

Laske Laudatur ClassPadilla

- syksy 2013 –



***”Enemmän aikaa matematiikan opiskeluun,
vähemmän aikaa laskimen opetteluun.”***

Hyvä matemaatikko,

Symbolinen laskenta on tullut jäädäkseen Suomeen. **ClassPad**-sarjan kesällä 2013 julkaistu viimeisin malli **fx-CP400** on todella helppokäyttöinen ja käyttäjäystävällinen apuväline sekä opiskelun ja oppimisen tueksi että ylioppilaskirjoitusten tehtävien ratkaisemiseen. Tässä vihkosessa on laskettu sekä pitkän että lyhyen matematiikan tehtävistä ylimmän arvosanan saamiseen oikeuttavat pistemäärät **ClassPadilla**. Muutama helppo tehtävä (esim. lyhyt matematiikka 6, 7 ja 8) tai laskimen käyttöä huonosti tukevat todistustehtävät (pitkä matematiikka 13) on sivuutettu.

Ylioppilastutkintolautakunta työstää uutta sähköistä tutkintoa ja ratkoo siihen liittyviä haasteita. **ClassPad Manager**-ohjelmisto on erinomainen opetuksen ja oppimisen työväline. Tulevaisuus näyttää, millä työkaluilla sähköisiä ylioppilaskokeita ratkotaan. Varmaa on kuitenkin se, että sähköisiin kokeisiin siirrytään matematiikan osalta tämän vuosikymmenen lopulla.

Casio tekee opettajille tukimateriaalia, josta tämäkin vihkonen on esimerkki. Aktiivisesti päivittyvät pedagogiset [www-sivumme](http://www.casio-laskimet.fi) osoitteessa

www.casio-laskimet.fi

antavat ideoita opetukseen ja ryhmitöihin. Sivujemme kautta voi myös ladata materiaalia, ohjekirjoja tai rekisteröityä opettajien tietopalveluun. Rekisteröityneet asiakkaamme pidetään automaattisesti ajantasalla **Casion** toimista Suomessa, laskinten päivityksistä ja materiaaleista. Sivuiltamme löytyy myös videomateriaalia laskinten opetuskäytöstä sekä ratkaisuja ylioppilastehtäviin – tämä vihkonen mukaanluettuna.

Tämän syksyn yo-tehtävistä erityisesti pitkän matematiikan loppupään tehtävät nostavat laskimen arvoa rutiiniosien laskemisessa. Laskimen avulla aikaa säästyy esim. tehtävien vastausten suuruusluokan arviointiin ja matemaattisen ajattelun syvällistämiseen. Hyvänä esimerkkinä tästä on molemmat pitkän matematiikan jokeritehtävät.

Vektoritehtävät, geometriset tutkimustehtävät ja fysikaalinen lyhyen matematiikan korkeushyppytehtävä mahdollistavat **ClassPadin** monipuolisemman käytön. Perinteiset ratkaisu- ja derivointitehtävät, tekijöihin jaot ja integroinnit olivat edelleen mukana eivätkä ne laskimen peruskäytön hallitsevalle ole kovinkaan aikaavieviä.

Mukavaa matematiikkaa,

Espoossa 28.9.2013

Pepe Palovaara

1. a) Ratkaise yhtälö $x^2 + 6x = 2x^2 + 9$.

b) Ratkaise yhtälö $\frac{1+x}{1-x} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

c) Esitä polynomi $x^2 - 9x + 14$ ensimmäisen asteen polynomien tulona.

The screenshot shows the ClassPad interface with the following commands and results:

- `solve(x^2+6*x=2*x^2+9, x)` results in $\{x=3\}$.
- `solve(1+x/1-x=1-x^2/1+x^2, x)` results in $\{x=-1, x=0\}$.
- `rFactor(x^2-9x+14)` results in $(x-2) \cdot (x-7)$.

Kirjoittamalla lausekkeet tai yhtälöt sellaisenaan ja maalaamalla ne kynällä voidaan ratkaisut hakea **Interaktiivisen valikon** kautta. Tällöin **ClassPad** täydentää annetut komennot eikä käyttäjän tarvitse välittää syntaksista.

Komennoilla **solve** ja **rFactor** voidaan hakea ratkaisut.

Vastaukset ovat

- a) $x = 3$.
- b) $x = -1$ v $x = 0$.
- c) $(x - 2)(x - 7)$.

2. a) Millä muuttujan x arvoilla polynomin $P(x) = x^4 - x^3 + x$ derivaatta saa arvon 1?

b) Määritä funktion $4x + \cos(4x)$ kaikki integraalifunktiot.

c) Positiivinen luku a on 25 prosenttia pienempi kuin luku b . Kuinka monta prosenttia luku b on suurempi kuin a ?

The screenshot shows the ClassPad interface with the following commands and results:

- `d/dx(x^4-x^3+x)` results in $4x^3 - 3x^2 + 1$.
- `solve(ans=1, x)` results in $\{x=0, x=3/4\}$.
- `int(4*x+cos(4*x) dx + C)` results in $\frac{8x^2 + \sin(4x)}{4} + C$.
- `solve((1-0.25)*b=a, b)` results in $\{b = \frac{4a}{3}\}$.
- `(4/3-1)*100` results in 33.33333333 .

Kirjoittamalla lauseke sellaisenaan joko fyysiseltä tai virtuaaliselta näppäimistöltä voidaan a) -kohdan derivaatan arvo hakea **Interaktiivisen valikon** komennolla **diff**. Tämän jälkeen Interaktiivisen valikon komennolla **solve** voidaan ratkaista, milloin derivaatta saa arvon 1.

Integraalifunktio saadaan integroimalla annettu funktio. Käyttäjän on syytä huomata, että vakion C lisääminen tulee tehdä itse.

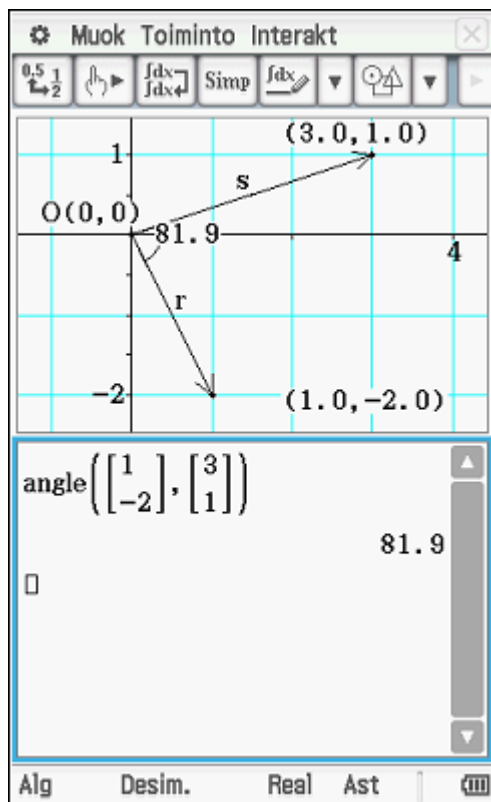
Viimeisessä osatehtävässä voidaan ratkaista a :n ja b :n yhtälöstä b , jolloin nähdään moniko kertainen se on a :han verrattuna. Muunnos prosenteiksi saadaan vähentämällä kertoimesta 1 jakertomalla tulos sadalla.

Vastaukset ovat

- a) $x = 0$ v $x = \frac{3}{4}$.
- b) $\frac{8x^2 + \sin(4x)}{4} + C, C \in \mathbb{R}$.
- c) **33,3% suurempi.**

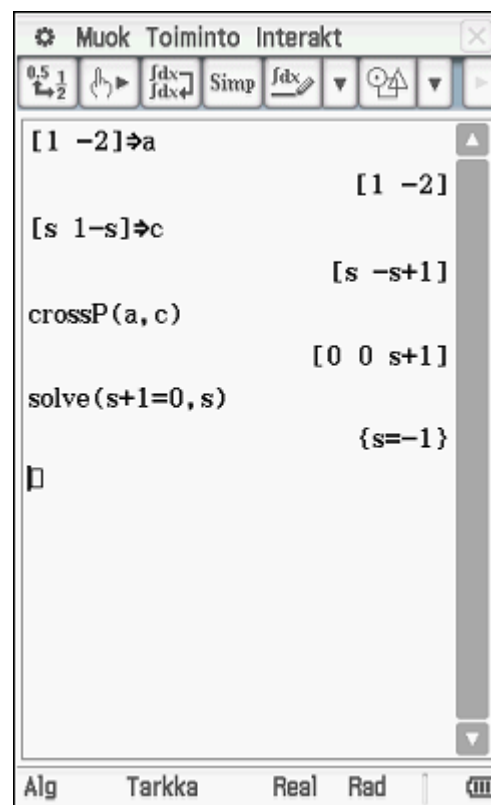
3. a) Määritä vektoreiden $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$ ja $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j}$ välisen kulman likiarvo asteen kymmenesosan tarkkuudella.

b) Millä parametrin s arvolla vektorit $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$ ja $\vec{c} = s\vec{i} + (1-s)\vec{j}$ ovat yhdensuuntaiset?



Vektorit voi piirtää alkamaan esim. origosta **Geometria –sovelluksessa**. Valitsemalla vektori voidaan niiden välinen kulma merkitä näkyviin valikosta **Piirrä -> Kiinnitetty kulma**. Vastaustarkkuuden voi säätää halutuksi asetuksista kohdasta **Geometriamuoto -> Numeromuoto -> Korj 1**.

Geometriasovelluksesta on mahdollista raahata piirretyt vektorit myös **Pääsovellukseen**, jolloin ne niiden välisen kulman voi laskea **Interaktiivisen valikon** kohdasta **Vektorit -> angle**.



Vektorit ovat yhdensuuntaiset, jos ja vain jos niiden ristitulovektori on nollavektori. Laskemalla ristitulovektori ja ratkaisemalla yhtälö, jossa sen komponentit ovat nollia, saadaan ratkaisu selville.

Vastaukset ovat

- a) n. 81,9°.
- b) $s = -1$.

Casio järjestää maksuttomia koulutustilaisuuksia. Oletko jo kysynyt omaasi?

CASIO

4. Millä parametrin k arvoilla käyrien $y=kx^2$ ja $y=k(x-2)^2$ leikkauspisteeseen piirretyt tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan?

Yhtälöparin avulla voidaan ratkaista käyrien leikkauspiste, jonka x-koordinaatiksi saadaan 1. Lasketaan **Interaktiivisen valikon** derivointitoiminnolla derivaatan arvo pisteessä 1 kummallekin käyrälle, jolloin saadaan tangenttien kulmakertoimet.

Tangentit leikkaavat toisensa kohtisuorasti, kun kohtisuoruusehto toteutuu. Tämä voidaan ratkaista yhtälönä $k:n$ suhteen. Tehdään yhtälö, maalataan se kynällä ja valitaan **Interaktiivisen valikon solve**-komento.

Vastaus on

$$k = -\frac{1}{2} \vee k = \frac{1}{2}$$

5. Pisteestä $A(1, -1, 0)$ siirrytään 9 pituusyksikköä vektorin $\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ suuntaan pisteeseen B ja siitä edelleen 10 pituusyksikköä vektorin $3\vec{i} - 4\vec{k}$ suuntaan pisteeseen C . Määritä pisteen C koordinaatit.

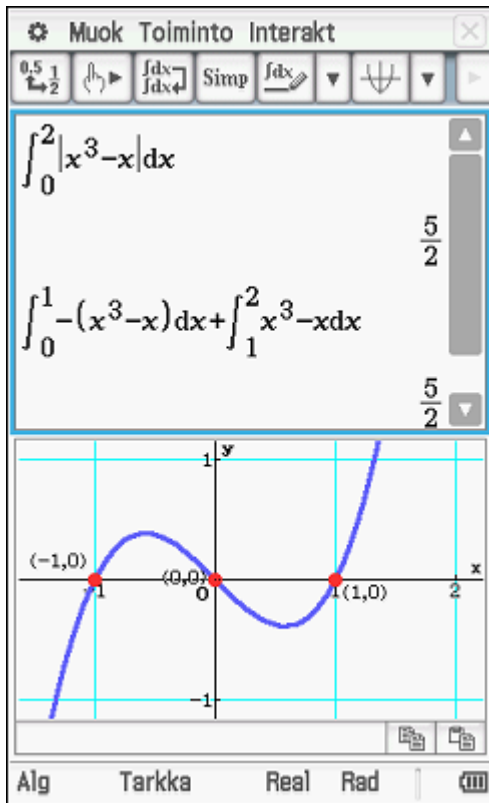
Ratkaistaan kummallekin annetulle vektorille yksikkövektorit. Tehdään aluksi vektorit vaakamatriiseina, maalataan ne kynällä ja valitaan **Interaktiivisesta valikosta** komento **Vektorit** -> **UnitV**.

Pisteen A paikkavektoriin lisätään haluttu määrä yksikkövektoreita, jolloin vastaukseksi saadaan loppupisteen koordinaatit.

Vastaus on

$$(10, -7, -2).$$

7. Laske integraali $\int_0^2 |x^3 - x| dx$.



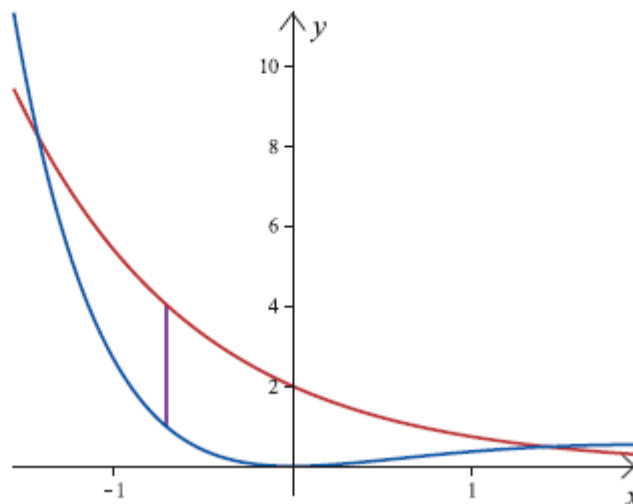
ClassPad fx-CP400 laskee annetun integraalin arvon suoraan. Voidaan myös ratkaista funktion nollakohdat annetulla välillä ja integroida osissa.

Vastaus on

$$\frac{5}{2}$$

ClassPadin opettajatilausten yhteydessä toimitetaan ClassPad Manager-ohjelma, joka on ihanteellinen työkalu projektorin tai älytaulun kanssa. Nämäkin kuvat on tehty Manager-ohjelmalla.

9. Käyrien $y = 2e^{-x}$ ja $y = x^2 e^{-x}$ väliin jäävään rajoitettuun alueeseen asetetaan y -akselin suuntainen jana oheisen kuvion mukaisesti. Määritä tämän janan suurin mahdollinen pituus. Anna vastauksena tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo.



Muok Toiminto Interakt

0,5 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{x}$ $\frac{1}{x^2}$ $\frac{1}{x^3}$ $\frac{1}{x^4}$ $\frac{1}{x^5}$ $\frac{1}{x^6}$ $\frac{1}{x^7}$ $\frac{1}{x^8}$ $\frac{1}{x^9}$ $\frac{1}{x^{10}}$ $\frac{1}{x^{11}}$ $\frac{1}{x^{12}}$ $\frac{1}{x^{13}}$ $\frac{1}{x^{14}}$ $\frac{1}{x^{15}}$ $\frac{1}{x^{16}}$ $\frac{1}{x^{17}}$ $\frac{1}{x^{18}}$ $\frac{1}{x^{19}}$ $\frac{1}{x^{20}}$ $\frac{1}{x^{21}}$ $\frac{1}{x^{22}}$ $\frac{1}{x^{23}}$ $\frac{1}{x^{24}}$ $\frac{1}{x^{25}}$ $\frac{1}{x^{26}}$ $\frac{1}{x^{27}}$ $\frac{1}{x^{28}}$ $\frac{1}{x^{29}}$ $\frac{1}{x^{30}}$ $\frac{1}{x^{31}}$ $\frac{1}{x^{32}}$ $\frac{1}{x^{33}}$ $\frac{1}{x^{34}}$ $\frac{1}{x^{35}}$ $\frac{1}{x^{36}}$ $\frac{1}{x^{37}}$ $\frac{1}{x^{38}}$ $\frac{1}{x^{39}}$ $\frac{1}{x^{40}}$ $\frac{1}{x^{41}}$ $\frac{1}{x^{42}}$ $\frac{1}{x^{43}}$ $\frac{1}{x^{44}}$ $\frac{1}{x^{45}}$ $\frac{1}{x^{46}}$ $\frac{1}{x^{47}}$ $\frac{1}{x^{48}}$ $\frac{1}{x^{49}}$ $\frac{1}{x^{50}}$ $\frac{1}{x^{51}}$ $\frac{1}{x^{52}}$ $\frac{1}{x^{53}}$ $\frac{1}{x^{54}}$ $\frac{1}{x^{55}}$ $\frac{1}{x^{56}}$ $\frac{1}{x^{57}}$ $\frac{1}{x^{58}}$ $\frac{1}{x^{59}}$ $\frac{1}{x^{60}}$ $\frac{1}{x^{61}}$ $\frac{1}{x^{62}}$ $\frac{1}{x^{63}}$ $\frac{1}{x^{64}}$ $\frac{1}{x^{65}}$ $\frac{1}{x^{66}}$ $\frac{1}{x^{67}}$ $\frac{1}{x^{68}}$ $\frac{1}{x^{69}}$ $\frac{1}{x^{70}}$ $\frac{1}{x^{71}}$ $\frac{1}{x^{72}}$ $\frac{1}{x^{73}}$ $\frac{1}{x^{74}}$ $\frac{1}{x^{75}}$ $\frac{1}{x^{76}}$ $\frac{1}{x^{77}}$ $\frac{1}{x^{78}}$ $\frac{1}{x^{79}}$ $\frac{1}{x^{80}}$ $\frac{1}{x^{81}}$ $\frac{1}{x^{82}}$ $\frac{1}{x^{83}}$ $\frac{1}{x^{84}}$ $\frac{1}{x^{85}}$ $\frac{1}{x^{86}}$ $\frac{1}{x^{87}}$ $\frac{1}{x^{88}}$ $\frac{1}{x^{89}}$ $\frac{1}{x^{90}}$ $\frac{1}{x^{91}}$ $\frac{1}{x^{92}}$ $\frac{1}{x^{93}}$ $\frac{1}{x^{94}}$ $\frac{1}{x^{95}}$ $\frac{1}{x^{96}}$ $\frac{1}{x^{97}}$ $\frac{1}{x^{98}}$ $\frac{1}{x^{99}}$ $\frac{1}{x^{100}}$

$$\begin{cases} y=2e^{-x} \\ y=x^2e^{-x} \end{cases} \Big|_{x,y}$$

$$\{ \{x=-\sqrt{2}, y=2 \cdot e^{\sqrt{2}}\}, \{x=\sqrt{2}, y=2 \cdot e^{-\sqrt{2}}\} \}$$

$$(2e^{-x}) - (x^2e^{-x})$$

$$-x^2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot e^{-x}$$

Alg Tarkka Real Rad

Ratkaistaan aluksi käyrien leikkauspisteet yhtälöparilla ja muodostetaan käyrien välimatkaa ilmaiseva erotusfunktio.

fMax

fMax
 fMax numeerisesti

Lauseke:

Muuttuja:

Alku:

Loppu:

OK Peru

Lasketaan erotusfunktion suurin arvo saatujen leikkauspisteiden välissä sekä tarkkana että likiarvona **Interaktiivisen valikon** kautta. Edelliseen vastaukseen voi viitata muuttujalla **ans**.

Vastauksen esittämistavan voi vaihtaa koskemalla kynällä näytön alareunan vaihtoehtoja **Tarkka** ja **Desim**.

Muok Toiminto Interakt

0,5 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{x}$ $\frac{1}{x^2}$ $\frac{1}{x^3}$ $\frac{1}{x^4}$ $\frac{1}{x^5}$ $\frac{1}{x^6}$ $\frac{1}{x^7}$ $\frac{1}{x^8}$ $\frac{1}{x^9}$ $\frac{1}{x^{10}}$ $\frac{1}{x^{11}}$ $\frac{1}{x^{12}}$ $\frac{1}{x^{13}}$ $\frac{1}{x^{14}}$ $\frac{1}{x^{15}}$ $\frac{1}{x^{16}}$ $\frac{1}{x^{17}}$ $\frac{1}{x^{18}}$ $\frac{1}{x^{19}}$ $\frac{1}{x^{20}}$ $\frac{1}{x^{21}}$ $\frac{1}{x^{22}}$ $\frac{1}{x^{23}}$ $\frac{1}{x^{24}}$ $\frac{1}{x^{25}}$ $\frac{1}{x^{26}}$ $\frac{1}{x^{27}}$ $\frac{1}{x^{28}}$ $\frac{1}{x^{29}}$ $\frac{1}{x^{30}}$ $\frac{1}{x^{31}}$ $\frac{1}{x^{32}}$ $\frac{1}{x^{33}}$ $\frac{1}{x^{34}}$ $\frac{1}{x^{35}}$ $\frac{1}{x^{36}}$ $\frac{1}{x^{37}}$ $\frac{1}{x^{38}}$ $\frac{1}{x^{39}}$ $\frac{1}{x^{40}}$ $\frac{1}{x^{41}}$ $\frac{1}{x^{42}}$ $\frac{1}{x^{43}}$ $\frac{1}{x^{44}}$ $\frac{1}{x^{45}}$ $\frac{1}{x^{46}}$ $\frac{1}{x^{47}}$ $\frac{1}{x^{48}}$ $\frac{1}{x^{49}}$ $\frac{1}{x^{50}}$ $\frac{1}{x^{51}}$ $\frac{1}{x^{52}}$ $\frac{1}{x^{53}}$ $\frac{1}{x^{54}}$ $\frac{1}{x^{55}}$ $\frac{1}{x^{56}}$ $\frac{1}{x^{57}}$ $\frac{1}{x^{58}}$ $\frac{1}{x^{59}}$ $\frac{1}{x^{60}}$ $\frac{1}{x^{61}}$ $\frac{1}{x^{62}}$ $\frac{1}{x^{63}}$ $\frac{1}{x^{64}}$ $\frac{1}{x^{65}}$ $\frac{1}{x^{66}}$ $\frac{1}{x^{67}}$ $\frac{1}{x^{68}}$ $\frac{1}{x^{69}}$ $\frac{1}{x^{70}}$ $\frac{1}{x^{71}}$ $\frac{1}{x^{72}}$ $\frac{1}{x^{73}}$ $\frac{1}{x^{74}}$ $\frac{1}{x^{75}}$ $\frac{1}{x^{76}}$ $\frac{1}{x^{77}}$ $\frac{1}{x^{78}}$ $\frac{1}{x^{79}}$ $\frac{1}{x^{80}}$ $\frac{1}{x^{81}}$ $\frac{1}{x^{82}}$ $\frac{1}{x^{83}}$ $\frac{1}{x^{84}}$ $\frac{1}{x^{85}}$ $\frac{1}{x^{86}}$ $\frac{1}{x^{87}}$ $\frac{1}{x^{88}}$ $\frac{1}{x^{89}}$ $\frac{1}{x^{90}}$ $\frac{1}{x^{91}}$ $\frac{1}{x^{92}}$ $\frac{1}{x^{93}}$ $\frac{1}{x^{94}}$ $\frac{1}{x^{95}}$ $\frac{1}{x^{96}}$ $\frac{1}{x^{97}}$ $\frac{1}{x^{98}}$ $\frac{1}{x^{99}}$ $\frac{1}{x^{100}}$

$$\text{fMax}((2e^{-x}) - (x^2e^{-x}), x, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$\{ \text{MaxValue} = 2 \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot e^{\sqrt{3} - 1}, x = -\sqrt{3} + 1 \}$$

$$\text{fMax}((2e^{-x}) - (x^2e^{-x}), x, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$\{ \text{MaxValue} = 3.04436588, x = -0.7320508076 \}$$

Alg Desim. Real Rad

Vastaus on

$$2(\sqrt{3} - 1)e^{\sqrt{3} - 1} \approx 3,04.$$

11. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Laske integraalin $\int_0^1 f(x) dx$ likiarvo käyttämällä puolisuunnikassääntöä, kun jakovälejä on viisi.

Lasketaan **Pääsovelluksessa** jakovälin pituus ja määritellään funktio $f(x)$. Soveltamalla puolisuunnikassääntöä saadaan integraalin likiarvoksi 0,945.

The screenshot shows a Casio calculator interface with the following elements:

- Top bar: Muok Toiminto Interakt
- Toolbar: $\frac{0.5}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{f dx}{f dx}$, Simp, $\frac{f dx}{f dx}$, and a dropdown arrow.
- Input area: $\frac{1-0}{5}$
- Define function: Define $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$
- Integration formula: $0.2 \times \left(\frac{1}{2} \times 1 + f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8) + \frac{1}{2} \times f(1) \right)$
- Result: 0.945078781
- Bottom bar: Alg, Desim., Real, Rad, and a calculator icon.

Vastaus on

0,945.

Olemme mukana mm. MAOLin koulutuspäivillä, ITK-päivillä ja kansainvälisillä messuilla. Seuraa ilmoittelua kotisivujemme kautta osoitteessa

www.casio-laskimet.fi

CASIO

12. Merkitään $R(x) = \frac{9x^2 - 1}{3x^2 - 5x - 2}$. Määritä raja-arvo

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} R(x)$

Muok Toiminto Interakt

Define $R(x) = \frac{9x^2 - 1}{3x^2 - 5x - 2}$ done

$\lim_{x \rightarrow \infty} (R(x))$ 3

$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} (R(x))$ $\frac{6}{7}$

Alg Tarkka Real Rad

Määritetään funktio $R(x)$ **Define**-komennolla, jolloin raja-arvojen laskemisessa voidaan viitata funktioon helposti. Raja-arvot voidaan laskea **Interaktiivisen valikon** komennolla **Laskenta** -> **lim**, jolloin lausekkeeksi riittää kirjoittaa $R(x)$ ja raja-arvon laskemispisteeksi ensin ∞ ja sen jälkeen $-\frac{1}{3}$.

lim

Lauseke: $R(x)$

Muuttuja: x

Piste: ∞

Suunta: $0|$

OK Peru

Mat.1	Line	$\frac{\square}{\square}$	$\sqrt{\square}$	π	\Rightarrow
Mat.2	Define	f	g	i	∞
Mat.3	solve(dSlv	'	$\left\{ \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} \right\}$	
Trig	<	>	()	{ }	[]
Var	\leq	\geq	=	\neq	<
abc	\leftarrow	\rightarrow	\rightarrow	vas	EXE

Alg Tarkka Real Rad

Vastaukset ovat

a) 3.

b) $\frac{6}{7}$.

*14. Tarkastellaan tasokäyrää, jonka yhtälö on $2x^2 + 2y^2 - 3xy - 2x + 2y - 4 = 0$.

a) Määritä käyrän ja koordinaattiakselien leikkauspisteet. (2 p.)

b) Osoita, että kaikki leikkauspisteet ovat saman ympyrän kehällä, ja määritä tämän ympyrän yhtälö. (3 p.)

c) Suora kulkee origon ja b-kohdan ympyrän keskipisteen kautta. Missä pisteissä tämä suora leikkaa alkuperäisen käyrän? (2 p.)

d) Onko alkuperäinen käyrä ympyrä? (2 p.)

Muok Toiminto Interakt

0.5 1/2 $\int dx$ $\int dx$ Simp $\int dx$

$$2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 - 3 \cdot x \cdot y - 2 \cdot x + 2 \cdot y - 4 \mid x=0$$

$$2 \cdot y^2 + 2 \cdot y - 4$$

solve(ans, y)

$$\{y=-2, y=1\}$$

$$2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 - 3 \cdot x \cdot y - 2 \cdot x + 2 \cdot y - 4 \mid y=0$$

$$2 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 4$$

solve(ans, x)

$$\{x=-1, x=2\}$$

Alg Tarkka Real Rad

Sijoitetaan vuoronperään yhtälöön koordinaatit x ja y nolliksi ja ratkaistaan koordinaattiakselien leikkauspisteet.

Sijoitetaan kolme saaduista pisteistä ympyrän yleiseen yhtälöön, jolloin saadaan muodostettua yksikäsitteinen ympyrän yhtälö. Ratkaistaan yhtälöryhmästä kertoimet A, B ja C. Sijoitetaan saadut kertoimet yleiseen yhtälöön, jolloin ympyrän yhtälö näiden kolmen pisteen kautta saadaan määritettyä.

Sijoittamalla neljännen pisteen koordinaatit saatuun yhtälöön voidaan todeta, että sen koordinaatit toteuttavat ympyrän yhtälön ja näin neljäskin piste kuuluu samalle ympyrän kehälle.

Muok Toiminto Interakt

0.5 1/2 $\int dx$ $\int dx$ Simp $\int dx$

$$\begin{cases} 0^2 + (-2)^2 + A \cdot 0 + B \cdot (-2) + C = 0 \\ 0^2 + 1^2 + A \cdot 0 + B \cdot 1 + C = 0 \\ (-1)^2 + 0^2 + A \cdot (-1) + B \cdot 0 + C = 0 \end{cases} \mid A, B, C$$

$$\{A=-1, B=1, C=-2\}$$

$$x^2 + y^2 + A \cdot x + B \cdot y + C = 0 \mid \{A=-1, B=1, C=-2\}$$

$$x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0 \mid \{x=2, y=0\}$$

$$0=0$$

Alg Tarkka Real Rad

Muok Lomak Sovita

$[(-1)^2 + 0^2 + A \times (-1) + B \times 0 + C = 0]$
 $\{A=-1, B=1, C=-2\}$

$x^2 + y^2 + A \times x + B \times y + C = 0 \mid \{A=-1\}$
 $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$

$x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0 \mid \{x=2, y=0\}$
 $0 = 0$

Kartioyhtälö:
 $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$

Rad Real

Avataan **Pääsovelluksen** kaveriksi **Kartioyhtälöiden sovellus**, jolloin saatu ympyrän yhtälö voidaan raahata siihen ja sovittaa neliömuotoon. Joko neliömuodosta tai piirtämällä ja analysoimalla ympyrän yhtälöä saadaan selville ympyrän keskipisteen koordinaatit.

Muok Zoom Analyysi

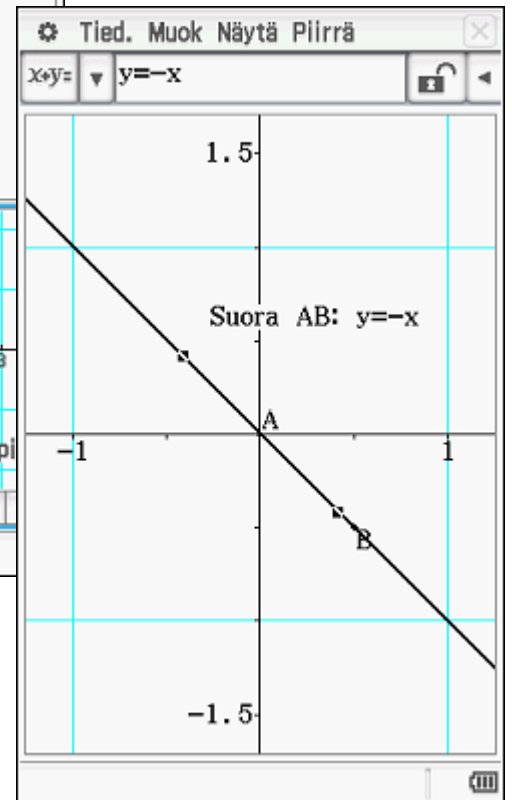
Kartioyhtälö:
 $(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{2}$

$(x - 1/2)^2 + (y + 1/2)^2 = 5/2$

$x_c = 0.5$ $y_c = -0.5$

Rad Real

Origon ja ympyrän keskipisteen kautta kulkevan suoran yhtälö voidaan hakea esim. piirtämällä suora **Geometria-sovellukseen**. Suoran yhtälöksi saadaan $y = -x$.



Ratkaistaan alkuperäisen käyrän ja saadun suoran leikkauspisteet yhtälöparilla. Alkuperäinen käyrä ei voi olla ympyrä, koska sen yhtälössä esiintyy sekatermi $-3xy$.

$$\begin{cases} y = -x \\ 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 - 3 \cdot x \cdot y - 2 \cdot x + 2 \cdot y - 4 = 0 \end{cases} \mid x, y$$

$$\left\{ \left\{ x = \frac{-4\sqrt{2}}{7} + \frac{2}{7}, y = \frac{4\sqrt{2}}{7} - \frac{2}{7} \right\}, \left\{ x = \frac{4\sqrt{2}}{7} + \frac{2}{7}, y = \frac{-4\sqrt{2}}{7} - \frac{2}{7} \right\} \right\}$$

Vastaukset:

- Leikkauspisteet ovat $(0, -2)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ ja $(2, 0)$.
- Ympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$.
- Leikkauspisteet ovat $(\frac{-4\sqrt{2}}{7} + \frac{2}{7}, \frac{4\sqrt{2}}{7} - \frac{2}{7})$ ja $(\frac{4\sqrt{2}}{7} + \frac{2}{7}, \frac{-4\sqrt{2}}{7} - \frac{2}{7})$.
- Ei ole.

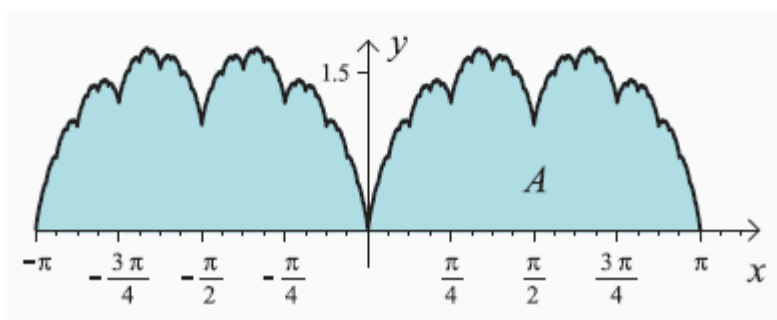
*15. Kaava $f_k(x) = 2^{-k} |\sin(2^k x)|$ määrittelee jokaisella $k = 0, 1, 2, \dots$ funktion $f_k: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

a) Piirrä funktioiden f_0 , f_1 ja f_2 kuvaajat välillä $[-\pi, \pi]$. (2 p.)

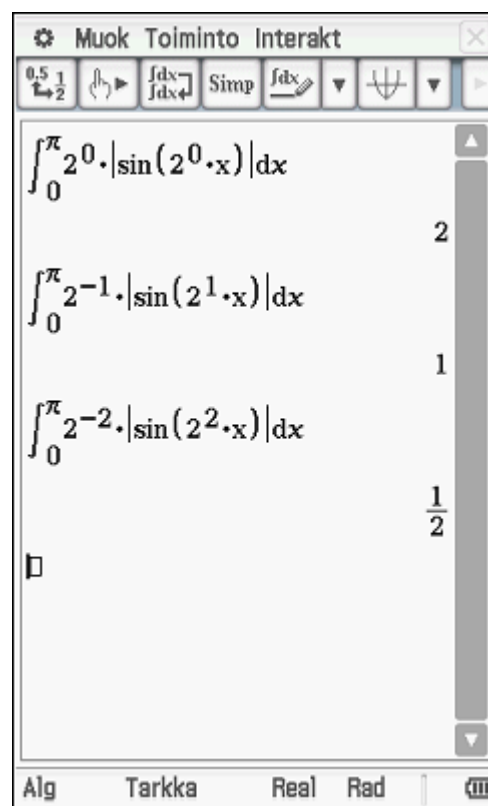
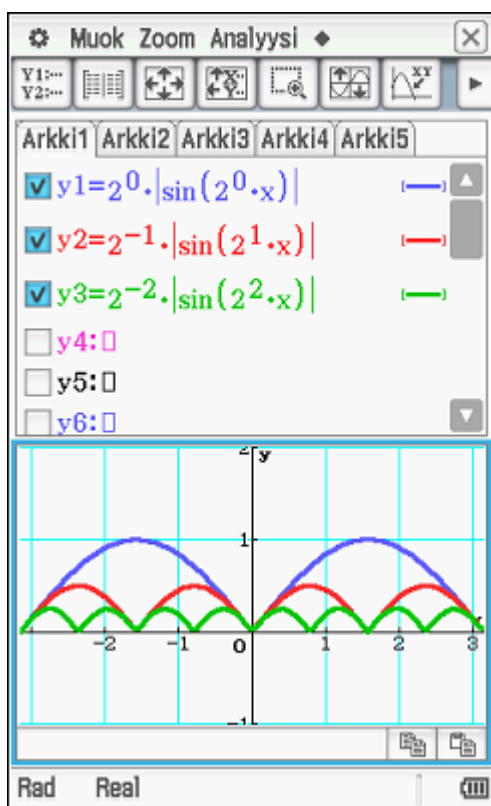
b) Laske integraalit $\int_0^\pi f_k(x) dx$, kun $k = 0, 1, 2$. (2 p.)

c) Määritä lausekkeen $A_n = \sum_{k=0}^n \int_0^\pi f_k(x) dx$ tarkka arvo kaikilla $n = 0, 1, 2, \dots$ (3 p.)

d) Laske raja-arvo $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$. (2 p.)



Käyrä & Taulukko –sovellukseen voidaan määrittää funktioiden lausekkeet ja piirtää ne k:n arvoille 0, 1 ja 2. Pääsovelluksen integrointitoiminnolla määrättyjen integraalien arvot saadaan lasketuuta.



Peräkkäiset pinta-alat muodostavat geometrisen jonon, jossa suhdelukuna on $\frac{1}{2}$. Geometrisen jonon summakaavan avulla saadaan c) –kohdan tarkka arvo laskettua.

Geometrisen suppenevan sarjan summakaavalla tai raja-arvon laskemisella saadaan d) –kohdan arvoksi laskettua 4.

Vastaukset ovat

- a) Ks. kuva.
- b) Integraalien arvot ovat 2, 1, ja $\frac{1}{2}$.
- c) $-4 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$.
- d) 4.

The screenshot shows a CASIO calculator interface with the following content:

- Top bar: Muok Toiminto Interakt
- Input area: J_0
- Equation 1: $\sum_{k=1}^n \left(2 \times \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^k}{1 - \frac{1}{2}} \right)$
- Equation 2: $-4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$
- Equation 3: $\frac{2}{1 - \frac{1}{2}}$
- Equation 4: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4 \right)$
- Bottom bar: Alg Tarkka Real Rad

OPETUSMATERIAALIA



Käytännönläheiset tehtävät, työvihot ja opetuskokonaisuudet tekevät matematiikanopetuksesta kiinnostavaa.

[Lisätietoa materiaaleista >](#)

WORKSHOIT



Ilmaiset henkilöstölle tarkoitetut workshopit antavat hyviä vinkkejä laskinten käyttöön matematiikan opetuksessa.

[Ilmoittaudu tästä >](#)

REFERENS SIKOULUT



Referenssikouluohjelman kautta syntyy osaamiskeskustoja ympäri maata, joiden puoleen jokainen koulu voi kääntyä tarpeen tullen.

[Lisätietoja >](#)

OPETTAJALLE



Opettajan tietopalvelusta saat arkielämän esimerkkejä ja havainnollistamisvihjeitä matematiikan opetuksen

[Opettajalle >](#)

OPETTAJAN TIETOPALVELU



Uutiskirje sisältää esimerkkeitä, opetuskokonaisuuksia ja uutta tietoa CASIO-koululaskinten käytöstä opetustyössä.

[Ilmoittaudu tästä >](#)

OPETTAJAN TESTILAITE



Opettajana voitte tilata koululaskimen tarvikkeineen hyvin edullisesti.

[Tilaa nyt >](#)

1. a) Ratkaise yhtälö $(x-2)^2 = 4$.
- b) Millä muuttujan x arvolla lausekkeet $2x+3$ ja $-(x+3)$ saavat saman arvon?
- c) Laske lausekkeen $a(b-2)+(a-b)^2 - b(1-a)$ arvo, kun $a=2$ ja $b=-2$.

The screenshot shows the 'Muok Toiminto Interakt' window on a calculator. It contains the following text and results:

```

solve((x-2)^2=4, x)           {x=0, x=4}
solve(2*x+3=-(x+3), x)      {x=-2}
a(b-2)+(a-b)^2-b(1-a) | {a=2, b=-2}
                               6
  
```

At the bottom, the mode is set to 'Alg'.

Pääsovelluksen avulla voidaan kirjoittaa kaksi ensimmäistä yhtälöä, maalata ne kynällä ja valita **Interaktiivisesta valikosta** komento **solve**, joka ratkaisee yhtälöt.

Viimeisen kohdan lauseke voidaan kirjoittaa sellaisenaan ja sijoittaa siihen annetut a :n ja b :n arvot.

Vastaukset ovat

- a) $x = 0$ v $x = 4$.
- b) $x = -2$.
- c) 6.



CASIO

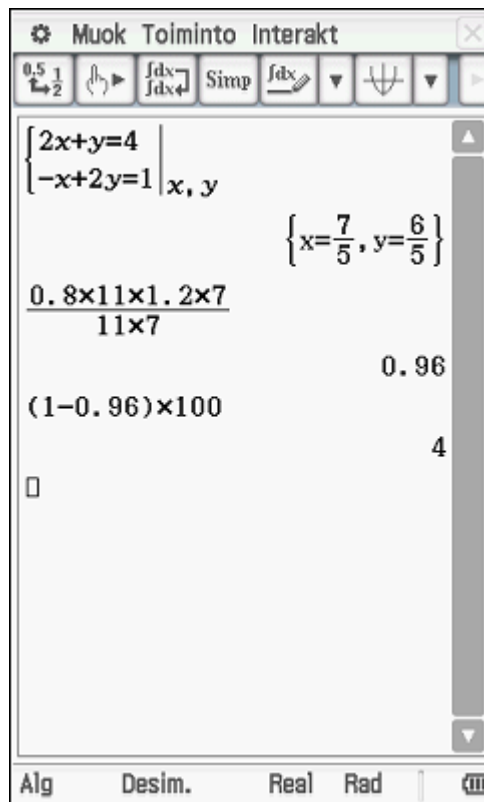
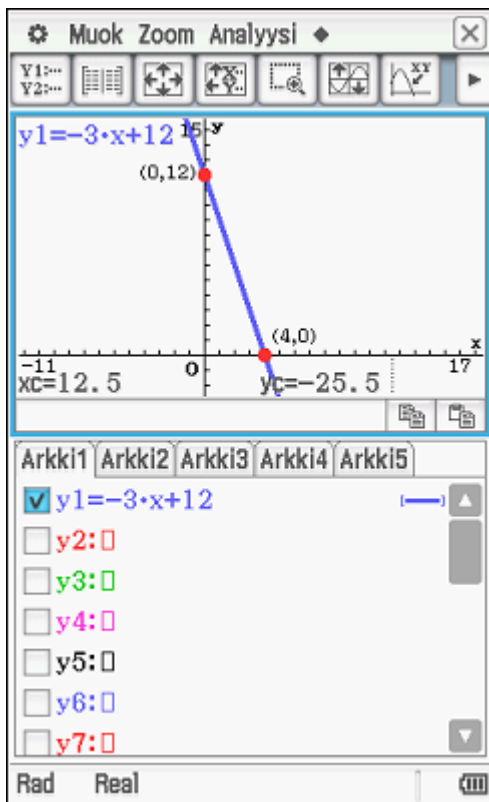
2. a) Missä pisteissä suora $y = -3x + 12$ leikkaa koordinaattiakselit?

b) Ratkaise yhtälöpari
$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + 2y = 1. \end{cases}$$

c) Suorakulmion kanta on 11 cm ja korkeus 7 cm. Sen kanta lyhenee 20 prosenttia, ja korkeus kasvaa 20 prosenttia. Kuinka monta prosenttia suorakulmion pinta-ala pienenee?

Kirjoittamalla suoran yhtälö **Käyrä & Taulukko –sovellukseen** suoran kuva voidaan piirtää ja akselien leikkauspisteet selvittää **Analyysi –valikon** graafisilla ratkaisutyökaluilla **Juuri** ja **y-akselin lp**.

Pääsovelluksen yhtälöparin avulla ratkeaa b) –kohta ja c) –kohta on suora prosenttilasku.



Vastaukset ovat

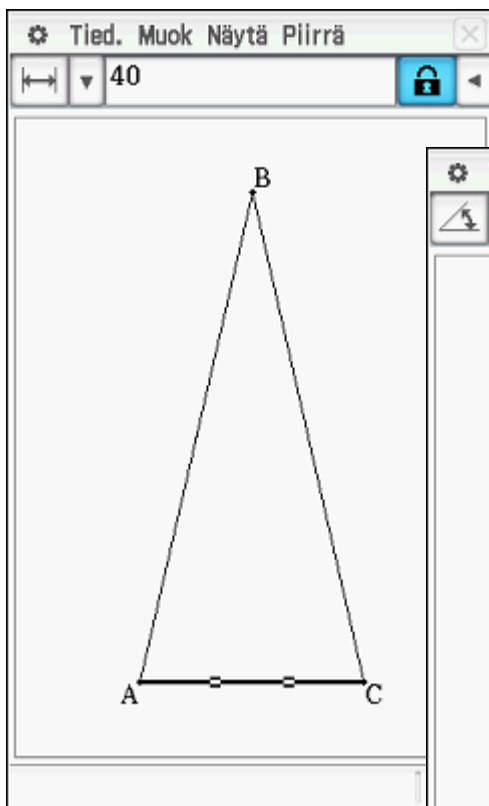
- a) $(0, 12)$ ja $(4, 0)$.
b) $\begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases}$
c) 4%.

Voit ottaa meihin helposti yhteyttä sähköpostitse

info@casio.fi

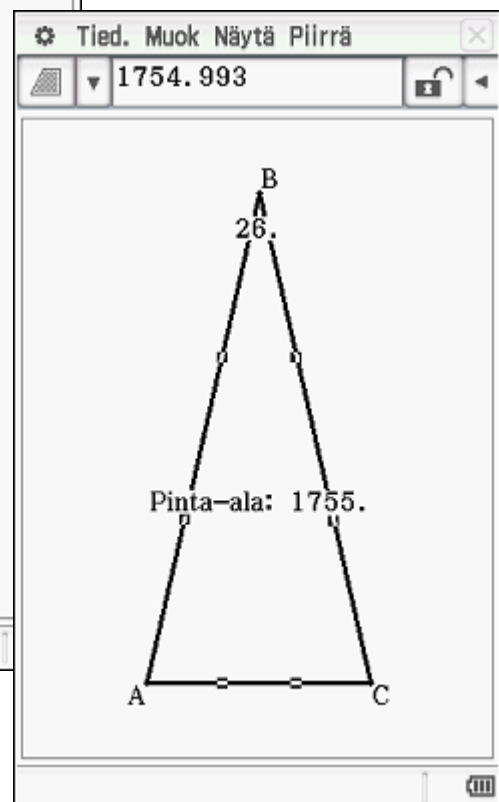
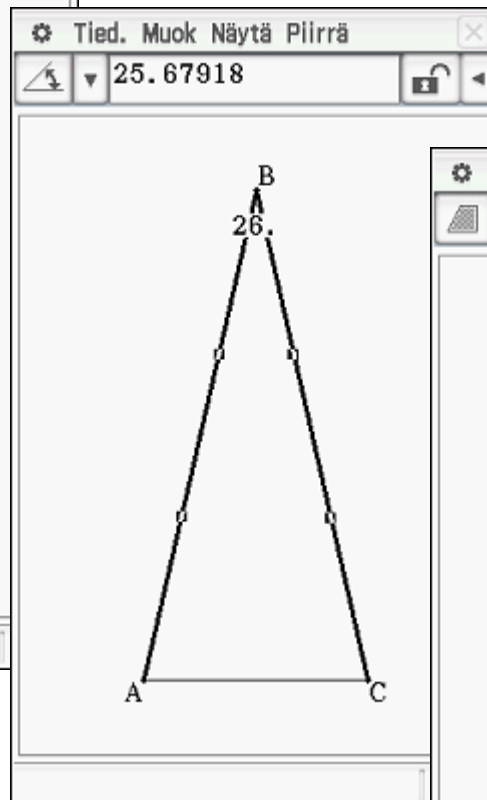
CASIO

3. Tasakylkisen kolmion kylki on 90 m ja kanta 40 m.
- Laske kolmion huippukulma asteen tarkkuudella.
 - Laske kolmion pinta-ala neliömetrin tarkkuudella.



Geometria-sovelluksessa voidaan määrittää kolmio annettujen mittojen mukaan. Valitsemalla kaksi kylkeä, saadaan huippukulman suuruus ja valitsemalla kolme kylkeä saadaan kolmion pinta-ala. Vastaustarkkuuden voi säätää asetuksista

Geometriamuoto -> Numeromuoto
-> Korj 0.



Vastaukset ovat

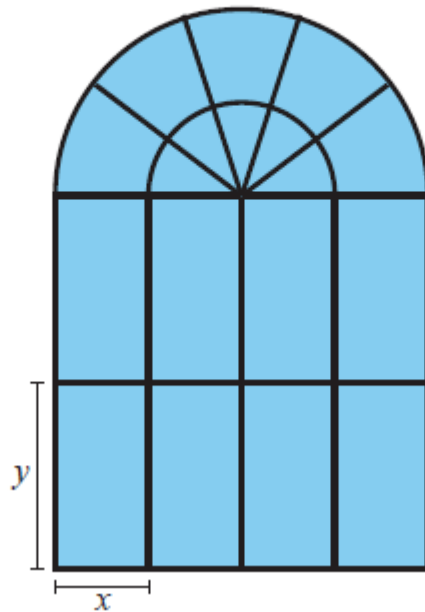
- 26° .
- 1755 m^2 .

Muista myös kansainvälinen pedagoginen sivustomme

edu.casio.com

CASIO

4. Kuvan kaari-ikkunassa on lasin tukena rimoja. Kuinka paljon rimaa tarvitaan kuvan mukaiseen kaari-ikkunaan, kun $x = 20$ cm ja $y = 40$ cm? Rimaa käytetään kaikkiin kuvion janoihin ja puoliympyröiden kaariin. Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.



Muodostetaan **Pääsovellukseen** rimojen yhteismitan lauseke ja sijoitetaan siihen annetut x :n ja y :n arvot. Vastaustarkkuuden voi säätää asetuksista **Perusmuoto** -> **Numeromuoto** -> **Korj 0**.

Muok Toiminto Interakt

$12x + 4x(2x) + 10y + \frac{1}{2}\pi(2x) + \frac{1}{2}\pi(4x) | \{x=20, y=40\}$

$60 \cdot \pi + 800$

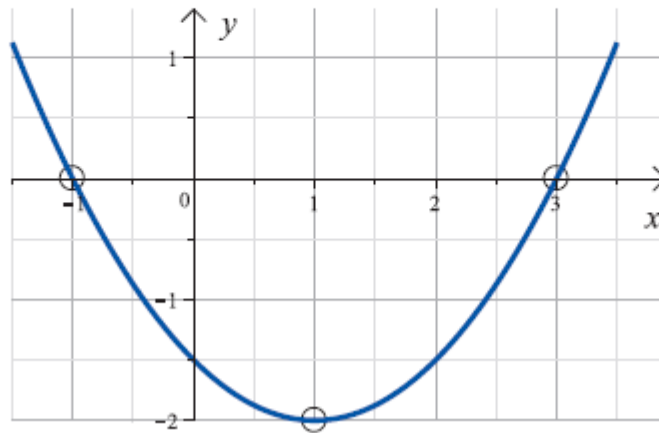
$988.$

Alg Desim. Real Rad

Vastaus on

$60\pi + 800 \approx 988$ cm.

5. Oheinen kuvaaja esittää paraabelia $y = ax^2 + bx + c$. Määritä vakiot a , b ja c käyttämällä kuvioon ympyröillä merkittyjä pisteitä.



Ratkaisu voidaan hakea joko yhtälöryhmällä **Pääsovelluksessa** tai muodostamalla toisen asteen regressioyhtälö annettujen koordinaattiparien avulla **Taulukkolaskenta-sovelluksessa**.

Muok Toiminto Interakt

$$\begin{cases} 0 = a(-1)^2 + b(-1) + c \\ -2 = a(1)^2 + b(1) + c \\ 0 = a(3)^2 + b(3) + c \end{cases} \quad a, b, c$$

$$\left\{ a = \frac{1}{2}, b = -1, c = -\frac{3}{2} \right\}$$

Mat.1	a	b	c	d	e	f
Mat.2	g	h	i	j	k	l
Mat.3	m	n	o	p	q	r
Trig	s	t	u	v	w	x
Var	y	z				CAPS
abc						

Alg Tarkka Real Rad

Tied. Muok Graaf Laske

	A	B	C
1	-1	0	
2	1	-2	
3	3	0	
4			
5			
6	$y = 0.5 \cdot x^2 - x - 1.5$		

$y = 0.5 \cdot x^2 - x - 1.5$

A6 $y = 0.5 \cdot x^2 - x - 1.5$

Vastaus on

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

9. Määritä funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 4]$.

Muok Toiminto Interakt

Define $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ done

fMin(f(x), x, -2, 4)
 {MinValue=-15, x=2}

fMax(f(x), x, -2, 4)
 {MaxValue=37, x=4}

fMin

fMin

fMin numeerisesti

Lauseke: f(x)

Muuttuja: x

Alku: -2

Lopp: 4

OK Peru

Pääsovelluksessa voidaan määrittää **Define**-komennolla funktion lauseke. Tämän jälkeen **Interaktiivisesta valikosta** kohdasta **Laskenta** -> **fMin/fMax** voidaan laskea suurin ja pienin arvo suljetulla välillä.

Tehtävä on mahdollista tehdä myös **Käyrä&Taulukko-sovelluksessa**. Syötetään funktion lauseke ja piirretään siitä kulkukaavio välille $[-2, 4]$ ja tutkitaan kulkukaaviosta välin päätepisteiden ja mahdollisten paikallisten ääriarvojen suuruudet.

Kuvaaja voidaan myös piirtää ja sovittaa automaattisesti annetulle välille.

Muok Kuvaaja

$y1 = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 5$

x	-2	-1
f'(x)	24	0
f(x)	1	12

37

Arkki1 Arkki2 Arkki3 Arkki4 Arkki5

$y1 = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 5$

y2: 0

y3: 0

y4: 0

y5: 0

y6: 0

y7: 0

Rad Real

Muok Zoom Analyysi

$y1 = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 5$

x	2	4
f'(x)	0	60
f(x)	-15	37

37

Rad Real

Vastaus on

pienin arvo -15, suurin arvo 37.

12. Korkeushyppääjän eri-ikäisenä saavuttamia tuloksia voidaan vertailla Seppo Sarnan laajasta tilastollisesta aineistosta kehittämän muunnoskaavan

$$T = t + k \lg \frac{a}{35}$$

avulla. Kaavassa t on hyppääjän saavuttama todellinen tulos a vuoden ikäisenä, T on muunnettu tulos ja k tilastomateriaaliin perustuva kerroin, jonka arvo on 201,4 cm. Korkeushyppästä tulokset ilmaistaan senttimetrin tarkkuudella.

- a) Raimo hyppäsi 19-vuotiaana juniorina tuloksen 196 cm, 23-vuotiaana ennätöksensä 200 cm ja 40-vuotiaana veteraanina tuloksen 175 cm. Aseta nämä tulokset paremmuusjärjestykseen, kun niitä verrataan muunnoskaavan avulla.
- b) Missä iässä hypätty tulos 175 cm on muunnettuna 233 cm? (233 cm oli sisäratojen miesten Suomen ennätys vuoden 2012 alussa.)

Numeerinen ratkaisin –sovellukseen voi syöttää minkä tahansa kaavan, johon suureiden numeeriset arvot syötetään. Ratkaistava suure valitaan ja kosketaan kynällä näppäintä **Solve**. Muuttujat kannattaa syöttää virtuaalinäppäimistön **Var** –välilehdeltä, jolloin kertomerkkejä ei tarvita.

The image shows four sequential screenshots of the 'Solve' function on a Casio calculator. Each window displays the equation $T = t + k \cdot \log_{10} \left(\frac{a}{35} \right)$ and allows solving for a different variable. The variables are set to $k = 201.4$, $t = 196$, and $a = 19$ in the first window, $t = 200$ in the second, $a = 23$ in the third, and $T = 233$ in the fourth. The results for T are 142.56567, 163.27668, 186.67957, and 67.9285204873878 respectively.

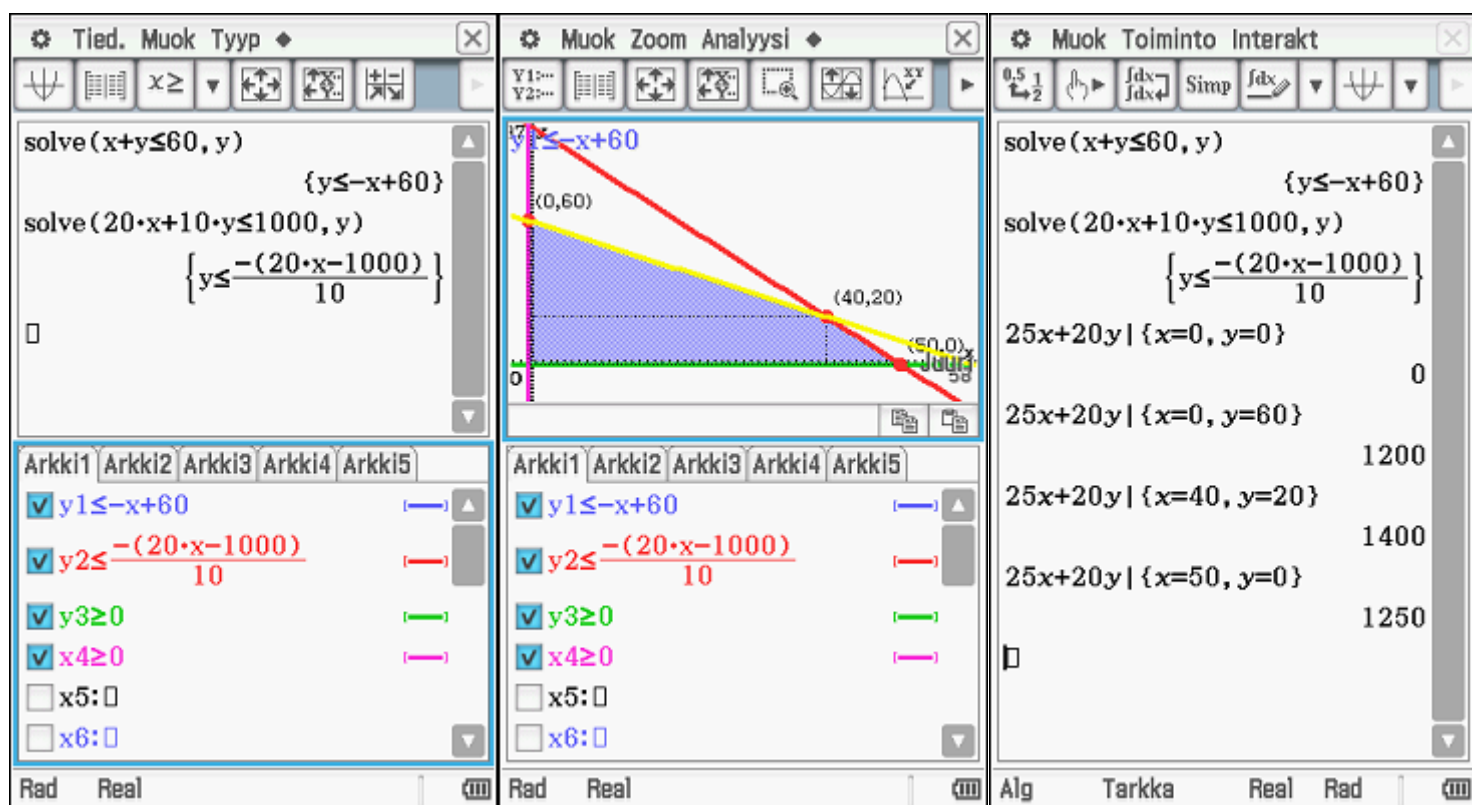
Vastaukset ovat

- a) 175 (muunnettu) > 200 (muunnettu) > 196 (muunnettu).
 b) n. 68-vuotiaana.

13. Eräessä tosi-TV-sarjassa kilpailijoiden tehtävänä on kerätä kulta- ja hopearahoja. Yhteensä niitä saa kerätä enintään 60 kappaletta. Kultarahan arvo on 25 € ja hopearahan arvo 20 €. Rahat täytyy kuljettaa ohuessa muovipussissa, joka kestää kolikoita vain yhden kilogramman verran. Yksi kultaraha painaa 20 grammaa ja hopearaha 10 grammaa. Kuinka monta kulta- ja hopearahaa kilpailijan kannattaa kerätä, jotta saaliin arvo on mahdollisimman suuri?

Merkitään kultarahojen määrää x ja hopearahojen määrää y . Ratkaistaan **Pääsovelluksessa** ehtoja vastaavista yhtälöistä y . Avataan **Pääsovelluksen** rinnalle **funktio luettelo** ja raahataan saadut ratkaisut luetteloon. Lisätään vielä lukumääristä johtuvat epänegatiivisuusehdot ja piirretään tilanteesta kuva. Asetusten kohdasta **Grafin muoto** -> **Epäyhtälön piirto** voi tarkistaa, piirretäänkö usean ehtoyhtälön unioni vai leikkaus.

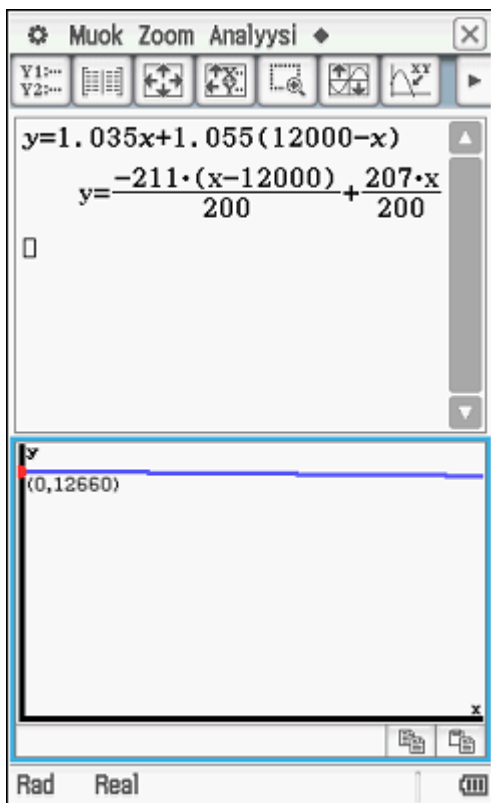
Analyysityökaluista voi laskea suorien leikkauspisteet toistensa ja akselien kanssa. Leikkauspisteiksi saadaan $(0, 60)$, $(40, 20)$, $(0, 0)$ ja $(50, 0)$. Muodostetaan muovipussin kestämiä rahojen arvon lauseke ja sijoitetaan saadut optimointialueen kulmapisteet siihen **Pääsovelluksessa**.



Vastaus on

40 kultarahaa ja 20 hopearahaa.

14. Abituri saattaa saada lahjoituksen, jonka suuruus on verojen jälkeen 12 000 €. Hän sijoittaa sen vuodeksi kahteen rahastoon, joiden vuotuiset korot ovat verojen jälkeen 3,5 % ja 5,5 %.
- a) Lahjoituksesta x euroa sijoitetaan 3,5 % tuoton tarjoavaan rahastoon ja loput toiseen rahastoon. Esitä koko sijoituksen arvo y muuttujan x avulla lausuttuna, kun $0 \leq x \leq 12\,000$.
- b) Piirrä a-kohdan funktion kuvaaja välillä $0 \leq x \leq 12\,000$.



Pääsovelluksessa voidaan tehdä sijoituksen arvoa kuvaava yhtälö ja raahata se koordinaatiston päälle piirtämistä varten. Kyseessä on laskeva suora, joka leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 12660)$.

Vastaus on

- a) $y = 1,035x + 1,055(12000 - x)$.
- b) Ks. kuva.



CASIO

15. Olkoot $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$ ja $\bar{b} = \bar{j} - 2\bar{k}$.

a) Laske $2|\bar{a}|^2 + 2|\bar{b}|^2$.

b) Laske $|\bar{a} + \bar{b}|^2 + |\bar{a} - \bar{b}|^2$.

Laskut voi tehdä suoraan Pääsovelluksessa.

Vastaukset ovat

a) 28.

b) 28.

The screenshot shows a Casio calculator interface with the following content:

- Buttons: Muok, Toiminto, Interakt, $\frac{0.5}{1} \rightarrow \frac{1}{2}$, \rightarrow , $\int dx \rightarrow$, $\int dx \downarrow$, Simp, $\int dx \leftarrow$, ∇ , ∇ , ∇ .
- Input: $[1 \ 2 \ 2] \Rightarrow a$
- Input: $[0 \ 1 \ -2] \Rightarrow b$
- Output: $\text{norm}(a)$ [1 2 2] 3
- Output: $\text{norm}(b)$ [0 1 -2] $\sqrt{5}$
- Output: $2 \times 3^2 + 2 \times \sqrt{5}^2$ 28
- Output: $\text{norm}(a+b)$ $\sqrt{10}$
- Output: $\text{norm}(a-b)$ $3 \cdot \sqrt{2}$
- Output: $\sqrt{10}^2 + (3 \cdot \sqrt{2})^2$ 28
- Bottom bar: Alg, Tarkka, Real, Rad, $\frac{\pi}{180}$.

Enemmän aikaa matematiikan opiskeluun,

vähemmän aikaa laskimen opetteluun.

CASIO

CASIO[®]

