0$ ja edellen x=0 tai x=2. Siis nollakohta on $x=\frac{2-0}{2}=1$ ja $y=1^2-2*1=-1$.

2.3. Paraabelin huippu on ylöspäin avautuvassa paraabelissa luettavissa huippumuotoisesta yhtälöstä $y-7=3(x-5)^2$, josta x=5 ja y=7.

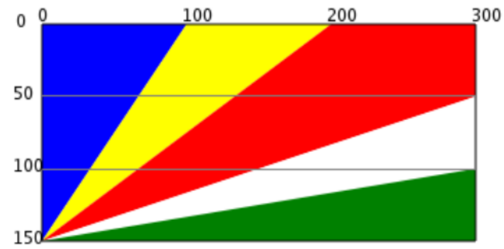


A-osassa ei ClassPad ole käytössä, mutta oheisessa kuvassa on havainnollistettu paraabelien kuvaajat.

3. Värikäs lippu (12 p.)

Aineisto:
3.A Kuva: Seychellien lippu

Seychellien lipussa on viisi eri väriä kuvan 3.A mukaisesti. Kuinka monta prosenttia kukin väri peittää koko lipun pinta-alasta?



Lähde: Prog Zoo.
https://progzoo.net/wiki/Flags_with_Polygons_Tutorial.
Viitattu 27.8.2018.

Sinisen kolmion pinta−ala on $\frac{1}{2}*100*150=7500$ pay.

Keltaisen kolmion pinta−ala on $\frac{1}{2}*100*150=7500$ pay.

Valkoisen kolmion pinta−ala on $\frac{1}{2}*50*300=7500$ pay.

Vihreän kolmion pinta−ala on $\frac{1}{2}*50*300=7500$ pay.

Loput lipun pinta−alasta on punaista eli $150*300-4*7500=15000$ pay.

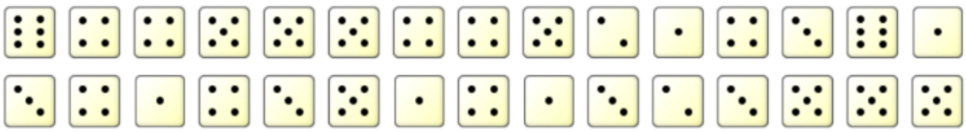
Suhteelliset osuudet ovat punaiselle värille $\frac{15000}{45000}=\frac{1}{3}\approx 33,3\%$ ja kaikille muille $\frac{7500}{45000}=\frac{1}{6}\approx 16,7\%$.

4. Tilastokysymyksiä nopanheitosta (12 p.)

Aineisto:
4.A Kuva: Nopat

Heitettiin 30 noppaa, ja saatiin kuvan 4.A mukainen tulos, jota kutsutaan tässä tehtävässä aineistoksi.

4.1. Muodosta aineiston perusteella frekvenssitaulukko. Voit laatia taulukon kaavaeditorin taulukko-ominaisuudella tai pelkkänä tekstinä. (2 p.)
4.2. Mikä on aineiston moodi? Perustele lyhyesti vastauksesi. (2 p.)
4.3. Mikä on aineiston mediaani? Perustele lyhyesti vastauksesi. (3 p.)
4.4. Mikä on aineiston keskiarvo? Perustele lyhyesti vastauksesi. (3 p.)
4.5. Mikä on silmäluvun 6 tilastollinen todennäköisyys tässä aineistossa? (2 p.)



Lähde: RANDOM.ORG. https://www.random.org/dice/. Viitattu 23.1.2018.

4.1. $\begin{bmatrix} \text{Silmäluku} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \text{Frekvenssi} & 5 & 2 & 5 & 8 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

4.2. Moodi on eniten esiintyvä arvo tai arvot eli 4 ja 5, sillä niillä on suurin frekvensi 8.

4.3. Mediaani on järjestetyn aineiston keskimmäinen tai keskimmäiset arvo(t) eli 4, sillä aineiston 15. ja 16. arvo on 4.

4.4. Keskiarvo on $\dfrac{5*1+2*2+5*3+8*4+8*5+2*6}{30}=3,6$ eli silmälukujen summa jaettuna noppien lukumäärällä.

4.5. Tilastollinen todennäköisyys on esiintymiskertojen määrä jaettuna kaikkien tulosten lukumäärällä eli $\dfrac{2}{30}=\dfrac{1}{15}=6,7\%$.

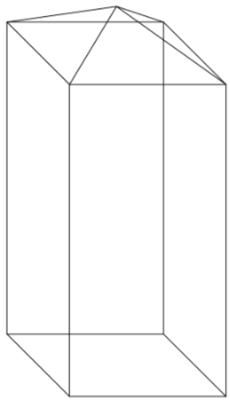
B1-osa

Ratkaise kolme tehtävistä 5–9. Tässä osassa saat käyttää kaikkia koejärjestelmän ohjelmia ja omaa laskintasi, kun olet palauttanut A-osan vastaukset.

5. Paljonko tölkissä on ilmaa? (12 p.)

Aineisto:
5.A Kuva: Maitotölkki

Maitotölkki (aineisto 5.A) sisältää $1{,}75$ litraa maitoa. Tölkin pohja on neliö, jonka sivun pituus on $9{,}25$ cm. Tölkin sisäosan kokonaiskorkeus on $23{,}0$ cm, ja sen alaosa koostuu suorakulmaisesta särmiöstä, jonka korkeus on $20{,}0$ cm. Tölkin yläosa muodostuu pyramidista. Kuinka paljon ilmaa on avaamattomassa maitotölkissä?



Kuva: YTL.

Lasketaan koko maitotölkin tilavuus

$V=9.25^2*20+\frac{1}{3}*9.25^2*(23-20)=\frac{28749}{16}\text{cm}^3.$

Vähentämällä tästä maidon määrä saadaan avaaamattomassa tölkissä olevan ilman määräksi $\frac{28749}{16}-1750=46.8125\approx 47\text{cm}^3.$

6. Puun kasvu (12 p.)

Metsäntutkija mallintaa puun kasvua. Mallissa puunrunko ajatellaan suoraksi ympyräpohjaiseksi kartioksi. Ajanhetkellä $t=0$ puunrunko on korkeudeltaan 6 metriä ja tyvestä halkaisijaltaan 8 cm paksu. Joka vuosi puu kasvaa pituutta 45 cm ja tyven halkaisija kasvaa $0{,}6$ cm. Muodosta funktio, joka kuvaa puunrungon tilavuutta ajan funktiona. Mikä on rungon tilavuus 20 vuoden kuluttua?

Muutetaan kaikki mitat senttimetreiksi ja muodostetaan puun tilavuutta kuvaava funktio V(t), missä t on aika vuosina, kartion tilavuuden avulla.

$V(t)=\frac{1}{3}*\pi*(4+0.3t)^2*(600+45t)$

20 vuoden kuluttua puun tilavuus on

$V(20)=50000\cdot\pi\approx 157000\text{cm}^3=157\text{dm}^3.$

7. Mikko vaihtaa rahaa (12 p.)

Mikko lähtee matkalle Varsovaan ja Prahaan. Hän joutuu vaihtamaan rahaa useita kertoja ennen matkaa ja matkan aikana. Jokaisessa vaihdossa hän menettää vaihtotappiona 5 prosenttia rahan arvosta. Hän vaihtaa 300 euroa Puolan złotyiksi ja 200 euroa Tšekin korunoiksi. Hän ei muista, millä kurssilla vaihto suoritettiin, mutta pitää kirjaa siitä, kuinka suuri osuus rahoista tulee käytettyä.

Puolassa hän huomaa, että kolmasosa złoteista on jäänyt käyttämättä, ja hän vaihtaa ne lähtiessään Tšekin korunoiksi. Kotiin tullessaan hänellä on vielä viidesosa kaikista korunoista jäljellä, ja hän vaihtaa ne takaisin euroiksi.

Kuinka monta euroa hän saa takaisin? Anna vastaus euron tarkkuudella.

5 prosentin vaihtotappion jälkeen 1. vaihdon jälken Mikolla on
0.95*300=285 euron arvosta zloteja ja
0.95*200=190 euron arvosta korunoita.

Kolmasosa näistä zloteista on euroissa mitattuna $\frac{1}{3}*285=95$ ja vaihdettuaan ne korunoiksi, Mikko menettä jälleen 5 prosenttia näiden arvosta. Hänelle tulee lisää korunoita 0.95*95=90.25 euron edestä.

Viidesosa käytössä olleista korunoista oli euroissa 190+90.25=280.25 ja näistä viidesosa on 56.05 euroa. Vaihtaessaan korunat takaisin euroiksi, hän menettää taas kerran 5 prosenttia niiden arvosta, jolloin hän saa viimeisessä vaihdossa rahaa
0.95*56.05=53.2475≈53.20€.

(rahanvaihto ei pyöristä ylöspäin eikä yleensä vaihda kuin seteleitä).

8. Lukujonon kasvaminen ja väheneminen (12 p.)

Tarkastellaan lukuja

$$a_n = -n^3 + 1000n^2 + 100n + 2019,$$

kun $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 1000$. Etsi derivaatan avulla sellainen indeksin k arvo, että lukujono $(a_0, \dots, a_k)$ on kasvava ja lukujono $(a_k, \dots, a_{1000})$ on vähenevä.

Koska lukujono on annettu funktion avulla, sen kulku noudattaa vastaavan funktion kulkua. Ratkaistaan funktion derivaataksi muuttujan n suhteen laskimella $-3 \cdot n^2+2000 \cdot n+100$.

Koska tämä on 2. asteen polynomi ja 2. asteen termin kerroin on negatiivinen, sen ainoa derivaatan nollakohta on maksimikohta. Funktio kasvaa tähän derivaatan nollakohtaan saakka ja sen jälkeen vähenee.

Derivaatan nollakohdaksi saadaan yhtälön $-3 \cdot n^2+2000 \cdot n+100=0$ ratkaisuina $n=\frac{-10 \cdot \sqrt{10003}}{3}+\frac{1000}{3}$ tai $n=\frac{10 \cdot \sqrt{10003}}{3}+\frac{1000}{3}$, mutta lukujonon tapauksessa indeksi $n \geq 0$ ja vain jälkimmäinen vastaus käy.

Vastauksen likiarvo on 666.7, joten täytyy laskea lukujonon 666. ja 667. jäsen. Nyt

$a_{666}=-(666)^3+1000*(666)^2+100*666+2019=148216323$ ja

$a_{667}=-(667)^3+1000*(667)^2+100*667+2019=148216756$

Lukujono kasvaa indeksiin k=667 asti ja sen jälkeen muuttuu väheneväksi. Etsitty indeksi on siis k=667.

9.1. (Vanha opetussuunnitelma, ennen 1.8.2016 lukion aloittaneet)

Vuoroveden korkeutta kellonajan t (yksikkönä tunti, $t = 0$ keskiyöllä) funktiona voidaan kuvata funktion

$$f(t) = A + B\sin\left(\frac{2\pi}{12{,}4}(t - t_0)\right)$$

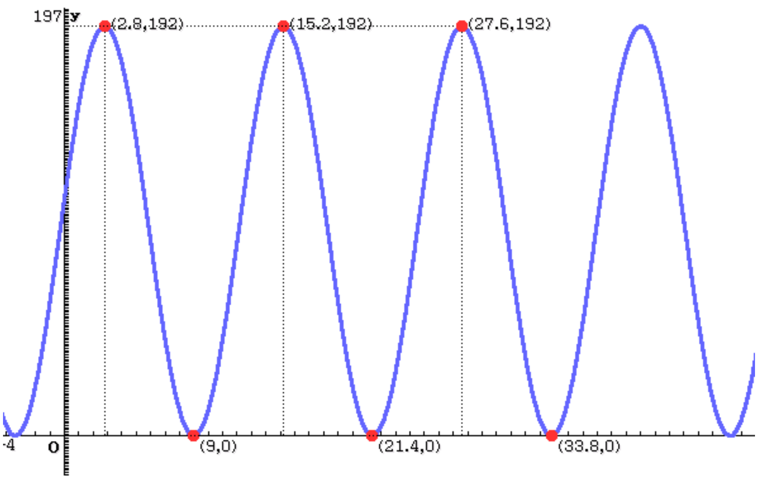
avulla. Tässä A, B ja t_0 ovat vakioita. Norjan Tromssassa merenpinta on eräänä päivänä kello 9.00 matalimmillaan. Seuraavan kerran merenpinta on matalimmillaan samana päivänä kello 21.24. Korkeimmillaan merenpinnan korkeus näin kuvattuna on 192 cm ja matalimmillaan 0 cm.

Määritä näiden tietojen avulla funktion $f(t)$ lausekkeessa esiintyvien vakioiden arvot. Anna vastaukset kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

Koska $-1 \le \sin(x) \le 1$, niin funktion $f(t)$ suurin arvo on $A+B*1=A+B$ (kun $B>0$). Vastaavasti pienin arvo on $A+B*(-1)=A-B$. Ratkaistaan tehtävässä annettujen merenpinnan suurimman ja pienimmän arvon avulla muodostettu yhtälöpari $\left.\begin{cases} A+B=192 \\ A-B=0 \end{cases}\right|_{A,\,B}$, josta saadaan $A=B=96.0$ kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

Ajan hetkellä $t=9.00$ saadaan funktion pienin arvo. Toisaalta tiedetään, että sinifunktion pienin arvo saadaan kulman arvolla $\frac{3\pi}{2}$, joten t_0 saadaan ratkaistua yhtälöstä $\frac{3\pi}{2}=\frac{2\pi}{12.4}*(9-t_0)$ ja sen arvo kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella on $t_0=-3.00*10^{-1}$.

Vastaus: $A=B=96.0$ ja $t_0=-3.00*10^{-1}$.



9.2. (Uusi opetussuunnitelma, 1.8.2016 tai sen jälkeen lukion aloittaneet)

Aineisto:
9.A Teksti: Ilmasto-opas

Ilmasto-oppaan (aineisto 9.A) perusteella oletetaan, että vuoden 2010 tyyppisen ennätyslämpimän heinäkuun todennäköisyys on joka vuosi $\frac{1}{60}$. Tapahtumat oletetaan myös toisistaan riippumattomiksi. Kuinka suurella todennäköisyydellä Suomessa

– ei ole yhtään ennätyslämmintä heinäkuuta seuraavien 30 vuoden aikana? (4 p.)
– on vähintään kaksi ennätyslämmintä heinäkuuta seuraavien 30 vuoden aikana? (8 p.)

Korkeiden lämpötilojen todennäköisyys on moninkertaistunut jo nyt. Vaikka vuotuisten keskilämpötilojen mukainen lämpeneminen on maassamme ollut toistaiseksi suhteellisen pientä verrattuna eri vuosien väliseen suureen vaihteluun, ovat ennätyskorkeiden kuukausittaisten ja vuodenaikoja koskevien keskilämpötilojen todennäköisyydet kuitenkin jo moninkertaistuneet. Mikäli jo tähän mennessä tapahtunutta lämpenemistä ei oteta huomioon, toistuu esimerkiksi vuoden 2010 ennätyslämmin heinäkuu noin 300 vuoden välein. Kun globaali ilmastonmuutos otetaan huomioon, pienenee tämä aika noin 60 vuoteen.

Lähde: Ilmasto-opas. https://ilmasto-opas.fi/. Viitattu 13.2.2018.

Riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännöllä todennäköisyys sille, että Suomessa ei ole yhtään ennätyslämmintä heinäkuuta seuraavien 30 vuoden aikana, on $\left(1-\frac{1}{60}\right)^{30}=0.603980389...\approx 0.60.$

Lasketaan P("vähintään kaksi...")=1−P("ei yhtään tai yksi...") hyödyntämällä binomitodennäköisyyttä ja 1. kohdan vastausta, jolloin todennäköisyydeksi saadaan

$$1-\left(0.603980389...+\mathrm{nCr}(30,1)*\left(1-\frac{1}{60}\right)^{29}*\frac{1}{60}\right)$$
$$=0.0889109380...\approx 0.089.$$

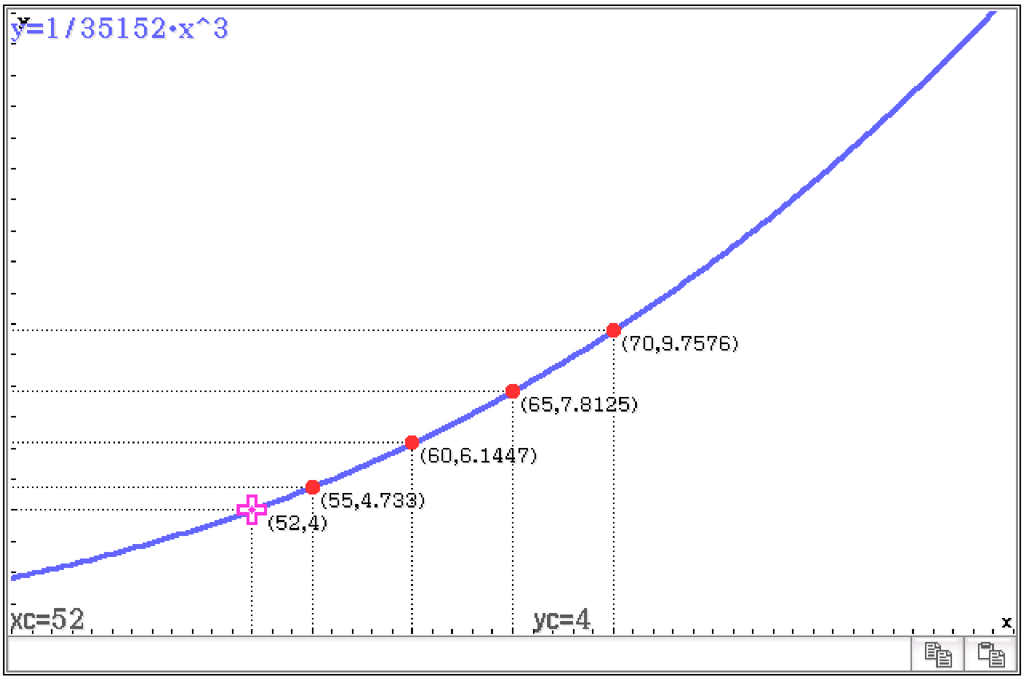
10. Miten vauva kasvaa? (12 p.)

Vauvan painon voidaan arvioida kasvavan q^3-kertaiseksi, kun vauvan pituus kasvaa q-kertaiseksi. Tämä perustuu siihen, että vauva on kolmiulotteinen ja kasvua tapahtuu suurin piirtein yhtä paljon jokaiseen suuntaan. Oletetaan, että vauva on syntyessään 52 cm pitkä ja painaa $4{,}0$ kilogrammaa.

10.1. Arvioi vauvan painoa tällä menetelmällä, kun vauvan pituus on $55, 60, 65$ ja 70 cm. (4 p.)
10.2. Piirrä kuvaaja, josta ilmenevät syntymämitat ja kohdassa 10.1. lasketut tiedot. (4 p.)
10.3. Voiko samaa arviointitapaa käyttää aikuiseksi asti? Valota esimerkeillä ja perustele, miksi uskot menetelmän toimivan tai olevan toimimatta. (4 p.)

Vauvan painoa kuvaa funktio $m(x)=k*x^3$. Sijoitetaan tähän malliin vauvan syntymämitat pituus x=52cm ja paino m(x)=4.0kg, jolloin voidaan ratkaista verrannollisuuskerroin k yhtälöstä $4=k*52^3$. Saadaan painoa kuvaavaksi funktioksi $m(x)=\frac{1}{35152}*x^3$, missä pituus on senttimetreinä ja paino kilogrammoina.

10.1. Vauvan painon arvioiksi tällä mallilla saadaan
$m(55)=4.73301661...\approx 4.7$kg
$m(60)=6.14474283...\approx 6.1$kg
$m(65)=7.8125\approx 7.8$kg
$m(70)=9.75762403...\approx 9.8$kg



10.3. Malli ei sovellu aikuiselle, sillä aikuinen ei ole yhdemuotoinen vauvan kanssa. Mittasuhteet muuttuvat. Kaavan mukaan keskipitkä 180cm mies painaisi $m(180)\approx 166$kg, mikä on paljon kansallista keskiarvoa enemmän. Vastaavasti 100kg painoisen ihmisen pituuden tulisi olla yhtälön m(x)=100 ratkaisuna n. 152cm. Tämä on keskimäärin liian vähän 100kg painoiselle aikuiselle.

11. Harrin palkka (12 p.)

Harri saa palkkaa 4 200 euroa kuukaudessa ja hänen työtuntimääränsä on 155 tuntia kuukaudessa. Hän arvioi tuntipalkkaansa seuraavalla tavalla: *Jos työtuntimääräni olisi 160 tuntia ja palkkani 4 000 euroa, niin tuntipalkkani olisi 4 000/160 = 25. Tässä ei ole otettu huomioon 200 euroa palkasta, joten virhe on runsas euro tuntia kohti; palkka on siis runsaat 26 euroa. Todellinen työtuntimäärä on 155, ei 160, ja siitä tulee varmaankin pieni virhe, joten todellinen tuntipalkka on ehkäpä 27 euroa.*

11.1. Kuinka monta prosenttia enemmän tai vähemmän Harri arvioi saavansa palkkaa tunnilta kuin hän oikeasti saa? (4 p.)

11.2. Selitä Harrin päättelyn vaiheita ja arvioi, perustuuko päättely päteviin arvioihin. (8 p.)

11.1. Oikea palkka tiedetään olevan 4200€/kk. Harrin arvioima palkka on 155*27=4185€/kk. Arvio on siis todellista palkkaa pienempi. Koska $\frac{4185-4200}{4200}*100\%\approx-0.36\%$, niin virhe on n. 0.36%.

11.2. Harri pyöristää tuntimäärää ylöspäin ja palkkaa alaspäin, mikä on sinänsä järkevää virheiden osin kumotessa toisensa. Lasku 4000/160=25€ on oikein. Koska 200/160=1.25€, niin päätelmä hieman runsaasta 26€ on myös oikeansuuntainen.

Korjaus todellisen tuntimäärä osalta on myös oikeansuuntainen, sillä jakajan pienentyessä 160:stä 155:een, tuntipalkka kasvaa. Suuruusluokka hieman alle euron noususta on kohdallaan, sillä todellisuudessa jakajan muutos nostaisi todellisen tuntipalkan $\frac{160}{155}*26.25\approx27.10€$.

12. Elisan laina (12 p.)

Aineisto:
12.A Taulukko: Lainan korko

Elisa otti aikanaan $100\,000$ euron suuruiselle kymmenen vuoden tasalyhennyslainalleen korkokaton. Pankista sai lainalle $4{,}5$ prosentin korkokaton $5\,000$ euron hintaan. Laina oli sidottu 12 kuukauden euriborkorkoon, joka vaihteli laina-aikana taulukon 12.A mukaan. Kaikki tehtävässä mainitut korkokannat sisältävät korkomarginaalin, ja lainaa lyhennetään kuukausittain.

Kannattiko Elisan ottaa lainalleen korkokattoa? Korkokaton sijaan hän olisi voinut sijoittaa $5\,000$ euroa säästötilille, jolloin talletuksen nykyinen arvo olisi $5\,700$ euroa. Muita rahan arvon muutoksia ei tarvitse huomioida.

Voit halutessasi esittää laskut taulukkolaskentaohjelmasta otetussa kuvakaappauksessa, kunhan vastauksesta selviää, miten tuloksiin on päästy.

12.A Taulukko: Lainan korko

Lainavuosi	Korkoprosentti
1	2,4
2	2,5
3	2,3
4	2,9
5	3,4
6	3,4
7	5,5
8	5,7
9	5,0
10	5,1

Lähde: YTL.

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla kumpaakin vaihtoehtoa koskevat lainan kustannukset.
Mikäli korkokatto kannatti ottaa, on sen säästettävä yli 5700 euroa verrattuna toiseen vaihtoehdoista.

Laskutaulukko =>

Laskukaavat ovat
- sarakkeessa C vuosikorko sarakkeesta B on jaettu 12:lla
- solualueessa D1:O12 on jäljellä olevasta lainasta vähennetty vakiolyhennys 833.33€
- solualueessa D5:O24 on jäljellä oleva lainan määrä kerrottu kuukausittaisella korkoprosentilla ja jaettu 100:lla, esim. solu E15=E3·$C15/100
- solualueessa B28:B37 on yli 4.5% vuosikorko korvattu korkokatolla
- solualue D28:D37 samoin kuin D5:O24
- sarakkeessa on laskettu yhteen kunkin kuun korkomenot ja soluiss P25 ja P37 on kokonaiskorot

Korkokaton kanssa korkojen osuus on 15160.42€ ja ilman korkokattoa 15929.17€. Koska korkokatto säästää kuluissa 15929.17−15160.42=768.75€, mutta maksaa 5700€, ei sen ottaminen kannata.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
2	vuosi	p%	kk%	tammi	helmi	maalis	huhti	touko	kesä	heinä	elo	syys	loka	marras	joulu	
3	1	2.40	0.2000	100000.00	99166.67	98333.34	97500.01	96666.68	95833.35	95000.02	94166.69	93333.36	92500.03	91666.70	90833.37	
4	2	2.50	0.2083	90000.00	89166.67	88333.34	87500.01	86666.68	85833.35	85000.02	84166.69	83333.36	82500.03	81666.70	80833.37	
5	3	2.30	0.1917	80000.00	79166.67	78333.34	77500.01	76666.68	75833.35	75000.02	74166.69	73333.36	72500.03	71666.70	70833.37	
6	4	2.90	0.2417	70000.00	69166.67	68333.34	67500.01	66666.68	65833.35	65000.02	64166.69	63333.36	62500.03	61666.70	60833.37	
7	5	3.40	0.2833	60000.00	59166.67	58333.34	57500.01	56666.68	55833.35	55000.02	54166.69	53333.36	52500.03	51666.70	50833.37	
8	6	3.40	0.2833	50000.00	49166.67	48333.34	47500.01	46666.68	45833.35	45000.02	44166.69	43333.36	42500.03	41666.70	40833.37	
9	7	5.50	0.4583	40000.00	39166.67	38333.34	37500.01	36666.68	35833.35	35000.02	34166.69	33333.36	32500.03	31666.70	30833.37	
10	8	5.70	0.4750	30000.00	29166.67	28333.34	27500.01	26666.68	25833.35	25000.02	24166.69	23333.36	22500.03	21666.70	20833.37	
11	9	5.00	0.4167	20000.00	19166.67	18333.34	17500.01	16666.68	15833.35	15000.02	14166.69	13333.36	12500.03	11666.70	10833.37	
12	10	5.10	0.4250	10000.00	9166.67	8333.34	7500.01	6666.68	5833.35	5000.02	4166.69	3333.36	2500.03	1666.70	833.37	
13				Maksettu korko kuukausittain												
14	vuosi	p%	kk%	tammi	helmi	maalis	huhti	touko	kesä	heinä	elo	syys	loka	marras	joulu	Yhteensä
15	1	2.40	0.2000	200.00	198.33	196.67	195.00	193.33	191.67	190.00	188.33	186.67	185.00	183.33	181.67	2290.00
16	2	2.50	0.2083	187.50	185.76	184.03	182.29	180.56	178.82	177.08	175.35	173.61	171.88	170.14	168.40	2135.42
17	3	2.30	0.1917	153.33	151.74	150.14	148.54	146.94	145.35	143.75	142.15	140.56	138.96	137.36	135.76	1734.58
18	4	2.90	0.2417	169.17	167.15	165.14	163.13	161.11	159.10	157.08	155.07	153.06	151.04	149.03	147.01	1897.08
19	5	3.40	0.2833	170.00	167.64	165.28	162.92	160.56	158.19	155.83	153.47	151.11	148.75	146.39	144.03	1884.17
20	6	3.40	0.2833	141.67	139.31	136.94	134.58	132.22	129.86	127.50	125.14	122.78	120.42	118.06	115.69	1544.17
21	7	5.50	0.4583	183.33	179.51	175.69	171.88	168.06	164.24	160.42	156.60	152.78	148.96	145.14	141.32	1947.92
22	8	5.70	0.4750	142.50	138.54	134.58	130.63	126.67	122.71	118.75	114.79	110.83	106.88	102.92	98.96	1448.75
23	9	5.00	0.4167	83.33	79.86	76.39	72.92	69.44	65.97	62.50	59.03	55.56	52.08	48.61	45.14	770.83
24	10	5.10	0.4250	42.50	38.96	35.42	31.88	28.33	24.79	21.25	17.71	14.17	10.63	7.08	3.54	276.25
25															TTL	15929.17
26				Maksettu korko kuukausittain korkokaton kanssa												
27	vuosi	p%	kk%	tammi	helmi	maalis	huhti	touko	kesä	heinä	elo	syys	loka	marras	joulu	Yhteensä
28	1	2.40	0.2000	200.00	198.33	196.67	195.00	193.33	191.67	190.00	188.33	186.67	185.00	183.33	181.67	2290.00
29	2	2.50	0.2083	187.50	185.76	184.03	182.29	180.56	178.82	177.08	175.35	173.61	171.88	170.14	168.40	2135.42
30	3	2.30	0.1917	153.33	151.74	150.14	148.54	146.94	145.35	143.75	142.15	140.56	138.96	137.36	135.76	1734.58
31	4	2.90	0.2417	169.17	167.15	165.14	163.13	161.11	159.10	157.08	155.07	153.06	151.04	149.03	147.01	1897.08
32	5	3.40	0.2833	170.00	167.64	165.28	162.92	160.56	158.19	155.83	153.47	151.11	148.75	146.39	144.03	1884.17
33	6	3.40	0.2833	141.67	139.31	136.94	134.58	132.22	129.86	127.50	125.14	122.78	120.42	118.06	115.69	1544.17
34	7	4.50	0.3750	150.00	146.88	143.75	140.63	137.50	134.38	131.25	128.13	125.00	121.88	118.75	115.63	1593.75
35	8	4.50	0.3750	112.50	109.38	106.25	103.13	100.00	96.88	93.75	90.63	87.50	84.38	81.25	78.13	1143.75
36	9	4.50	0.3750	75.00	71.88	68.75	65.63	62.50	59.38	56.25	53.13	50.00	46.88	43.75	40.63	693.75
37	10	4.50	0.3750	37.50	34.38	31.25	28.13	25.00	21.88	18.75	15.63	12.50	9.38	6.25	3.13	243.75
38															TTL	15160.42

13. Polynomifunktioita (12 p.)

Tutkitaan suljetulla välillä $-1 \leq x \leq 2$ määriteltyjä polynomifunktioita $p(x)$.

13.1. Anna esimerkki tällaisesta funktiosta, jonka ainoa maksimikohta on avoimella välillä $-1 < x < 2$. (6 p.)

13.2. Anna esimerkki tällaisesta funktiosta, joka saavuttaa suurimman arvonsa välin molemmissa päätepisteissä. (6 p.)

13.1. Esimerkiksi käy alaspäin avautuva paraabeli, jonka huippu osuu välille $-1 \leq x \leq 2$.

Valitaan funktioksi $f(x)=-x^2$. Koska $f'(x)=-2x$ ja $-2x=0$ ainoastaan kohdassa $x=0$, ei funktiolla $f(x)$ ole muita ehdokkaita maksimikohdaksi. $f'(-0.5)=1>0$ ja $f'(1)=-2<0$, joten $x=0$ on maksimikohta ja $0 \in]-1,2[$.

13.2. Esimerkiksi käy ylöspäin avautuva paraabeli $y=g(x)=ax^2+bx+c$, $a>0$, jolle pätee $g(-1)=g(2)$ ja huipun x-koordinaatti on annetun välin keskellä kohdassa $x=0.5$. Ratkaistaan funktion $g(x)$ lauseke yhtälöryhmästä $\left.\begin{cases} g(2)=g(-1) \\ \frac{d}{dx}(g(x))=0 \mid x=0.5 \end{cases}\right|_{a,b,c}$, jolloin saadaan $\{a=-b, b=b, c=c\}$. Siis ainoa kriteeri on se, että $a=-b$. Valitaan $b=c=-1$, jolloin $a=1$ ja funktio on $g(x)=x^2-x-1$.

Sen kuvaaja on ylöspäin avautuva paraabeli, jonka huipun x-koordinaatti on derivaatan $g'(x)=2x-1$ nollakohtana $x=\frac{1}{2}$ yhtälöstä $2x-1=0$. Tämä on minimikohta, koska kyseessä on ylöspäin avautuva paraabeli. Nyt $g(-1)=g(2)=1$ on funktion suurin arvo välillä $[-1,2]$ ja $g(x)$ täyttää kaikki tehtävän ehdot.