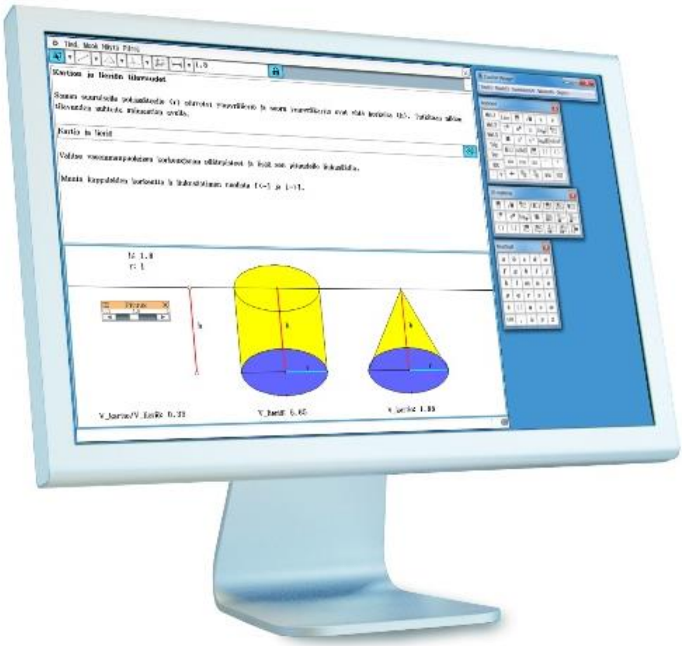
”Enemmän aikaa matematiikan opiskeluun,
vähemmän aikaa laskimen opetteluun.”

Laske Laudatur ClassPadilla

Kevät 2017 pitkä matematiikka



Casio Scandinavia

Keilaranta 17 | 02150 Espoo | info@casio.fi

Hyvä lukija,

Kevään 2017 pitkän matematiikan kirjoitukset ottivat huomioon mahdollisuuden asettaa eritasoisia kysymyksiä osioihin A, B1 ja B2. Etenkin osion B2 tehtävätyypit olivat uudentyyppisiä ja soveltavia, mutta silti niistäkin löytyi sekä vaikeita että helppoja vastattavia.

Tämän vihkon ratkaisut on tehty ClassPad II Manager -ohjelmalla, joka on käytössä Abitti-kurssikokeissa ja tulevissa sähköisissä matematiikan yo-kokeissa keväällä 2019. ***Kaikki tässä esitetyt laskut ovat laskettavissa samalla tavalla laskimella ClassPad FX-CP400.*** Kokelaathan käyttivät keväällä 2017 vielä laskimia kokeen B-osion tehtäviä ratkoessaan.

A-osa on laskimeton ja tämän vihkon ratkaisuissa ClassPad II Manageria onkin käytetty kirjoitusalustana vastausta tehdessä. Laskuja ei ole laskettu symbolisen laskennan keinoin, vaan vastaus on tuotettu välivaiheineen ”käsin”. Kaikki vastaukset ovat suoria kuvankaappauksia ohjelmasta – näinhän myös sähköisissä kokeissa vastataan Abitissa.

Lisää tukimateriaalia ja tämäkin vihko on ladattavissa Casion suomenkieliseltä tukisivustolta osoitteessa

http://www.casio-laskimet.fi

Sivuilta on ladattavissa myös tehtävien ratkaisut .xcp-tiedostoina, jolloin laskut aukeavat suoraan ClassPad II Manager -ohjelmaan. Tiedostot voidaan siirtää myös laskimeen, jolloin ratkaisut saadaan tutkittaviksi ja muokattaviksi myös kämmenlaitteessa FX-CP400.

Tässä esitetyt ratkaisut on kaikki tehty sovelluksessa ***eActivity***. Siinä voi vuorotella vapaasti teksti- ja laskurivien välillä sekä avata muita sovelluksia tukemaan laskuja. Tämänkin kokeen malliratkaisuissa on käytetty mm. geometria-sovellusta, taulukkolaskentaa ja funktioiden pikapiirtoon tarkoitettua koordinaatiston näkymää yhdessä laskurivien ja tekstirivien kanssa. Perusteleminen on suuri osa tehtävän ratkaisua.

Jokainen tehtävä on tallennettu omaksi tiedostokseen eActivityn sisällä. Tehtävät voi viedä itsenäisiksi tiedostoiksi valikosta Järjestelmä > Vie eActivities. Näin vastaukset saadaan esim. oppimisalustaan, sähköpostin liitteiksi – tai jaettaviksi opettajille nettisivujen kautta.

Antoisia hetkiä tieteiden kuningattaren parissa,

Espoossa 23.3.2017 Pepe Palovaara

A-osa

Ratkaise kaikki tämän osan tehtävät 1–4. Tehtävät arvostellaan pistein 0–6. Kunkin tehtävän ratkaisu kirjoitetaan tehtävän alla olevaan ruudukkoon. Vastausta voi tarvittaessa jatkaa erillisellä puoliarkilla. Apuvälineenä saat käyttää taulukkokirjaa. Laskimen käyttö ei ole sallittua sinä aikana, kun tämä koevihko on hallussasi. Koevihko on palautettava viimeistään kolmen tunnin kuluttua kokeen alkamisesta lukion määräämällä tavalla.

1. a) Ratkaise yhtälö $2x^2 - 7x - 4 = 0$.

b) Määritä sellaiset luvut a ja b, että yhtälö $(x+a)^2 = x^2 + 14x + b$ pätee kaikilla muuttujan x arvoilla.

c) Tarkastellaan ensimmäisen asteen polynomifunktiota $p(x) = cx + d$, jolle $p(4) = 1$ ja $p(7) = 3$. Ratkaise yhtälö $p(x) = 0$.

MAA_A_1

a) Ratkaistaan esim. neliöksi täydentämällä:

$2x^2-7x-4=0$ | jaetaan puolittain kahdella, siirretään vakio oikealle

$x^2-\frac{7}{2}x=2$ | lisätään sopiva vakio

$x^2-2*\frac{7}{4}x+\left(\frac{7}{4}\right)^2=2+\left(\frac{7}{4}\right)^2$ | täydennetään neliöksi ja yhdistetään vakiot

$\left(x-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{81}{16}$ | otetaan puolittain neliöjuuri, puolet positiiviset

$x-\frac{7}{4}=\pm\frac{9}{4}$ | muodostetaan vastaukset

$x=\frac{16}{4}=4 \lor x=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$

Vastaus: $x=4$ tai $x=-\frac{1}{2}$.

b) Polynomit ovat keskenään samat, jos ja vain jos samanasteisten termien kertoimet ovat samat. Avataan vasemman puolen sulut, jolloin yhtälö saadaan muotoon $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2=x^2+14x+b$.
Koska korkeimman asteen termit ovat puolittain samat, saadaan lopuista kertoimista yhtälöpari

$$\begin{cases} 2a=14 \\ a^2=b \end{cases}$$

josta edelleen $a=14/2=7$ ja $b=a^2=7^2=49$.
Vastaus: $a=7$ ja $b=49$.

c) Sijoittamalla ehdot polynomiin $p(x)$ saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 4c+d=1 \\ 7c+d=3 \end{cases}$$

Vähentämällä rivit toisistaan saadaan yhtälö $-3c=-2$, josta $c=\frac{2}{3}$ ja edelleen $d=1-4*\frac{2}{3}=-\frac{5}{3}$. Nyt kysytty yhtälö on $\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}=0$, josta $\frac{2}{3}x=\frac{5}{3}$ ja $x=\frac{3}{2}*\frac{5}{3}=\frac{5}{2}$.

Vastaus: $x=\frac{5}{2}$.

Tehtävä 2 ei vaatinut näkyviä laskutoimituksia, joten se ohitetaan tässä yhteydessä. Kysymykset löytyvät linkistä http://yle.fi/aihe/artikkeli/2017/02/24/2017-kevat-matematiikka-pitka-oppimaara YLEn abitreenien sivulta.

3. Olkoot $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$ ja $\bar{b} = 2\bar{i} + 5\bar{k}$. Millä parametrin $-2 \leq t \leq 2$ arvolla vektorin $\bar{c}_t = t\,\bar{a} + (1-t)\,\bar{b}$ pituus on mahdollisimman pieni?

MAA_A_3

Kysytyn vektorin pituus on

$\sqrt{(t+2(1-t))^2+(2t)^2+(3t+5(1-t))^2}$

$=\sqrt{(2-t)^2+(2t)^2+(5-2t)^2}$

$=\sqrt{4-4t+t^2+4t^2+25-20t+4t^2}$

$=\sqrt{9t^2-24t+29}$

Pituus on pienin silloin kun juurrettava on pienin, koska neliöjuuri on aidosti kasvava funktio. Merkitään $f(t)=9t^2-24t+29$ ja lasketaan sen pienin arvo, kun $-2\leq t\leq 2$.

$f'(t)=18t-24=0$ jos ja vain jos $t=\frac{4}{3}$. Pienin arvo löytyy jommasta kummasta välin päätepisteestä tai vastaavalle avoimelle välille osuvasta derivaatan nollakohdasta, koska f on polynomina jatkuva funktio.

$f(-2)=9*(-2)^2-24*(-2)+29=113$

$f(2)=9*2^2-24*2+29=17$

$f\left(\frac{4}{3}\right)=9*\left(\frac{4}{3}\right)^2-24*\left(\frac{4}{3}\right)+29=13$

Vastaus: Vektorin pituus on pienin, kun $t=\frac{4}{3}$.

4. Logaritmi voidaan määritellä erilaisilla kantaluvuilla. Määritelmän mukaan $\log_a x = b$, jos $x = a^b$. Tälle a-kantaiselle logaritmille pätee kaava $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

a) Olkoot $x > 0$ ja $y > 0$. Ratkaise y yhtälöstä $\log_4 y = \log_2 x$.

b) Suorat $x = 2$, $x = 3$ ja $y = 0$ rajaavat yhdessä a-kohdan käyrän kanssa erään tasokuvion. Hahmottele tämä kuvio ja laske sen pinta-ala.

MAA_A_4

a) Saadaan seuraava ekvivalenssien ketju

$\log_4(y)=\log_2(x)$ | muutetaan kantaluvut

$\dfrac{\ln(y)}{\ln(4)}=\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$ | kerrotaan puolittain luvulla ln(4)

$\ln(y)=\dfrac{\ln(4)\ln(x)}{\ln(2)}$ | muokataan oikeaa puolta

$\ln(y)=\dfrac{\ln(2^2)\ln(x)}{\ln(2)}$ | potenssin logaritmin sääntö

$\ln(y)=\dfrac{2\ln(2)\ln(x)}{\ln(2)}$ | sievennetään oikeaa puolta

$\ln(y)=2\ln(x)$ | potenssin logaritmin sääntö

$\ln(y)=\ln(x^2)$ | samankantaiset logaritmit ovat samat, kun numerukset ovat samat

$y=x^2$

Vastaus: $y=x^2$.

b) Pinta-ala muodostuu paraabelin ja x-akselin väliin, kun $2 \le x \le 3$. Pinta-ala saadaan määrätyn integraalin avulla:

$$\int_2^3 x^2 dx=\left(\frac{1}{3}*3^3\right)-\left(\frac{1}{3}*2^3\right)=9-\frac{8}{3}=\frac{19}{3} \text{ pay.}$$

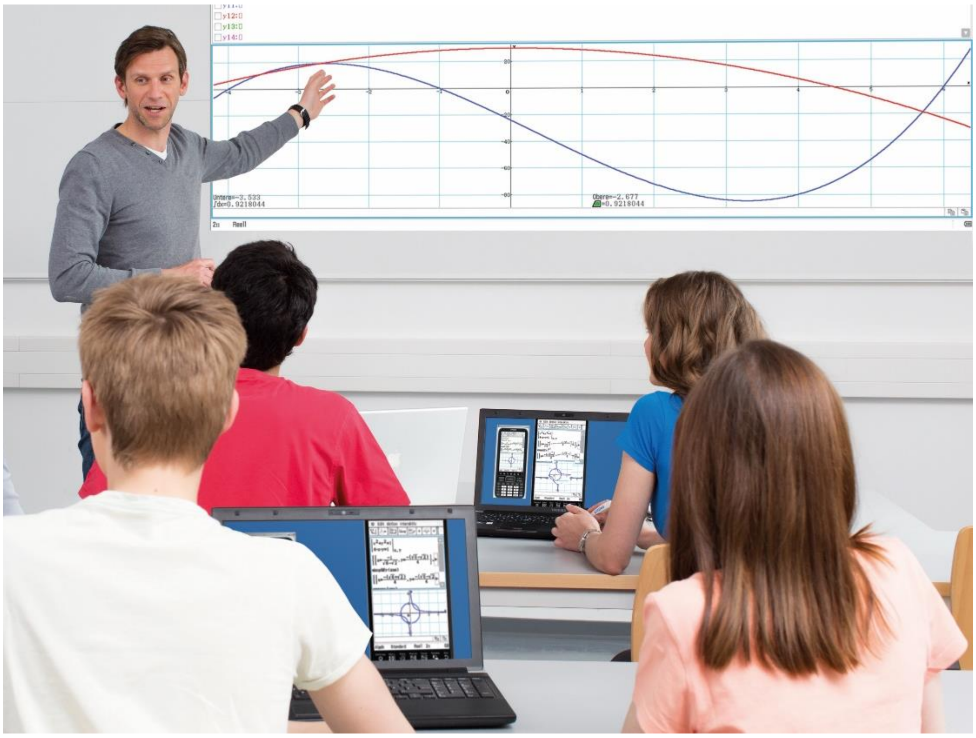
Vastaus: $\dfrac{19}{3}$ pay.

Vinkki: Voit käyttää ClassPad II Manageria joko laskimen näköisenä tai koko ruudun kokoisena.

Työkalut muuttuvat aktiivisen ikkunan mukaan ja perustyökalut ovat vapaasti siirrettävissä liikkuvina paletteina.

Oikean hiiren napin valikosta voit muuttaa näkymää kiinteän ja mukautetun välillä.

Ohjelma tukee sekä tietokoneen että laskimen avulla opiskelevia.



B1-osa Ratkaise kolme tehtävistä 5–9.

5. Tarkastellaan funktiota $f(x) = |x-1| + 1$.

a) Funktion lauseke voidaan sieventää välillä $0 \leq x \leq 1$ niin, ettei siinä esiinny itseisarvoa. Mikä on tämä sievennetty lauseke? (2 p.)

b) Funktion f kuvaaja pyörähtää x-akselin ympäri välillä $0 \leq x \leq 2$. Laske näin muodostuvan pyörähdyskappaleen tilavuus. (4 p.)

MAA_B1_5

a) Välillä 0≤x≤1 lauseke x−1 on aina nolla tai pienempi, joten |x−1|=−(x−1)=1−x ja koko funktio f(x)=1−x+1=2−x.

Vastaus: Funktion lauseke välillä 0≤x≤1 on 2−x.

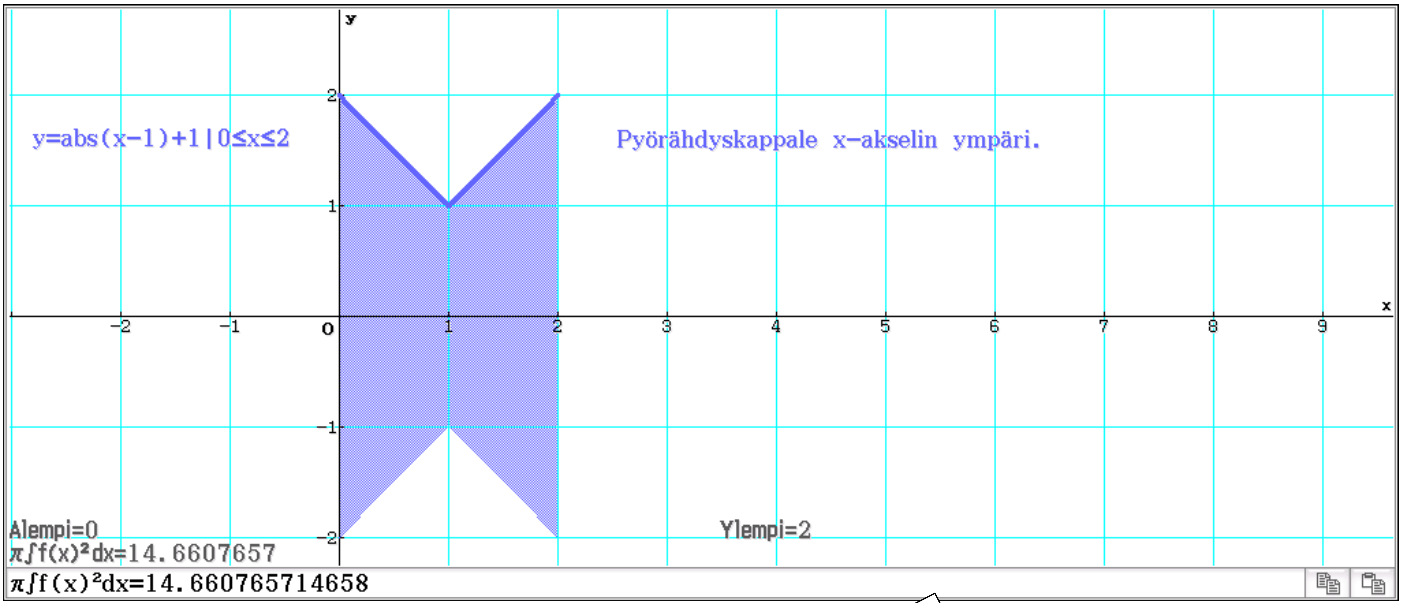
b) Koska pyörähdyskappaleen yläraja on x=2, pitää tutkia funktion f(x) lauseke a-kohdan lisäksi välillä 1<x≤2. Koska x−1 on tällä välillä aina positiivinen, on f(x)=x−1+1=x, kun 1<x≤2.

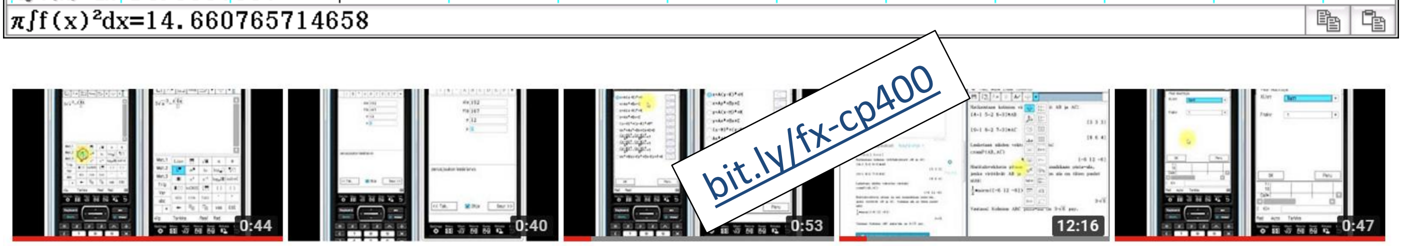
Integraalin avulla saatava pyörähdyskappaleen tilavuus pitää jakaa osiin, koska funktio saa eri lausekkeet integroimisvälillä. Tilavuudeksi saadaan

$$\pi\int_0^1 (2-x)^2 dx + \pi\int_1^2 x^2 dx$$

$$\frac{14\cdot\pi}{3}$$

Vastaus: Pyörähdyskappaleen tilavuus on $\frac{14\cdot\pi}{3}$ ty.





MAA1 symbolisen lausekkeen sieventäminen
827 näyttökertaa •

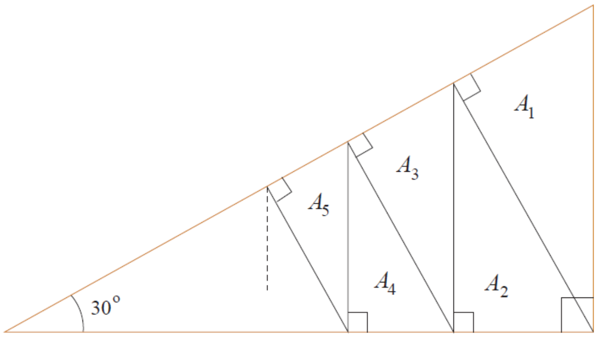
MAA6 normaalijakauma
784 näyttökertaa •
3 vuotta sitten

MAA4 ympyrän muuttaminen keskipistemuotoon ja
741 näyttökertaa •

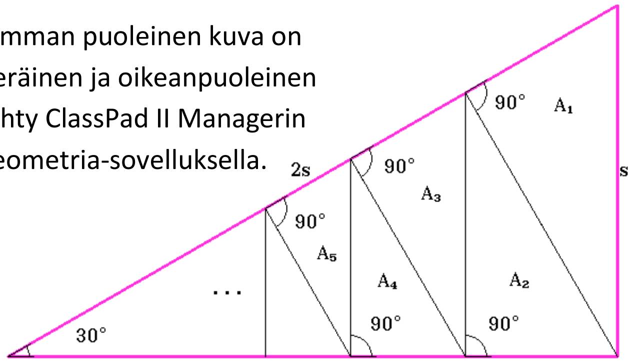
Abitti 03 kokeeseen vastaaminen
723 näyttökertaa •

MAA6 yhden muuttujan tilastolaskut
710 näyttökertaa •

6. Suorakulmaisen kolmion muotoisesta suklaalevystä lohkotaan alla olevan kuvion mukaisesti n kappaletta yhdenmuotoisia paloja, joiden pinta-alat ovat $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. Kuinka monta palaa suklaasta täytyy lohkaista, jotta palojen yhteenlasketut pinta-alat muodostavat vähintään 97 % suklaalevyn alkuperäisestä pinta-alasta?



Vasemman puoleinen kuva on alkuperäinen ja oikeanpuoleinen on tehty ClassPad II Managerin geometria-sovelluksella.



MAA_B1_6

Kaikki kolmiot A_i ovat yhdenmuotoisia sekä keskenään että alkuperäisen suklaapalasen kanssa (kk). Suklaapalaa kuvaavan suorakulmaisen kolmion hypotenuusa t esitettynä kateetin s avulla on

$\text{solve}(\sin(30°)=\frac{s}{t}, t)$

$$\{t=2\cdot s\}$$

Tämän janan vastinjana kolmiossa A_1 on sen hypotenuusa s. Koska vastinsivujen suhde on $\frac{s}{2s}=\frac{1}{2}$, niin pinta−alojen suhde on $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ ja kolmion A_1 pinta−ala on $\frac{1}{4}$ koko suklaalevyn alasta A.

Kolmion A_2 hypotenuusa on samalla kolmion A_1 pidempi kateeteista u, joka voidaan esittää s:n avulla

$\text{solve}(\cos(30°)=\frac{u}{s}, u)$

$$\left\{u=\frac{\sqrt{3}\cdot s}{2}\right\}$$

Vastaavasti, kolmion A_3 hypotenuusa v on kolmion A_2 pidempi kateetti. Lausuttuna s:n avulla se on

$\text{solve}\left(\cos(30°)=\frac{v}{\frac{\sqrt{3}\cdot s}{2}}, v\right)$

$$\left\{v=\frac{3\cdot s}{4}\right\}$$

Huomataan, että kolmioiden A_i hypotenuusat muodostavat suppenevan geometrisen jonon suhdelukuna $\frac{\sqrt{3}}{2}$, jolloin niiden pinta−alat muodostavat suppenevan geometrisen jonon suhdelukuna $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$.

Muodostetaan epäyhtälö, jossa yhteenlaskettujen pinta−alojen A_i osuus koko levyn pinta−alasta A on vähintään 97%. Merkitään lohkaistavien palojen määrää n, jolloin epäyhtälö on $\frac{\frac{A}{4}*\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{1-\left(\frac{3}{4}\right)}>0.97A$. Epäyhtälö voidaan jakaa puolittain pinta-alalla A>0. Lohkaistavien palojen määrä n saadaan ratkaistua epäyhtälöstä

$$\text{solve}\left(\frac{\frac{1}{4}*\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\right)}{1-\left(\frac{3}{4}\right)}>0.97,n\right)$$

{n>12.18900388}

Vastaus: Paloja pitää lohkaista vähintään 13 kpl.

7. Suunnittele sellainen suoran lieriön muotoinen juomalasi, jonka pohjan paksuus on 5,0 mm, seinämän paksuus 2,0 mm, vetoisuus 2,0 dl ja jonka valmistamiseen tarvitaan mahdollisimman vähän lasia. Ilmoita lasin korkeus ja ulkopuolelta mitattu pohjan halkaisija.

Lähde: <https://www.prisma.fi/>. Luettu 8.4.2016.

MAA_B1_7

Merkitään juomalasin sisälle muodostuvaa sädettä r, jolloin ulkosäde on r+0.2 cm. Merkitään sisälle muodostuvaa korkeutta h, jolloin koko korkeudeksi saadaan h+0.5 cm.

Nyt tilavuuden ehdosta voidaan ratkaista toinen muuttujista r ja h. Tässä on ratkaistu h:

$\text{solve}(\pi*r^{2}*h=200,h)$

$$\left\{h=\frac{200}{r^{2}\cdot\pi}\right\}$$

Tarvittavan lasin määrää (cm^3) kuvaa lauseke $\pi*(r+0.2)^{2}*(h+0.5)-200$. Sijoitetaan aiemmin saatu h:n arvo lasin määrän funktioon, jolloin saadaan yhden muuttujan funktio f(r):

$\text{Define } f(r)=\pi*(r+0.2)^{2}*\left(\frac{200}{r^{2}\cdot\pi}+0.5\right)-200$

done

Laskussa voi käyttää likiarvoja. Lasin määrää kuvaavan funktion pienin arvo, kun r>0, on

fMin(f(r),r)|r>0

{MinValue=43.62382741,r=2.942027343}

Lasin halkaisija on tällöin (cm) n.

2*(2.942027343+0.2)

6.284054686

ja lasin korkeus on

$h=\frac{200}{r^{2}\cdot\pi}+0.5|r=2.942027343$

h=7.85506836

Vastaus: Lasin ulkopuolelta mitattu pohjan halkaisija on n. 62.8 mm ja lasin korkeus n. 78.6 mm.

CASIO

8. Tehtävänä on määrittää se yhtälön

$$4x^3 + 18x^2 + 23x + 7 = 0$$

ratkaisu, joka on lähimpänä kohtaa $x = -1$. Valitse alkuarvo (esimerkiksi kuvaajan perusteella) ja laske Newtonin menetelmällä tämän ratkaisun likiarvo neljän desimaalin tarkkuudella.

MAA_B1_8

Määritellään funktio f(x) ja selvitetään sen kulku kuvaajan avulla:

Define $f(x)=4\cdot x^3+18\cdot x^2+23\cdot x+7$

done

Kuvaaja =>

Iterointi kannattaa aloittaa kohdan x=−0.5 paikkeilta. Määritellään funktion f(x) derivaattafunktio f1(x).

Define $f1(x)=\frac{d}{dx}(f(x))$

done

Lasketaan Newtonin menetelmällä likiarvoja, kunnes 5. desimaali ei enää muutu:

−0.5

−0.5

$ans-\frac{f(ans)}{f1(ans)}$

−0.4375

$ans-\frac{f(ans)}{f1(ans)}$

−0.442512275

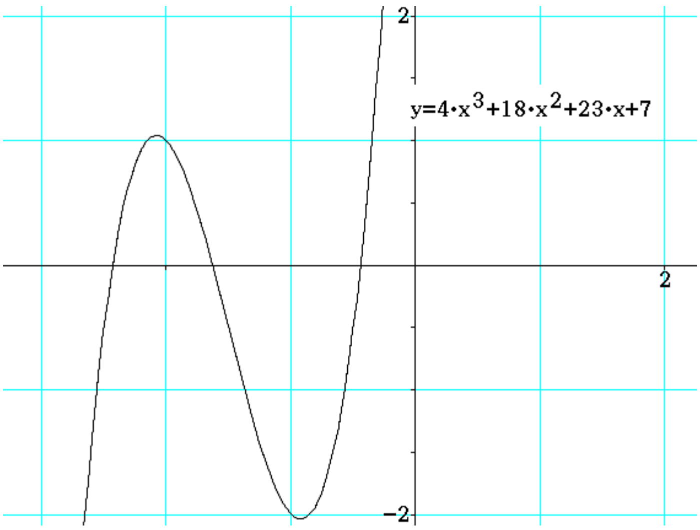
$ans-\frac{f(ans)}{f1(ans)}$

−0.4425462277

$ans-\frac{f(ans)}{f1(ans)}$

−0.4425462293

Vastaus: Kysytty juuri on n. −0.4425.



Vinkki: Newtonin menetelmän voi syöttää myös toisella tavalla.

ClassPadin laskuasetukset ovat näytön alareunassa. Tässä on laskettu likiarvoilla.

Define $f(x)=4x^3+18x^2+23x+7$

done

Define $f1(x)=\frac{d}{dx}(f(x))$

done

−0.5⇒x

−0.5

$x-\frac{f(x)}{f1(x)}|x=ans$

−0.4375

$x-\frac{f(x)}{f1(x)}|x=ans$

−0.442512275

$x-\frac{f(x)}{f1(x)}|x=ans$

−0.4425462277

Koska kolmannen asteen polynomifunktiolla on korkeintaan kolme nollakohtaa, niin voidaan perustella yllä ratkaistun juuren olevan kohtaa x=−1 lähin juuri ratkaisemalla kaksi muuta juurta. Vastaavasti Newtonin menetelmällä saadaan

-3

$$-3$$

$\text{ans}-\dfrac{f(\text{ans})}{f1(\text{ans})}$

$$-2.652173913$$

$\text{ans}-\dfrac{f(\text{ans})}{f1(\text{ans})}$

$$-2.483744738$$

$\text{ans}-\dfrac{f(\text{ans})}{f1(\text{ans})}$

$$-2.434735235$$

$\text{ans}-\dfrac{f(\text{ans})}{f1(\text{ans})}$

$$-2.430435341$$

ja

-1.5

$$-1.5$$

$\text{ans}-\dfrac{f(\text{ans})}{f1(\text{ans})}$

$$-1.625$$

$\text{ans}-\dfrac{f(\text{ans})}{f1(\text{ans})}$

$$-1.62704918$$

$\text{ans}-\dfrac{f(\text{ans})}{f1(\text{ans})}$

$$-1.627050844$$

Ratkaistu juuri on juurista lähinnä lukua x=−1, sillä $|-0.4425462293-1|<|-1.627050844-1|$.

9. Oletetaan, että p, q ja r ovat positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että luku

$$(p+q)(q+r)(r+p)$$

on parillinen.

MAA_B1_9

1°) Oletetaan, että kaikki luvuista ovat parillisia. Tällöin voidaan merkitä p=2k, q=2l ja r=2m, missä k, l, m ovat positiivisia kokonaislukuja. Väite on nyt muotoa

(p+q)(q+r)(r+p)|{p=2k, q=2l, r=2m}

$$(2\cdot k+2\cdot l)\cdot(2\cdot k+2\cdot m)\cdot(2\cdot l+2\cdot m)$$

factorOut(ans, 2)

$$2\cdot\left(4\cdot k^2\cdot l+4\cdot k^2\cdot m+4\cdot k\cdot l^2+4\cdot l^2\cdot m+4\cdot k\cdot m^2+4\cdot l\cdot m^2+8\cdot k\cdot l\cdot m\right)$$

mikä on muotoa $2n_1$, missä n_1 on positiivinen kokonaisluku. Väite on todistettu.

2°) Oletetaan seuraavaksi, että vain yksi luvuista on parillinen ja kaksi muuta parittomia. Koska väitteessä yhteenlasku on vaihdannainen, tulo on vaihdannainen ja tulossa esiintyy kaikki lukujen p, q ja r kahden alkion osajoukot, voidaan tämä tapaus yleistää kaikille lukujen p, q ja r kombinaatioille, joissa tasan yksi luvuista on parillinen.

Olkoon p=2k ja q=2l+1 ja r=2m+1, missä k, l, m ovat positiivisia kokonaislukuja. Väite on nyt muotoa

(p+q)(q+r)(r+p)|{p=2k, q=2l+1, r=2m+1}

$$(2\cdot k+2\cdot l+1)\cdot(2\cdot k+2\cdot m+1)\cdot(2\cdot l+2\cdot m+2)$$

factorOut(ans, 2)

$$2\cdot\left(4\cdot k^2\cdot l+4\cdot k^2\cdot m+4\cdot k\cdot l^2+4\cdot l^2\cdot m+4\cdot k\cdot m^2+4\cdot l\cdot m^2+8\cdot k\cdot l\cdot m+4\cdot k^2+2\cdot l^2+2\cdot m^2+8\cdot k\cdot l+8\cdot k\cdot m+8\cdot l\cdot m+4\cdot k+3\cdot l+3\cdot m+1\right)$$

mikä on muotoa $2n_2$, missä n_2 on positiivinen kokonaisluku. Väite on todistettu.

3°) Oletetaan, että tasan kaksi luvuista on parillisia ja yksi pariton. Kuten aiemminkin, valituilla luvuilla ei ole merkitystä vaihdannaisuuden vuoksi.

Olkoon p=2k ja q=2l ja r=2m+1, missä k, l, m ovat positiivisia kokonaislukuja. Väite on nyt muotoa

(p+q)(q+r)(r+p)|{p=2k, q=2l, r=2m+1}

$$(2\cdot k+2\cdot l)\cdot(2\cdot k+2\cdot m+1)\cdot(2\cdot l+2\cdot m+1)$$

factorOut(ans, 2)

$$2\cdot\left(4\cdot k^2\cdot l+4\cdot k^2\cdot m+4\cdot k\cdot l^2+4\cdot l^2\cdot m+4\cdot k\cdot m^2+4\cdot l\cdot m^2+8\cdot k\cdot l\cdot m+2\cdot k^2+2\cdot l^2+4\cdot k\cdot l+4\cdot k\cdot m+4\cdot l\cdot m+k+l\right)$$

mikä on muotoa $2n_3$, missä n_3 on positiivinen kokonaisluku. Väite on todistettu.

4°) Oletetaan lopuksi, että kaikki luvuista ovat parittomia.

Olkoon p=2k+1 ja q=2l+1 ja r=2m+1, missä k, l, m ovat positiivisia kokonaislukuja. Väite on nyt muotoa

(p+q)(q+r)(r+p)|{p=2k+1, q=2l+1, r=2m+1}

$$(2\cdot k+2\cdot l+2)\cdot(2\cdot k+2\cdot m+2)\cdot(2\cdot l+2\cdot m+2)$$

factorOut(ans, 2)

$$2\cdot\left(4\cdot k^2\cdot l+4\cdot k^2\cdot m+4\cdot k\cdot l^2+4\cdot l^2\cdot m+4\cdot k\cdot m^2+4\cdot l\cdot m^2+8\cdot k\cdot l\cdot m+4\cdot k^2+4\cdot l^2+4\cdot m^2+12\cdot k\cdot l+12\cdot k\cdot m+12\cdot l\cdot m+8\cdot k+8\cdot l+8\cdot\right.$$

mikä on muotoa $2n_4$, missä n_4 on positiivinen kokonaisluku. Väite on todistettu.

Tapausten **1°)**, **2°)**, **3°)** ja **4°)** nojalla väite on todistettu oikeaksi kaikille positiivisille kokonaisluvuille p, q ja r.

B2-osa Ratkaise kolme tehtävistä 10–13.

10. Tiedetään, että $h(x) = g(f(x))$, $f(x) = e^x$ ja $g(x) = 2x^2 + 1$. Elmeri ja Uolevi laskevat derivaatan $h'(x)$ seuraavalla tavalla:

Elmerin ratkaisu:	Uolevin ratkaisu:
$f(x) = e^x$ $g'(x) = 4x$ joten $h'(x) = g'(f(x)) = 4e^x$	$h(x) = g(f(x)) = 2(e^x)^2 + 1 = 2e^{x^2} + 1$ $h'(x) = 2e^{x^2} \cdot (2x)$ joten $h'(x) = 4xe^{x^2}$

Mari saa laskimella vastaukseksi $4e^{2x}$. Kenen vastaus on oikein? Etsi väärien ratkaisujen virheet ja esitä korjatut ratkaisut.

MAA_B2_10

Aloitetaan määrittelemällä funktiot:

Define $f(x)=e^{x}$

done

Define $g(x)=2x^2+1$

done

Define $h(x)=g(f(x))$

done

$h(x)$

$2\cdot e^{2\cdot x}+1$

ja derivoidaan yhdistetty funktio h(x):

$\frac{d}{dx}(h(x))$

$4\cdot e^{2\cdot x}$

Marin ratkaisu on oikein.

Elmerin ratkaisussa derivaatasta puuttuu sisäfunktion derivaatalla kertominen ja viimeisen rivin pitäisi olla $h'(x)=g'(f(x))f'(x)=4e^{x}*e^{x}=4e^{2x}$.

Uolevin ratkaisussa on potenssin potenssin laskuvirhe ensimmäisellä rivillä ja sen pitäisi olla $h(x)=g(f(x))=2(e^{x})^2+1=2e^{2x}+1$, jolloin $h'(x)=4\cdot e^{2\cdot x}$.

bit.ly/Abitti-Casio

1 

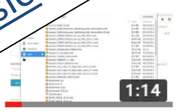
Abitti 01 kokeen tekeminen
fx-CP400

2 

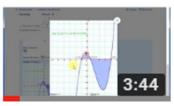
Abitti 02 kokeen aloitus
fx-CP400

3 

Abitti 03 kokeeseen vastaaminen
fx-CP400

4 

Abitti 04 koevastausten siirto
fx-CP400

5 

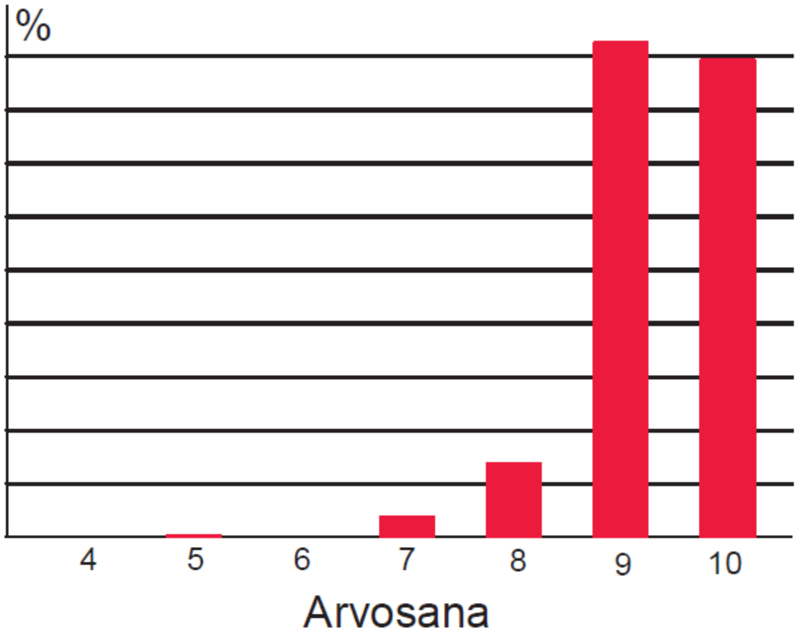
Abitti 05 kokeen arviointi ja palautus
fx-CP400

6 

Webinaari Abitti ja ClassPad II Manager
fx-CP400

11. Arkikielessä keskimääräisyyteen liittyvät käsitteet keskiarvo ja mediaani menevät usein sekaisin. Tässä tehtävässä "keskimääräisellä" tarkoitetaan keskiarvoa.

a) Valtion liikenneturvallisuuslaitos pyysi taksinkuljettajia arvioimaan ajotaitoaan kouluarvosanoin 4–10. Vastaukset tuhannelta kuljettajalta näkyvät oheisessa pylväsdiagrammissa, joka perustuu kiireisen toimittajan hätäisiin muistiinpanoihin. Arvioi kuvion perusteella arvosanan neljäsosan tarkkuudella, mikä oli tutkimuksen mukaan keskimääräisen kuljettajan ajotaidon arvosana.



b) Sama kysely tehtiin tuhannelle tavalliselle autoilijalle. Anna perusteltu esimerkki sellaisesta jakaumasta (mahdollisesta tuloksesta), jossa vähintään 80 % vastaajista arvioi olevansa keskimääräistä parempia kuljettajia.

MAA_B2_11

a) Kuvaajasta arvioituna punaisten palkkien korkeudet ovat n. 0.1a, 0.4a, 1.4a, 9.3a ja 8.9a, missä a on jakovälin korkeus (prosenttiyksikköä). Näiden summaksi pitää tulla 100%, joten

solve((0.1+0.4+1.4+9.3+8.9)a=100,a)

{a=4.975124378}

Siis yksi väli vastaa noin 5 prosenttiyksikköä ja tämän on oltava myös kiireisen toimittajan hätäisesti tekemän aineiston tarkkuus. Lasketaan aineiston keskiarvo:

0.1*0.05*5+0.4*0.05*7+1.4*0.05*8+9.3*0.05*9+8.9*0.05*10

9.36

mikä on neljäsosan tarkkuudella 9.25.

b) Keskimääräinen arvosana asteikossa on 7. Jakauma, jossa 80% arvioi olevansa keskiverron yläpuolella, voi olla esimerkiksi seuraavassa taulukossa:

Jakauma =>

Vinkki: Voit avata eActivity-sovellukseen muita ClassPadin sovelluksia omiksi vöikseen. Vyö aukeaa ja sulkeutuu koskemalla sen symboliin vyön oikeassa reunassa.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Arvosana	Jakauma									
2	4	200									
3	5										
4	6										
5	7										
6	8										
7	9										
8	10	800									
9											
10	keskiarvo:	8.8									
11	vähintään 80% vastaajista on yli keskiarvon.										
12											
13											
14											
15											
16											

=(A8•B8+A2•B2)/1000

12. Neliöiden N_1, N_2 ja N_3 pinta-alojen suhde on $9 : 2 : 11$. Kolmion K yhtenä sivuna on neliön N_1 sivu, toisena sivuna neliön N_2 sivu ja kolmantena sivuna neliön N_3 sivu. Laske kolmion K ja neliön N_2 pinta-alojen suhteen tarkka arvo.

MAA_B2_12

Merkitään neliön N_1 pinta-alaa $9a^2$, jolloin sen sivun pituus on $3a$, $a>0$.

Koska neliöt ovat yhdenmuotoisia keskenään, on neliöiden sivujen suhteet oltava $3:\sqrt{2}:\sqrt{11}$ vastaten sivujen pituuksia $3a$, $\sqrt{2}a$ ja $\sqrt{11}a$.

Koska $(3a)^2+(\sqrt{2}a)^2=(\sqrt{11}a)^2$, on kolmio K suorakulmainen kolmio. Sen kateetit ovat kaksi lyhintä sivua eli $3a$ ja $\sqrt{2}a$ ja sen pinta-ala

$$\frac{1}{2}*3a*\sqrt{2}a$$

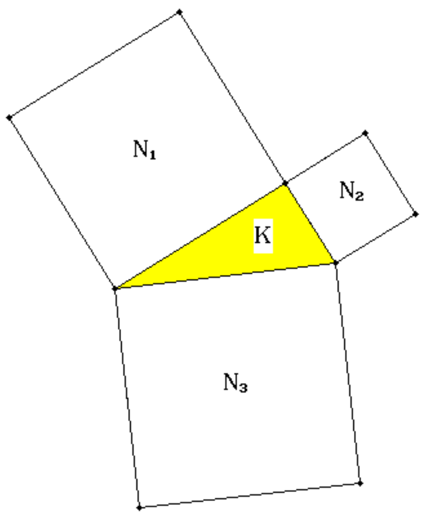
$$\frac{3\cdot\sqrt{2}\cdot a^2}{2}$$

Kysytty suhde on

$$\frac{\frac{3\cdot\sqrt{2}\cdot a^2}{2}}{(\sqrt{2}a)^2}$$

$$\frac{3\cdot\sqrt{2}}{4}$$

Vastaus: Suhde on $\frac{3\cdot\sqrt{2}}{4}$.



CASIO

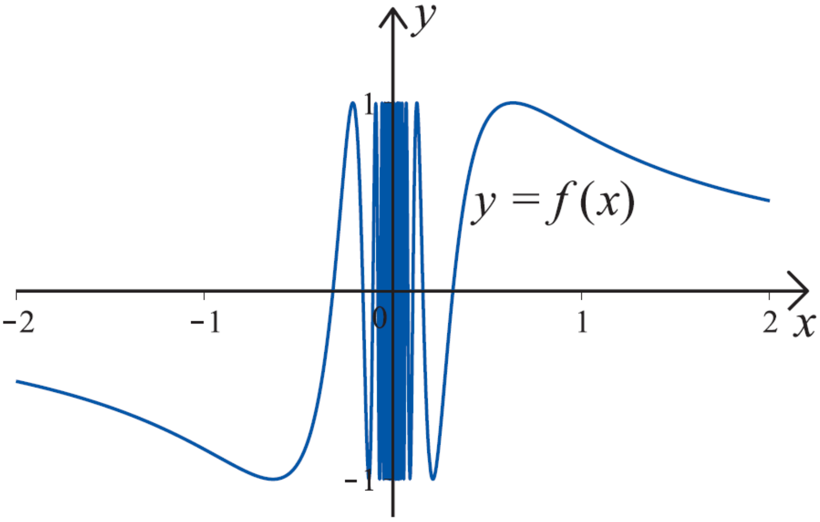
13. Tarkastellaan funktiota $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$, jonka kuvaaja on alla.

a) Etsi sellainen jono $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ positiivisia reaalilukuja, että

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0.$$

b) Olkoon $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Etsi sellainen jono $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ positiivisia reaalilukuja, että

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ ja } \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \sin(t).$$



MAA_B2_13

a) Määritellään funktio f:

Define $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

done

Koska $\sin\left(\frac{1}{x}\right)\to 0$, kun esim. $\frac{1}{x}\to\pi$ eli $x\to\frac{1}{\pi}$, niin voidaan etsiä lukujonoa, jonka termit lähestyvät nollaa muodon $\frac{1}{\pi}$ avulla. Esim. valitsemalla $a_n=\frac{1}{n*\pi}$, missä n=1, 2, 3, . . . saadaan jono positiivisia reaalilukuja $\frac{1}{\pi}$, $\frac{1}{2\pi}$, $\frac{1}{3\pi}$, . . . jolle pätee

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n*\pi}\right)=0$ ja

$\lim\limits_{n\to\infty}(\sin(n*\pi))=\lim\limits_{n\to\infty}(\sin(0))=0$

b) Koska $\sin\left(\frac{1}{x}\right)\to\sin(t)$, kun $\frac{1}{x}\to t$ sinin jakso huomioon ottaen, niin voidaan etsiä lukujonoa, jonka termit ovat muotoa $t+2\pi n$, missä n on positiivinen kokonaisluku. Esim. valitsemalla $a_n=\frac{1}{t+2\pi n}$, missä n=1, 2, 3, . . . saadaan jono positiivisia reaalilukuja $\frac{1}{t+2\pi}$, $\frac{1}{t+4\pi}$, $\frac{1}{t+6\pi}$, . . . jolle pätee

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{t+2\pi n}\right)=0$ ja

$\lim\limits_{n\to\infty}(\sin(t+2\pi n))=\lim\limits_{n\to\infty}(\sin(t))=\sin(t).$