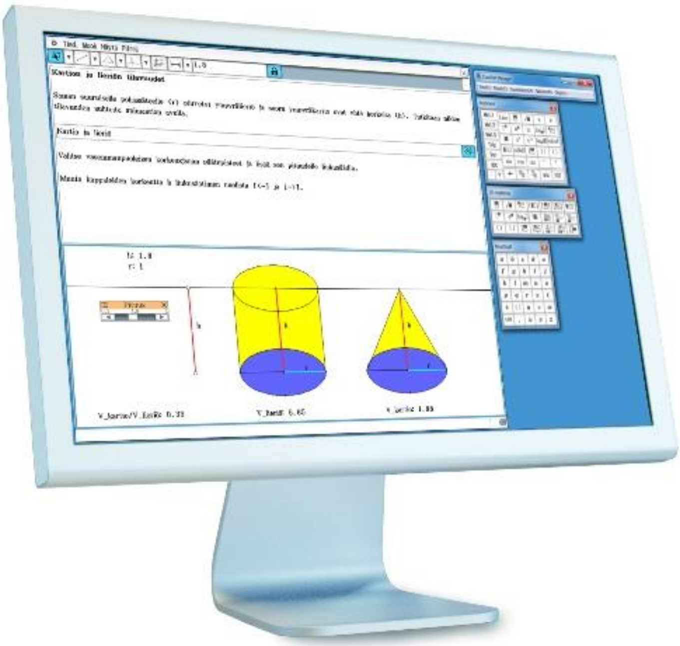
”Enemmän aikaa matematiikan opiskeluun,
vähemmän aikaa laskimen opetteluun.”

Laske Laudatur ClassPadilla

Kevät 2017 lyhyt matematiikka



Casio Scandinavia

Keilaranta 17 | 02150 Espoo | info@casio.fi

Hyvä lukija,

Kevään 2017 lyhyen matematiikan kirjoitukset olivat opiskelijoilta kerätyn kyselyn mukaan vaikeat. Peräti 87% vastaajista (1552) piti koetta melko vaativana tai aivan liian vaikeana.

(lähde: http://yle.fi/aihe/tapahtuma/2017/02/27/abitreenien-suora-lahetys-matematiikka-kevat-2017)

Tämän vihkon tehtävänä on tarjota yksi ratkaisuvaihtoehto jokaiseen tehtävään, jotta tulevat abit voivat valmistautua kirjoituksiinsa turvallisin mielin.

Ratkaisut on tehty ClassPad II Manager -ohjelmalla, joka on käytössä Abitti-kurssikokeissa ja tulevissa sähköisissä matematiikan yo-kokeissa keväällä 2019. ***Kaikki tässä esitetyt laskut ovat laskettavissa samalla tavalla laskimella ClassPad FX-CP400.*** Sekä laskin että tietokoneohjelma sopii hyvin lyhyen matematiikan opiskeluun helppoutensa ja tabletin omaisen käyttöliittymänsä vuoksi.

A-osa on laskimeton ja tämän vihkon ratkaisuissa ClassPad II Manageria onkin käytetty kirjoitusalustana vastausta tehdessä. Laskuja ei ole laskettu symbolisen laskennan keinoin, vaan vastaus on tuotettu välivaiheineen ”käsin”. Kaikki vastaukset ovat suoria kuvankaappauksia ohjelmasta – näinhän myös sähköisissä kokeissa vastataan Abitissa.

Lisää tukimateriaalia ja tämäkin vihko on ladattavissa Casion suomenkieliseltä tukisivustolta osoitteessa

http://www.casio-laskimet.fi

Sivuilta on ladattavissa myös tehtävien ratkaisut .xcp-tiedostoina, jolloin laskut aukeavat suoraan ClassPad II Manager -ohjelmaan. Tiedostot voidaan siirtää myös laskimeen, jolloin ratkaisut saadaan tutkittaviksi ja muokattaviksi myös kämmenlaitteessa FX-CP400.

Tässä esitetyt ratkaisut on kaikki tehty sovelluksessa ***eActivity***. Siinä voi vuorotella vapaasti teksti- ja laskurivien välillä sekä avata muita sovelluksia tukemaan laskuja.

Mukavia hetkiä matematiikan parissa,

Espoossa 23.3.2017 Pepe Palovaara

A-osa

Ratkaise kaikki tämän osan tehtävät 1–4. Tehtävät arvostellaan pistein 0–6. Kunkin tehtävän ratkaisu kirjoitetaan tehtävän alla olevaan ruudukkoon. Vastausta voi tarvittaessa jatkaa erillisellä puoliarkilla. Apuvälineenä saat käyttää taulukkokirjaa. Laskimen käyttö ei ole sallittua sinä aikana, kun tämä koevihko on hallussasi. Koevihko on palautettava viimeistään kolmen tunnin kuluttua kokeen alkamisesta lukion määräämällä tavalla.

1. a) Ratkaise yhtälö $2x^2 + x - 10 = 0$.

b) Kumpi on suurempi, $\sqrt{\frac{3}{2}}$ vai $\frac{4}{3}$? Perustele.

c) Sievennä lauseke $(2a + b)^2 - (2a - b)^2$, kun $ab = 2$.

MAB_A_1

a) Ratkaistaan yhtälö esim. sijoittamalla luvut a=2, b=1 ja c=−10 toisen asteen ratkaisukaavaan, jolloin

$x=\frac{-1+\sqrt{1^2-4*2*(-10)}}{2*2}$ tai $x=\frac{-1-\sqrt{1^2-4*2*(-10)}}{2*2}$

$x=\frac{-1+\sqrt{81}}{4}$ tai $x=\frac{-1-\sqrt{81}}{4}$

$x=\frac{-1+9}{4}$ tai $x=\frac{-1-9}{4}$

$x=2$ tai $x=-\frac{5}{2}$

Vastaus: $x=2$ tai $x=-\frac{5}{2}$

b) Alkuperäisillä luvuilla on sama suuruusjärjestys kuin niiden neliöillä, koska luvut ovat positiivisia. Saadaan

$\sqrt{\frac{3}{2}}^{\,2}=\frac{3}{2}=\frac{27}{18}<\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}=\frac{32}{18}.$

Vastaus: $\frac{4}{3}>\sqrt{\frac{3}{2}}$.

c) Avataan ensin sulut ja sievennetään lauseke:

$(2a+b)^2-(2a-b)^2$

$=4a^2+4ab+b^2-(4a^2-4ab+b^2)$

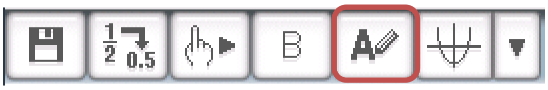
$=8ab$ | sijoitetaan $ab=2$

$=8*2$

$=16.$

Vastaus: 16.

Vinkki: eActivity-sovelluksessa ohjelma toimii matemaattisena editorina, kun näkyvissä on symboli A✎ Samaa symbolia klikkaamalla sovellus muuttuu symbolisen laskennan ohjelmaksi ja näkyvissä on ∫dx✎ .



2. a) Eräällä reitillä on 20 matkustajaa. Heistä seitsemän ostaa opiskelijalipun, viisi eläkeläislipun, ja loput kahdeksan maksavat täyden hinnan 20 euroa. Opiskelija-alennus on 50 %, ja eläkeläisalennus on 30 %. Mikä on kaikkien matkustajien maksamien lippujen keskihinta?

b) Väritä xy-koordinaatistoon se alue, jossa seuraava epäyhtälöryhmä toteutuu:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2y + 3x - 6 \geq 0. \end{cases}$$

MAB_A_2

a) Opiskelija-alennus tekee lipun hinnan 0.5-kertaiseksi, eläkeläisalennus 0.7-kertaiseksi. Lasketaan keskihinta lipulle, kun ostajia on 20:

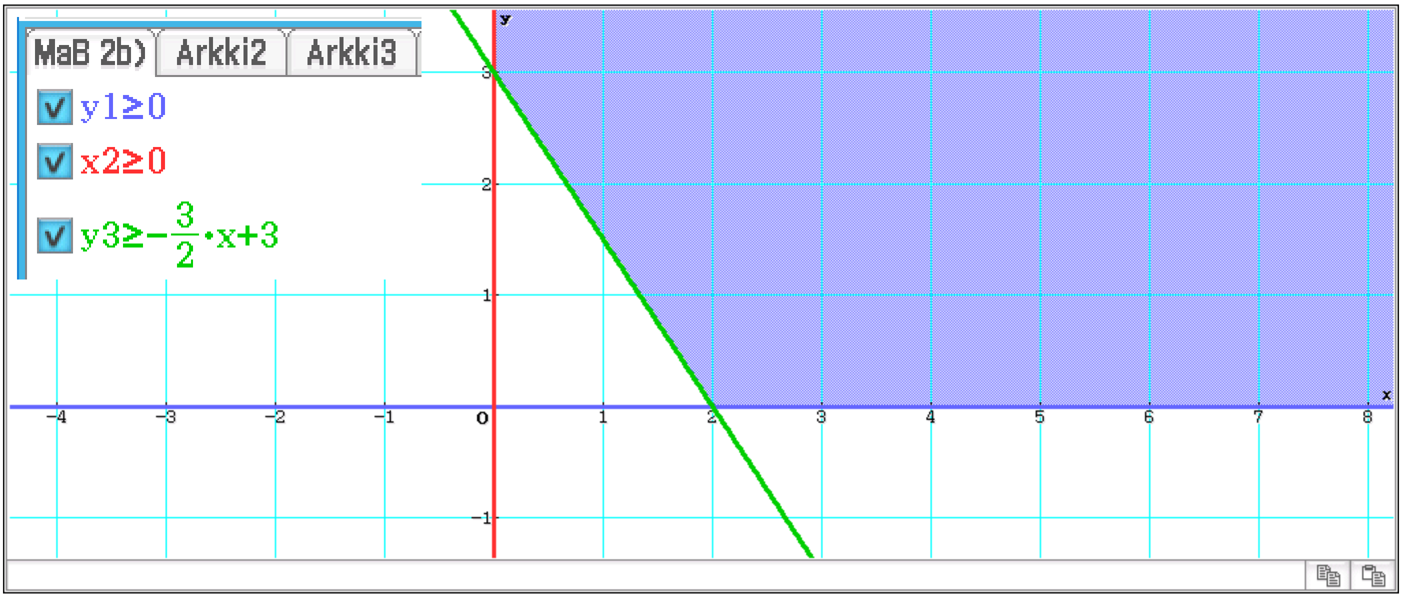
$$\frac{8*20+5*0.7*20+7*0.5*20}{20}=8+3.5+3.5=15 \text{ euroa.}$$

Vastaus: Keskihinta on 15 euroa.

b) Alue rajoittuu ensimmäiseen neljännekseen suoran 2y+3x−6=0 eli $y=-\frac{3}{2}x+3$ yläpuolelle kyseinen suora mukaanlukien.

Epäyhtälöiden leikkaus =>

Vinkki: Voit vaihtaa ehtojen unionin ja leikkauksen välillä asetuksista (mutterin kuva vasemmassa yläreunassa) > Graafin asetukset > Epäyhtälön piirto.



Tehtävä 3 ei vaatinut näkyviä laskutoimituksia, joten se ohitetaan tässä yhteydessä. Kysymykset löytyvät linkistä http://yle.fi/aihe/artikkeli/2017/02/24/2017-kevat-matematiikka-lyhyt-oppimaara YLEn abitreenien sivulta.

4. Hiihtokilpailun palkintojenjakotilaisuuteen osallistuu viisi nopeinta hiihtäjää, joilla oli kaikilla eri loppuaika. Tulospalvelu on kuitenkin pettänyt, eikä kukaan tiedä kilpailijoiden oikeaa järjestystä. Tilanteen pelastamiseksi palkintojenjakaja päättää ottaa riskin ja jakaa mitalit satunnaisesti.

a) Kuinka suurella todennäköisyydellä kaikki kolme mitalia menevät juuri oikeille kilpailijoille?

b) Kuinka suurella todennäköisyydellä mitalikolmikko on oikea? Mitalien järjestys saa siis olla väärä.

MAB_A_4

a) Koska mitalit jaetaan satunnaisesti, on kyseessä riippumattomien tapahtumien kertolasku. P("Kaikki mitalit jaetaan oikein") $=\frac{1}{5}*\frac{1}{4}*\frac{1}{3}=\frac{1}{60}$.

Vastaus: $\frac{1}{60}$

b) a-kohtaan verrattuna todennäköisyys on 3! kertaa suurempi, koska 3 mitalia voidaan jakaa 3! eri tavalla. $\frac{3!}{60}=\frac{6}{60}=\frac{1}{10}$.

Vastaus: $\frac{1}{10}$

B1-osa Ratkaise kolme tehtävistä 5–9.

5. a) Elina on lähdössä työmatkalle Norjaan. Hän vaihtaa aamulla 120 euroa Norjan kruunuiksi alla olevan taulukon kurssilla. Sen jälkeen hän saa kuitenkin tiedon matkan peruuntumisesta. Kuinka monta euroa Elina jää tappiolle, kun hän käy vaihtamassa samassa valuutanvaihtopisteessä kruunut takaisin euroiksi taulukon kurssilla? Yhtiö ei peri vaihtamisesta erillistä palkkiota.

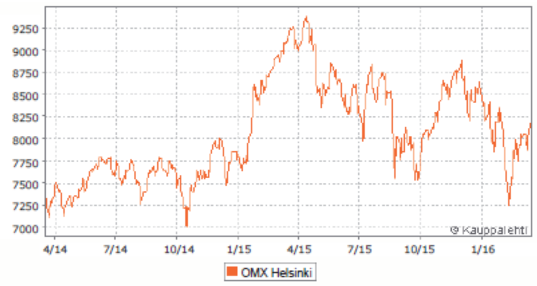
Yhden euron arvo Norjan kruunuina, setelikurssi

Osto	Myynti
9,8605 NOK	9,3565 NOK

Lähde (kuvat): <wikipedia.org>. Luettu 16.3.2016.

b) Vuonna 2015 Helsingin pörssi heilahteli voimakkaasti. OMXH-indeksi, joka kuvaa pörssiyhtiöiden kokonaismarkkina-arvoa, vaihteli vuosineljänneksittäin alla olevan taulukon osoittamalla tavalla. Mikä oli indeksin kokonaismuutos vuoden 2015 aikana, ja mihin suuntaan?

Ajanjakso	Muutos prosenteissa
1. neljännes	+16,19
2. neljännes	−8,10
3. neljännes	−7,25
4. neljännes	+11,89



Lähde (kuva): <kauppalehti.fi>. Luettu 16.3.2016.

MAB_B1_5

a) Elina jää tappiolle suoraan valuuttakursseilla laskettuna
120-(120*9.3565/9.8605)

6.133563207

Vastaus: Elina jää tappiolle 6.13EUR.

Kommentti: Valuuttaa vaihdetaan todellisuudessa vain kohdevaluutan seteleihin ja vaihtamatta jääneet rahat palautetaan euroissa. Norjan kruunuista pienin vaihdettava seteli on yleisesti 100NOK, joten Elina saisi 11kpl 100NOK seteleitä yhteisarvona 1100NOK mikä maksaisi hänelle 1100/9.3565≈117.60EUR ja vaihtamatta jäisi siis 2.40EUR. Takaisinvaihdossa Elina saisi 1100/9.8605≈111.60EUR. Tällöin tappiota vaihdoissa tulee 120-(111.60+2.40)=6.00EUR.

b) Muutetaan indeksipisteet prosenttikertoimiksi, jolloin niiden tulo kuvaa kokonaismuutosta:
1.1619*0.919*0.9275*1.1189

1.108126792

Vastaus: Kokonaismuutos oli n. 10.81% kasvua.

6. Uima-allas on 25 m pitkä ja 10 m leveä. Se syvenee tasaisesti pituussuunnassa ja on matalassa päässä 1,1 m ja syvässä päässä 3,0 m syvä. Uima-altaan sisäpinta (seinät ja pohja) on tarkoitus laatoittaa 30 cm × 20 cm kokoisilla laatoilla, joita myydään 30 laatan laatikoissa.

Arvioi, kuinka monta laattalaatikkoa täytyy ostaa altaan laatoittamista varten.

Tehtävässä ei tarvitse ottaa huomioon laattojen väliin jäävien saumojen pinta-alaa eikä sitä, että osaa laatoista joudutaan leikkaamaan, jolloin koko laatan pinta-alaa ei voida hyödyntää.

MAB_B1_6

Koska saumoja ja laattojen leikkauksia ei oteta huomioon, riittää laattojen lukumäärän laskemiseksi selvittää altaan sisäosan pinta-ala ja jakaa se yhden laatan pinta-alalla:

$$\frac{1.1*10+3.0*10+2*25*\frac{1.1+3.0}{2}+\sqrt{1.9^2+25^2}*10}{0.3*0.2}$$

6570.349341

missä

$1.1*10$ on matalan päädyn pinta-ala,

$3.0*10$ on syvän päädyn pinta-ala,

$25*\frac{1.1+3.0}{2}$ on yhden pitkän sivun pinta-ala,

$\sqrt{1.9^2+25^2}*10$ on pohjan pinta-ala. Alaspäin viettävän särmän pituus saadaan Pythagoraan lauseella.

Laatikoita tarvitaan tällöin vähintään 6571 laatan ostamiseksi

$$\frac{6571}{30}$$

219.0333333

eli vähintään 220 kpl

Vastaus: Laatikoita tarvitaan 220 kpl.

7. a) Lieriön muotoinen Jättikynttilä on 100 cm pitkä, ja se palaa loppuun 450 tunnissa. Määritä sellaiset luvut k ja b, että lauseke $y = kt + b$ esittää kynttilän korkeutta y, kun se on palanut ajan t. Korkeus y ilmaistaan senttimetreinä ja aika t tunteina.

b) Design-kynttilän korkeus riippuu puolestaan ajasta lausekkeen $y = 120 - 0{,}005t^2$ mukaisesti, kun y ja t ovat kuten a-kohdassa. Design-kynttilä ja Jättikynttilä sytytetään samanaikaisesti. Milloin ne ovat yhtä pitkiä?

MAB_B1_7

a) Vakio b kertoo kynttilän korkeuden ajan hetkellä t=0 eli 100=k*0+b, josta b=100. Sijoitetaan t=450, jolloin kynttilän korkeus y=0 eli kynttilä on palanut loppuun. Saadaan yhtälö, josta voidaan ratkaista kerroin k:

solve(0=k*450+100,k)

$$\left\{k=-\frac{2}{9}\right\}$$

Vastaus: b=100 ja $k=-\frac{2}{9}$.

b) Asetetaan kynttilöiden korkeudet y samoiksi, jolloin saadaan ratkaistavaksi yhtälö ajan suhteen, t>0:

solve$(120-0.005t^2=-\frac{2}{9}*t+100,t)|t>0$

{t=89.25823613}

Vastaus: Kynttilät ovat yhtä pitkät n. 89,3 tunnin kuluttua tai kun molemmat ovat palaneet loppuun eli 450 tunnin kuluttua.

8. Tehtaalla valmistettavien hiustenkuivaajien maksimiteho on normaalijakautunut. Jakauman keskiarvo on 1 453 wattia ja keskihajonta on 37,2 wattia.

Valmistusprosessin uudistuksen jälkeen vastaavat arvot ovat 1 467 ja 10,5 wattia. Ulkoisesti hiustenkuivaajat eivät ole muuttuneet.

Tehtaan korjaustyöpajalla mitataan mm. korjattavan hiustenkuivaajan maksimiteho. Millä maksimitehon arvolla on yhtä todennäköistä, että hiustenkuivaaja on tehty vanhalla valmistusprosessilla, kuin se, että se on tehty uudella valmistusprosessilla?

MAB_B1_8

Ratkaistaan ClassPadin avulla, millä tehon arvolla kuivaajien normaalijakaumien kertymäfunktiot antavat saman arvon. Arvon on oltava pienempää keskiarvoa suurempi, koska keskiarvoon asti molempien jakaumien todennäköisyys on 50%:

solve(normCDf(0,x,37.2,1453)=normCDf(0,x,10.5,1467),x)|x>1453

{x=1472.505618}

Vastaus: Todennäköisyydet ovat samat, kun maksimiteho on n. 1473 wattia.

Kommentti: Sama lasku voidaan ratkaista myös normituskaavojen avolla. Asetetaan ratkaistava tehon arvo x yhtä monen hajonta-askeleen päähän keskiarvosta:

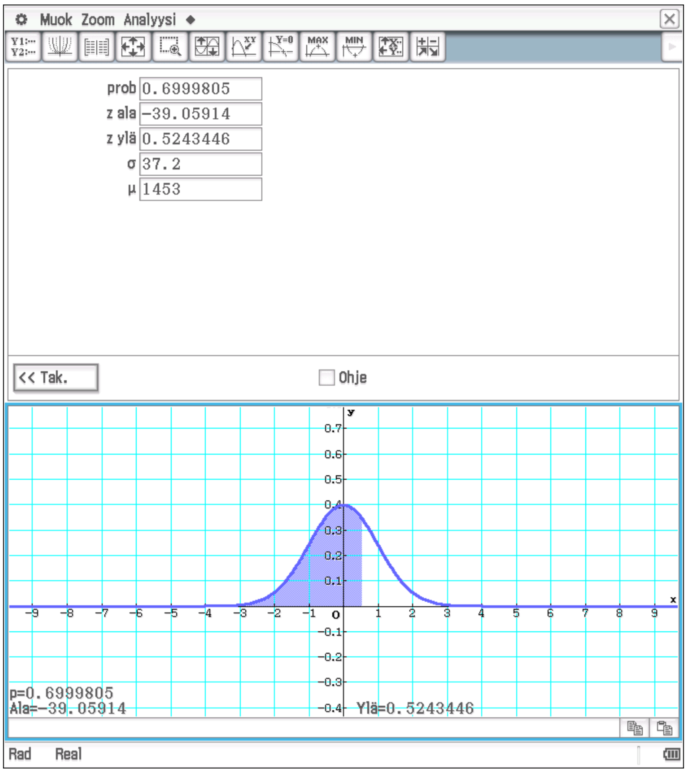
$$\text{solve}\left(\frac{x-1453}{37.2}=\frac{x-1467}{10.5},x\right)$$

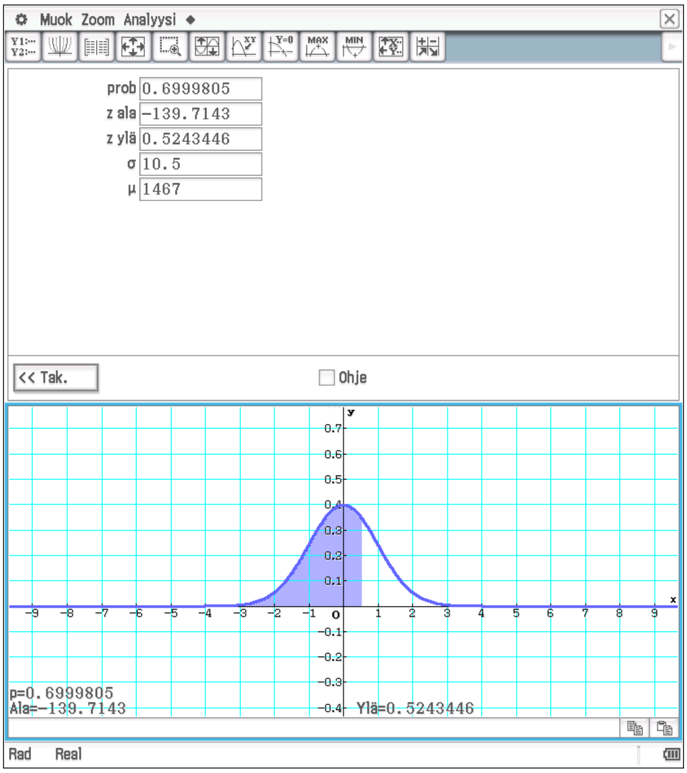
{x=1472.505618}

Totea graafisesti =>

Vinkki: Avaa taulukkolaskentasovellus ja valitse Laske > Jakauma > Normaali CD. Syötä alarajaksi 0, ylärajaksi edellä ratkaistu 1472.505618, keskihajonnaksi 37.2 ja keskiarvoksi 1453. Saat normitetut arvot ja vasemman yläreunan kuvakkeesta myös normitetun normaalijakauman kuvaajan.

Voit palata takaisin ja muuttaa keskihajonnan ja -arvon vastaamaan prosessin uudistuksen jälkeistä tilannetta (10.5 ja 1467) ja havaita, että todennäköisyys on sama kuin edellä.





9. Golden Gate -siltaa San Franciscossa kannattaa kaksi sillan päädyissä oleviin torneihin kiinnitettyä kaapelia. Profiilikuvassa (eli sivulta katsottuna) kaapeli on paraabelin muotoinen. Tornien välinen etäisyys on 1 280 m, ja korkeusero vaijerin alimman pisteen ja tornin huipun välillä on 152 m.

a) Määritä kaapelin muotoa kuvaavan yhtälön $y = ax^2$ kerroin a, kun origo on vaijerin alimmassa pisteessä. (2 p.)

b) Määritä derivaatan avulla kulma, jossa kaapeli kohtaa tornin. (4 p.)

Lähde: <en.wikipedia.org>. Luettu 10.3.2016.

MAB_B1_9

a) Sijoitetaan paraabelin tornin huipun koordinaatit paraabelin yhtälöön ja ratkaistaan kerroin a:

$\mathrm{solve}\left(152=a*\left(\frac{1280}{2}\right)^2, a\right)$

$$\left\{a=\frac{19}{51200}\right\}$$

Vastaus: $a=\frac{19}{51200}$.

b) Tangentin jyrkkyys on funktion derivaatta halutussa pisteessä.

$\frac{d}{dx}\left(\frac{19}{51200}*x^2\right)|x=640$

$$\frac{19}{40}$$

Tangentin suuntakulma on

$\tan^{-1}\left(\frac{19}{40}\right)$

$$25.40771811$$

ja kaapeli kohtaa tornin kulmassa

$90°-25.40771811°$

$$64.59228189$$

Vastaus: Kaapeli kohtaa tornin n. 64.6° kulmassa.

Kommentti: Paraabelin yhtälö ja puuttuva kerroin a voidaan ratkaista myös taulukkolaskennan avulla. Sovitetaan kolmeen paraabelin pisteeseen 2. asteen regressioyhtälö:

Taulukkolaskenta => Maalaa solut A2:B4 ja valitse Laske > Regressio > 2. asteen regressio.

	A	B
1	x–koordinaatti	y–koordinaatti
2	−640	152
3	0	0
4	640	152

2. asteen regr
$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$

a = 3.7109E-4

b = 0

c = 0

$r^2 = 1$

Vinkki: Voit avata eActivity-sovellukseen muita ClassPadin sovelluksia omiksi vöikseen. Vyö aukeaa ja sulkeutuu koskemalla sen symboliin vyön oikeassa reunassa.

B2-osa Ratkaise kolme tehtävistä 10–13.

10. Suomalaisten kotitalouksien talletusten kokonaisarvo oli 80 778 000 000 euroa vuoden 2015 lopussa. Näiden talletusten keskimääräinen korko oli 0,32 %. Valtiovarainministeriö yrittää arvioida talletusten koroista saatavan vuoden 2017 lähdeveron suuruutta seuraavien oletusten pohjalta: kotitalouksien talletusten arvo nousee vuoden 2016 loppuun mennessä 1,5 % ja edelleen 1,0 % vuoden 2017 loppuun mennessä. Lisäksi arvioidaan, että keskikorko laskee 0,05 prosenttiyksikköä kumpanakin vuonna.

Kuinka paljon Suomen valtio saa tämän arvion perusteella talletusten koroista perittävää lähdeveroa vuodelta 2017, kun lisäksi oletetaan, että lähdeveroprosentti on koko ajan 30? Anna vastaus miljoonan euron tarkkuudella.

MAB_B2_10

Valtio saa 30% talletusten koroista lähdeverona:

0.30*1.015*1.010*80778000000*(0.0032-0.0005-0.0005)

54654314.02

missä

1.015*1.010*80778000000 on odotus talletusten määrälle vuonna 2017 ja

(0.0032-0.0005-0.0005) on odotus keskikorolle vuonna 2017.

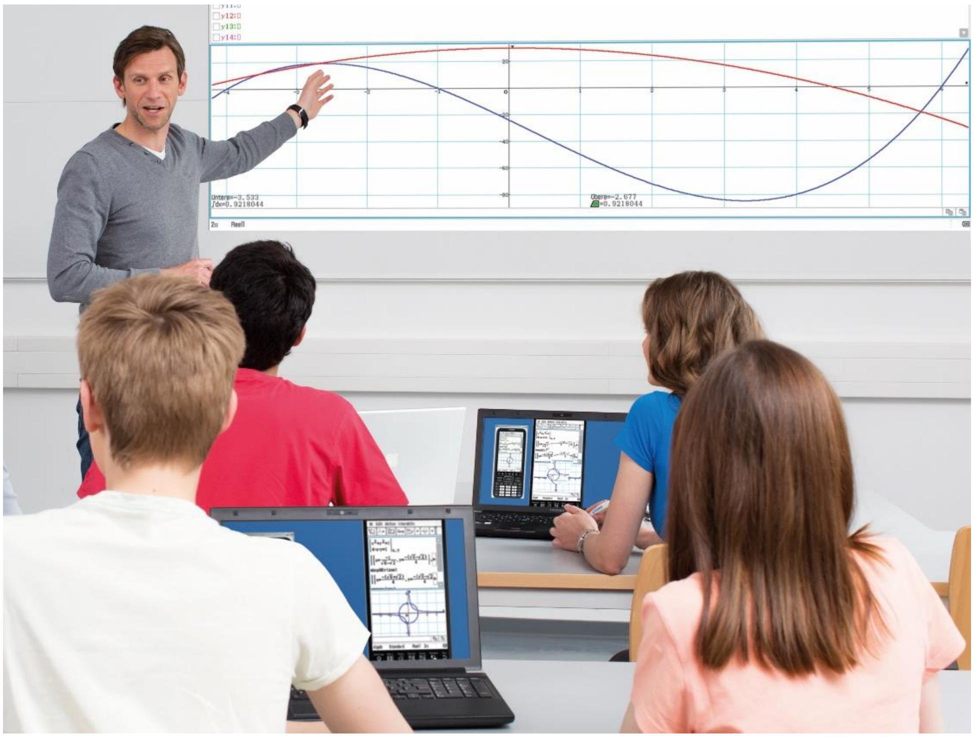
Vastaus: Valtio voi arvioida saavansa n. 55 miljoonaa euroa.

Vinkki: Voit käyttää ClassPad II Manageria joko laskimen näköisenä tai koko ruudun kokoisena.

Työkalut muuttuvat aktiivisen ikkunan mukaan ja perustyökalut ovat vapaasti siirrettävissä liikkuvina paletteina.

Oikean hiiren napin valikosta voit muuttaa näkymää kiinteän ja mukautetun välillä.

Ohjelma tukee sekä tietokoneen että laskimen avulla opiskelevia.



11. Maakellarin sisälämpötila vaihtelee hitaasti vuodenaikojen mukaan. Alin lämpötila 2 °C saavutetaan helmi-maaliskuun vaihteessa, ja ylin lämpötila 8 °C saavutetaan elo-syyskuun vaihteessa. Oletetaan, että lämpötilan vaihtelua voidaan kuvata sinikäyrällä. Määritä sellaiset parametrien A, B, c ja t_0 arvot, että lämpötila T saadaan kaavalla

$$T = A + B\sin\big(c(t + t_0)\big),$$

kun ajan t yksikkönä on kuukausi. Tehtävässä kaikki kuukaudet voidaan olettaa yhtä pitkiksi.

MAB_B2_11

Amplitudi on vaihteluvälin puolikas eli $B=\frac{8-2}{2}=3$.

Koska sinifunktio on jaksollinen ja jakson pituus on 2π, niin vuoden mittaisessa vaihtelussa pitää jakson olla $\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}=c$. Näin saadaan ratkaistua argumentin kerroin.

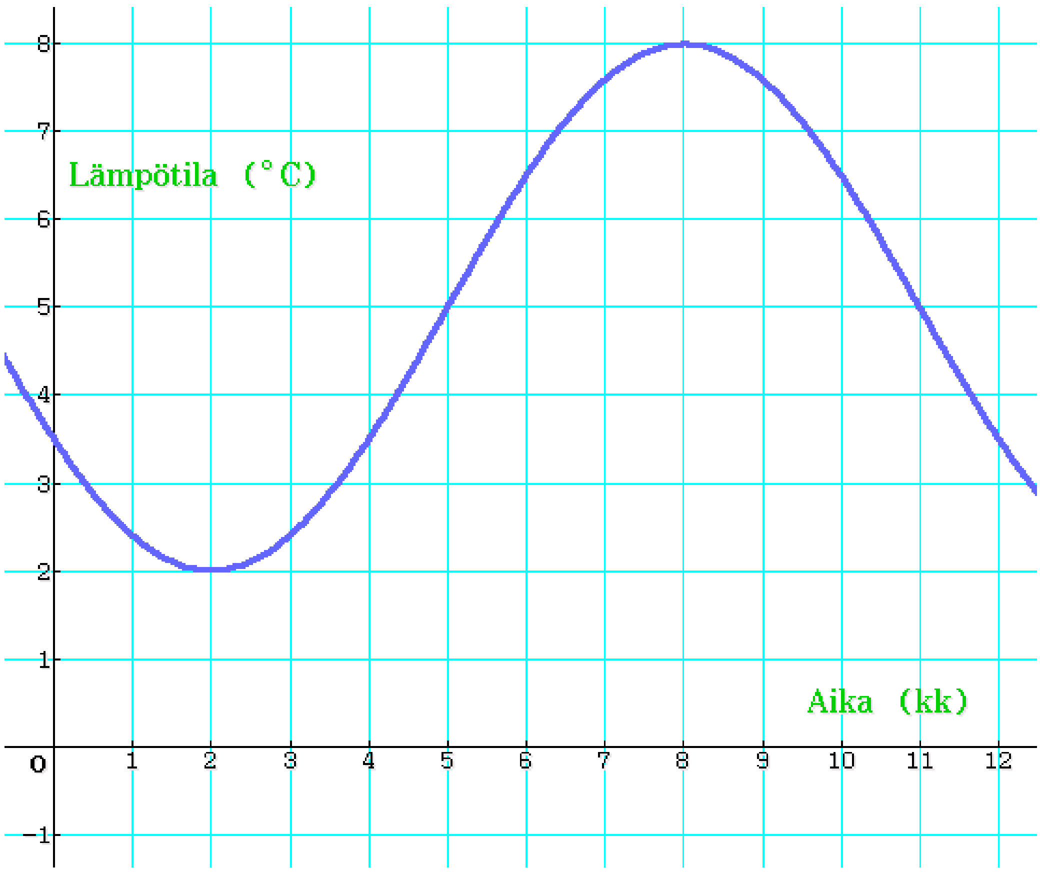
Sinifunktio on suurin, kun kulma on $\frac{\pi}{2}$ ja pienin, kun kulma on $\frac{3\pi}{2}$. Suurin arvo pitää saadaa 8. kuukautena ja pienin arvo 2. kuukautena. Näistä ehdoista saadaan ratkaistua argumentissa olevan parametrin t_0 suuruus:

solve$(\frac{\pi}{6}*(8+t_0)=\frac{\pi}{2}, t_0)$

$\{t_0=-5\}$

Vakio A säätää käyrää ylä–alasuunnassa. A valitaan niin, että käyrän arvot sopivat ylimmän ja alimman arvon väliin. Koska B=3, niin A−3=2 ja A+3=8 eli A=5.

Vastaus: Parametrit ovat A=5, B=3, $c=\frac{\pi}{6}$ ja $t_0=-5$.



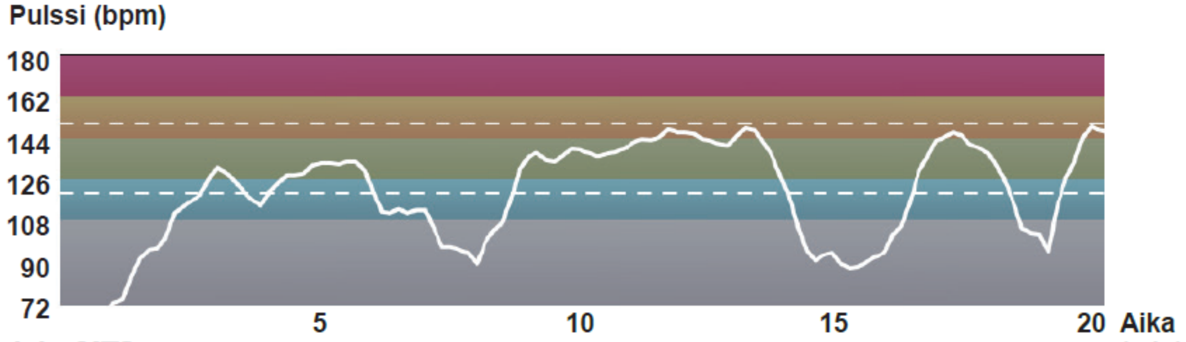
12. Kalle ja Leena tekevät Biofysiikan perusteet -kurssin harjoitustyötä. He ovat mitanneet koehenkilön pulssin $f(t)$ urheilusuorituksen aikana hetkellä t. Tuloksena on alla oleva käyrä. Mittalaitteisto siirtää tulokset digitaalisessa muodossa langattomasti suoraan Kallen ja Leenan käyttämään tietokoneeseen.

Kallen ja Leenan tehtävänä on ohjelmoida tietokone laskemaan automaattisesti, kuinka monta paikallista minimikohtaa pulssikäyrässä on. Kalle ehdottaa funktion derivaatan nollakohtien etsimistä. Leenan mukaan tämä toimii joskus, kuten tapauksessa $t = 15{,}2$ min, mutta ei aina, esimerkiksi silloin, kun $t = 19{,}3$ min.

a) Onko $f'(16)$ positiivinen vai negatiivinen? Perustele ja selitä sanallisesti, mitä vastaus tarkoittaa.

b) Kuvaile sanallisesti, mitä tiedät derivaatan ja funktion minimin välisestä yhteydestä.

c) Arvioi Kallen ehdotusta paikallisten minimikohtien löytämiseksi sekä Leenan esittämää huomiota.



Lähde: YTL

MAB_B2_12

a) f'(16) on positiivinen, koska syke on kasvamassa 16 minuutin harjoituksen kohdalla.

b) Jos derivaatan voi laskea pisteessa x=a ja derivaattafunktio vaihtaa samaisessa kohdassa merkkinsä negatiivisesta positiiviseksi, niin funktio muuttaa kulkunsa laskevasta kasvavaksi ja kohta x=a on funktion paikallinen minimikohta.

Funktion minimiarvo voi löytyä myös kohdasta, jossa derivaattaa ei voi laskea. Tällöin funktion minimiä ei voi päätellä tai laskea derivaatan avulla.

c) Leenan huomioimassa kohdassa t=15.2 minuuttia, funktio muuttuu vähenevästä kasvavaksi ja derivaatan nollakohta antaa paikallisen minimikohdan.

Sen sijaan kohdassa t=19.3 minuuttia funktion kuvaajassa näyttää olevan kulma (terävä kärki). Tällaisessa pisteessä on selvästi paikallinen pienin arvo, mutta derivaatan arvoa siinä ei välttämättä voi laskea. Tangentilla ei ole yksikäsitteistä jyrkkyyttä tällaisessa pisteessä. Myös harjoituksen aloitushetki tai lopetushetki voi olla paikallinen minimikohta, mutta ei ratkaistavissa derivaatan avulla.

Eihän Kalle aivan hukassa ole, mutta nyt kannattaa kuunnella Leenaa ja korjata ohjelmointi kattamaan myös nämä ongelmakohdat.

13. Eksponentiaalista mallia voidaan käyttää monien luonnontieteen ilmiöiden kuvaamiseen.

a) Anna esimerkki ilmiöstä, jonka kuvaamiseen malli soveltuu.

b) Anna esimerkki ilmiöstä, jonka kuvaamiseen malli ei sovellu.

Mallin soveltuvuus ja soveltumattomuus pitää perustella.

MAB_B2_13

a) Röntgensäteilyn määrä vähenee esim. 20% mennessään aina tietyn vahvuisen lyijylevyn läpi. Tällöin kyse on eksponentiaalisesta vähenemisestä, jossa kantalukuna on vähenemiskerroin 0.80 ja eksponenttina levyjen lukumäärä.

Esim. 5000 säteily-yksikköä kulkee 7 levyn lävitse ja levyistä jokainen pidättää 20% säteilyn määrästä. Läpi pääsevän säteilyn määrä on $0.8^7 * 5000$ säteily-yksikköä.

b) Aika-matka-nopeus kolmikko koostuu suoraan ja kääntäen verrannollisista suureista eikä eksponentiaalinen malli sovellu.

Esim. Nopeuden kasvaessa 6-kertaiseksi tulee aika $\frac{1}{6}$-kertaiseksi, mikäli kuljettu matka pysyy vakiona. Vastaavasti, nopeuden kasvaessa 6-kertaiseksi tulee kuljettu matka 6-kertaiseksi, mikäli kulkemiseen varattu aika pysyy vakiona.