CASIO

Laske Laudatur ClassPad.net -sovelluksella

Pitkä matematiikka, kevät 2019

Tiivistelmä

Kevään 2019 yo-kokeiden ratkaisut ClassPad.net sovelluksella laskettuina.
Työkalu löytyy osoitteesta https://classpad.net

Pepe Palovaara
pepe.palovaara@casio.fi

Hyvä lukija,

Casion selainpohjainen CAS-sovellus ClassPad.net auttaa ymmärtämään ja oppimaan matematiikkaa helpommin ja nopeammin kuin koskaan! Edessäsi on sillä ratkaistut kevään 2019 pitkän matematiikan tehtävät.

Kokeen rakenne oli entisellään, tosin pisteytys tehtävää kohden muuttui 6:sta 12:een mahdollistaen perustelujen aiempaa tarkemman pisteytyksen. Näin kokeen ohje asian kiteyttää:

”Koe koostuu 13 tehtävästä, joista vastataan kymmeneen. Tehtävät on jaettu kolmeen osaan. A-osassa on neljä kaikille pakollista tehtävää. B1-osassa on viisi tehtävää, joista vastataan kolmeen. B2-osassa on neljä tehtävää, joista vastataan kolmeen. Kaikki tehtävät arvostellaan pistein 0–12, joten kokeen maksimipistemäärä on 120.”

Mukana kokeessaoli myös tehtäviin liittyviä aineistoja. Tämä vihkonen on ladattavissa pdf-muodossa Casion kotisivuilta samoin kuin ClassPad.netin paperien linkit. Tukesi löytyy osoitteesta

http://www.casio-laskimet.fi

Casio Academy –videot soittolistalla

Tänä keväänä jo 4. kertaa pidetyssä Casio Academy -harjoittelupäivässä opiskelijoilla oli mahdollisuus harjoitella matematiikan yo-kokeisiin netin välityksellä matematiikan opettajien kera. Opiskelijoiden tukeminen ja opinnoissa auttaminen on meille tärkeää. Aiemmat malliratkaisut löytyvät tallenteina YouTubesta

https://bit.ly/casio-academy

ClassPad.net -sovellus

ClassPad.net on selainpohjainen sovellus, jossa on työkalut moneen matematiikan osa-alueeseen. Ohjelman peruskäyttö on ilmaista – riittää siirtyä sivulle https://classpad.net. Kaikki ominaisuudet voidaan ottaa käyttöön lunastamalla PLUS-tason käyttäjän vuosijäsenyys. Ohjelmaa kehitetään kovaa vauhtia, joten käyttöösi tulee uusia ominaisuuksia tasaiseen tahtiin!

Mukavia hetkiä yo-kokeiden ratkaisujen parissa!

Espoossa 26.4.2019

Pepe Palovaara

Nordic School Coordinator
Casio Scandinavia

A-osa

Ratkaise kaikki tämän osan tehtävät 1–4.

---

1. Lukujonojen määritelmiä (12 p.)

Aineisto:
1.A Luettelo: Lukujonot A–G

Yhdistä kukin lukujonon määritelmä 1.1.–1.6. siihen jonoon A–G, joka määritelmän perusteella saadaan. Kaikki jonot alkavat jäsenestä a_1, ja yksi vastausjono jää käyttämättä. Vastauksia ei tarvitse perustella.

1.1. $a_n = 2n - 1$ C. (1, 3, 5, 7, ...) (2 p.)

1.2. $a_n = n^2$ D. (1, 4, 9, 16, ...) (2 p.)

1.3. $a_n = n^3$ E. (1, 8, 27, 64, ...) (2 p.)

1.4. $a_n = 2^n$ G. (2, 4, 8, 16, ...) (2 p.)

1.5. $a_1 = 2$ ja $a_n = a_{n-1} + 2$, kun $n \geq 2$ F. (2, 4, 6, 8, ...) (2 p.)

1.6. $a_1 = 1, a_2 = 2$ ja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, kun $n \geq 3$ B. (1, 2, 3, 5, ...) (2 p.)

2. Vektorien pistetulo (12 p.)

Määritä sellainen vektori $\bar{c} = a\,\bar{i} + b\,\bar{j}$, että $\bar{c} \cdot (\bar{i} + \bar{j}) = 2$ ja $\bar{c} \cdot (\bar{i} - \bar{j}) = 3$.

Pitkä matematiikka K2019, tehtävä 2

Lasketaan annetut pistetulot, jolloin saadaan ehdot a+b=2 ja a-b=3. Ratkaistaan näiden ehtojen muodostama yhtälöpari.

$$\begin{cases} a+b=2 \\ a-b=3 \end{cases}_{a,b} \quad | \text{ lasketaan yhtälöt yhteen}$$

$$2a = 5 \quad | \text{ jaetaan luvulla 2}$$

$$a = \frac{5}{2} \quad | \text{ sijoitetaan 1. yhtälöön}$$

$$\frac{5}{2} + b = 2 \quad | \text{ ratkaistaan b}$$

$$b = -\frac{1}{2}.$$

Vastaus on vektori

$$\frac{5}{2}\bar{i} - \frac{1}{2}\bar{j}.$$

Opiskelijoiden tukena.

Katso tallenteet

bit.ly/casio-academy

Huom. A-osan tehtävissä ei ole käytössä laskinohjelmia. Tehtävien ratkaisut on silti havainnollistettu ClassPad.net -sovelluksen avulla käyttämättä sen laskuominaisuuksia. Samoin kuvaajat on piirretty ClassPad.netin avulla.

3. Luonnollinen logaritmi (12 p.)

Selvitä, kumpi lauseke on suurempi muuttujan arvoilla $x > 1$:

$$\ln(2x+1) - \ln(2x) \quad \text{vai} \quad \ln(x+1) - \ln x\,.$$

Pitkä matematiikka K2019, tehtävä 3 | Uusi paperi

Sovelletaan logaritmin laskusääntöjä:

$\ln(2x+1) - \ln(2x)$ | samankantaisten logaritmien erotus

$= \ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right)$ | jaetaan numerus termeittäin, $x>1$

$= \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$

$\ln(x+1) - \ln(x)$ | samankantaisten logaritmien erotus

$= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ | jaetaan numerus termeittän, $x>1$

$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

Logaritmifunktio on aidosti kasvava, joten se saa sitä suurempia arvoja, mitä suurempi on numerus.

Kun $x>1$, niin

$1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{2x}$.

Tämän vuoksi myös

$\ln(x+1) - \ln(x) > \ln(2x+1) - \ln(2x)$.

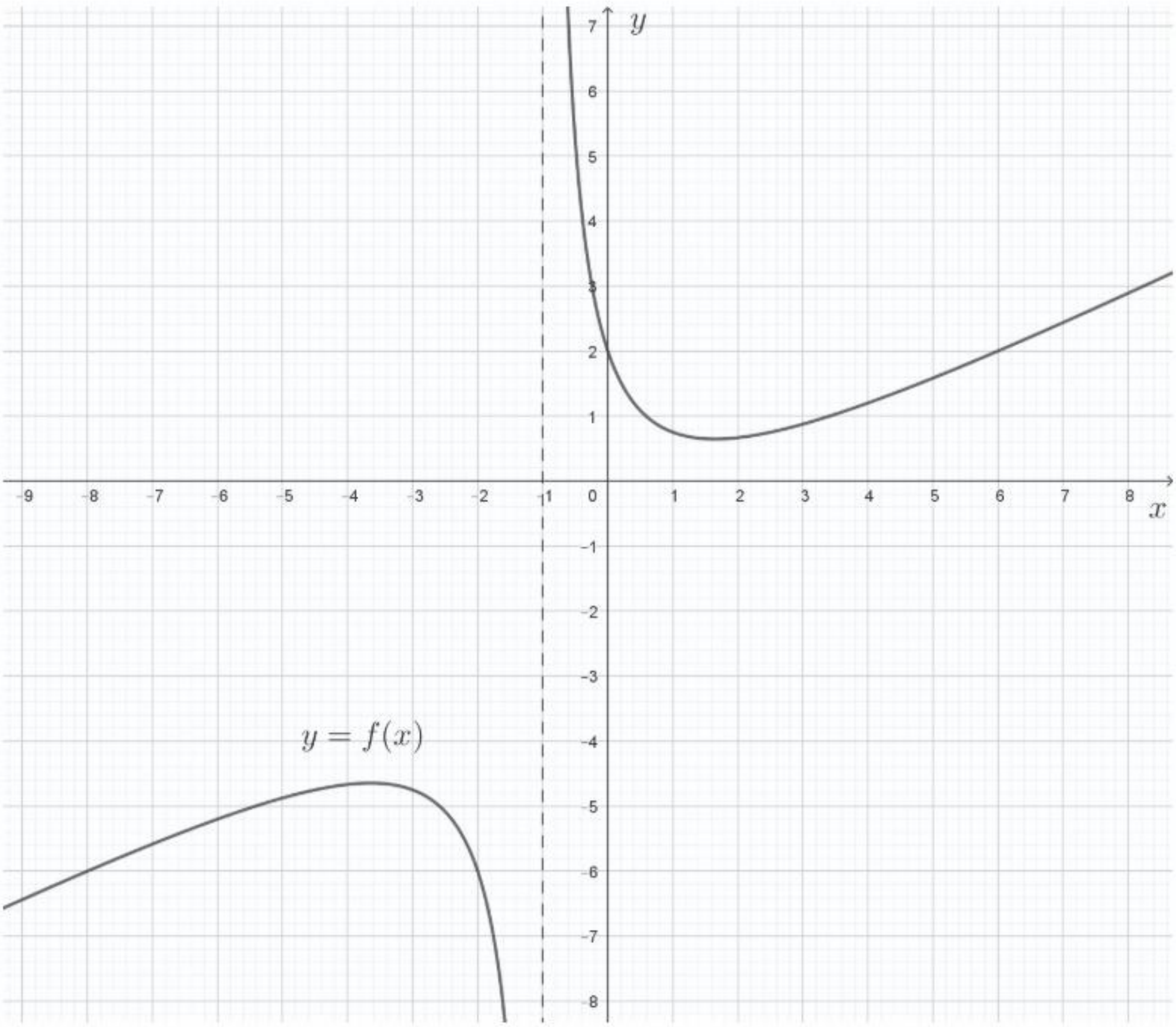
Aineisto:
4.A Kuva: Rationaalifunktion kuvaaja

Kuvassa 4.A on esitetty muotoa

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{2x + d}$$

olevan funktion kuvaaja $y = f(x)$, kun kertoimet a, b, c, ja d ovat kokonaislukuja.

Päättele kuvaajan perusteella kertoimien arvot ja selitä sanallisesti, miten päädyit ratkaisuun.



Lähde: YTL.

Pitkä matematiikka K2019, tehtävä 4 — Uusi paperi

Kohdassa x=-1 kuvaajalla on pystysuora asymptootti, joten x=1 on nimittäjän nollakohta ja samalla (x+1) on sellainen nimittäjän tekijä, jota ei voi supistaa. Tästä saadaan yhtälö

$$2\cdot(-1)+d=0 \Leftrightarrow d=2.$$

Kuvaaja leikkaa y-akselin pisteessä (0,2), joten saadaan yhtälö

$$\frac{a\cdot 0^2+b\cdot 0+c}{2\cdot 0+d}=2.$$

Sijoittamalla d=2 saadaan

$$\frac{c}{2}=2 \Leftrightarrow c=4.$$

Kuvaajalla on pisteet (-2,-6) ja (6,2), joten näiden pisteiden koordinaatit toteuttavat funktion kuvaajan yhtälön. Saadaan ehdot

$$\frac{a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+4}{2\cdot(-2)+2}=-6 \text{ ja}$$

$$\frac{a\cdot(6)^2+b\cdot(6)+4}{2\cdot(6)+2}=2,$$

joiden muodostamasta yhtälöryhmästä saadaan ratkaistua a ja b.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{4a-2b+4}{-2}=-6\\[2ex] \dfrac{36a+6b+4}{14}=2\end{array}\right| \begin{array}{l}\text{muokataan}\\ a,b\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l}4a-2b+4=12\\ 36a+6b+4=28\end{array}\right. \Big|\ a,b$$

$$\left\{\begin{array}{l}4a-2b=8\\ 36a+6b=24\end{array}\right. \Big|\ a,b$$

$$\left\{\begin{array}{l}12a-6b=24\\ 36a+6b=24\end{array}\right. \Big|\ a,b$$

$$\Rightarrow 48a=48 \Leftrightarrow a=1$$

$$\Rightarrow 4\cdot 1-2b=8 \Leftrightarrow b=-2$$

Kertoimet ovat siis a=1, b=-2, c=4 ja d=2.

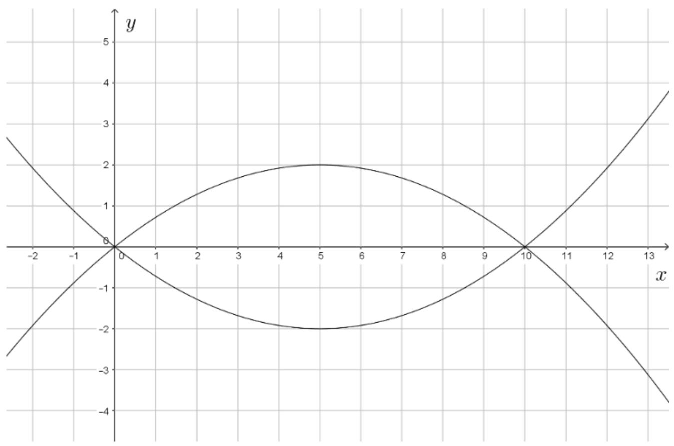
B1-osa Ratkaise kolme tehtävistä 5–9.

5. Paraabeleja pohjapiirroksessa (12 p.)

Aineisto:
5.A Kuva: Kalevalakehto
5.B Kuva: Koordinaatistopiirros

Suomalais-amerikkalainen arkkitehtiopiskelijaryhmä rakensi Helsingin Seurasaareen Kalevalakehto-nimisen rakennuksen (aineisto 5.A). Tulos oli niin onnistunut, että on keskusteltu toisenkin samantapaisen rakennuksen rakennuttamisesta. Uuden rakennuksen pohjan muotoa kuvaavat vastakkaisiin suuntiin aukeavat paraabelit, kuten koordinaatistopiirroksessa (aineisto 5.B). Pohjan pituus on 10 metriä ja leveys 4 metriä.

5.1. Muodosta paraabelien yhtälöt. (6 p.)
5.2. Laske rakennuksen pohjan pinta-ala. (6 p.)



Pitkä matematiikka K2019, tehtävä 5

Uusi paperi

a) Sijoitetaan ylöspäin avautuvan paraabelin huippu (5,-2) ja käyrän pisteenä origo (0,0) paraabelin huippumuotoiseen yhtälöön, jolloin yhtälö saadaan muotoon

$$0-(-2)=a\cdot(0-5)^2.$$

Ratkaistaan tästä yhtälöstä 2. asteen termin kertoimeksi

$$a=\frac{2}{25}, \text{ jolloin}$$

$$y=\frac{2}{25}x^2-\frac{4}{5}x.$$

Ratkaistaan alaspäin avautuvan paraabelin yhtälö samoin pisteen (0,0) ja huipun (5,2) avulla. Yhtälöstä

$$0-2=a\cdot(0-5)^2$$

saadaan ratkaistua kerroin

$$a=-\frac{2}{25}, \text{ jolloin}$$

$$y=-\frac{2}{25}x^2+\frac{4}{5}x.$$

b) Pohjan pinta-ala on paraabelien rajaama, joten se voidaan laskea integraalin avulla. Paraabelit leikkaavat muuttujan arvoilla x=0 ja x=10, joten pinta-ala saadaan laskemalla erotusfunktion itseisarvon integraali tällä välillä. Pinta-alan suuruus on n. 26,7 kuutiometriä.

$$\int_0^{10}\left|-\frac{2}{25}x^2+\frac{4}{5}x-\left(\frac{2}{25}x^2-\frac{4}{5}x\right)\right|dx$$

$$\frac{80}{3}$$

ans

26.66666667

6. Shakkilauta ja riisinjyvät (12 p.)

Shakkilaudassa on 8×8 ruudukko ja sitä ympäröi 5 cm leveä harmaa reuna. Ruudukon joka toinen ruutu on valkoinen ja joka toinen musta. Laudan koko reunoineen on 50 cm $\times$ 50 cm.

Laudalle pudotetaan satunnaisesti 30 riisinjyvää. Kuinka suurella todennäköisyydellä vähintään 15 riisinjyvän keskipiste osuu valkoiseen ruutuun?

Pitkä matematiikka K2019, tehtävä 6

Uusi paperi

Valkoisten ruutujen yhteisen pinta-alan osuus koko laudan pinta-alasta on

$$\frac{(50-2\cdot5)(50-2\cdot5)}{50\cdot50}=\frac{8}{25}$$

mikä on yhden jyvän valkoiselle ruudulle osumisen todennäköisyys.

Koska jyvät pudotetaan satunnaisesti, ovat riisinjyvien osumistodennäköisyydet toisistaan riippumattomia tapahtumia ja tehtävä voidaan ratkaista binomitodennäköisyyden avulla. Lasketaan P("Vähintään 15 jyvää osuu valkoiselle ruudulle") binomijakauman kertymäfunktion avulla (arvot 15-30, n=30, p=8/25):

$$\text{binomialcdf}\left(15{,}30{,}30,\frac{8}{25}\right)$$

0.03049725895

Todennäköisyys on n. 0,03.

CASIO

7. Polynomin itseisarvo (12 p.)

Anna esimerkki toisen asteen polynomista $ax^2 + bx + c$, jolle yhtälöllä $|ax^2 + bx + c| = 4$ on täsmälleen kolme ratkaisua. Muista myös perustella, miksi esimerkilläsi on vaadittu ominaisuus.

Vihje: Voi olla hyödyllistä piirtää tietokoneella funktion $f(x) = |ax^2 + bx + c|$ kuvaaja kertoimien a, b ja c eri arvoilla.

Pitkä matematiikka K2019, tehtävä 7 | Uusi paperi

Yhtälö voidaan tulkita niin, että paraabelin yhtälöstä otetun itseisarvon avulla saatu funktio leikkaa suoran y=4 kolmessa pisteessä.

Valitaan a>0, jolloin paraabeli avautuu ylöspäin. Sen kuvaaja kasvaa rajatta, kun x pienenee tai suurenee rajatta, joten paraabeli leikkaa suoran y=4 tasan kahdessa pisteessä, kunhan sen minimiarvo on alle 4.

Kolmas piste itseisarvofunktion ja suoran y=4 välille saadaan, kun asetetaan paraabelin huipun y-koordinaatiksi -4. Itseisarvo peilaa tämän pisteen x-akselin yläpuolelle suoralle y=4.

Esimerkki ehdot täyttävästä funktiosta saadaan arvoilla a=1, b=0 ja c=-4, jolloin funktion lauseke on

$$x^2 - 4.$$

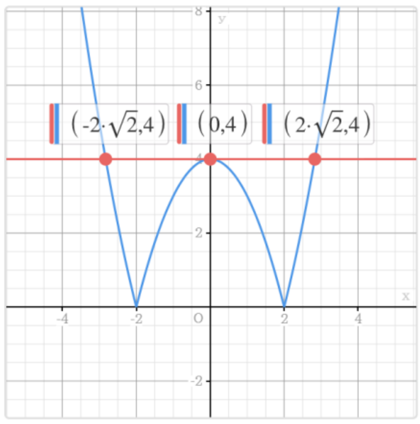
Tarkistetaan tulos ratkaisemalla annettu yhtälö muuttujan x suhteen, jolloin voidaan todeta yhtälöllä olevan 3 juurta.

$\text{solve}(|x^2-4|=4,x)$

$\{x=0, x=-2\cdot\sqrt{2}, x=2\cdot\sqrt{2}\}$

$y=|x^2-4|$

$y=4$



8. Kuinka monta nollaa? (12 p.)

Kuinka moneen nollaan päättyy luku

$$(10!)^{1\,000\,000} - (9!)^{1\,000\,000}\ ?$$

Pitkä matematiikka K2019, tehtävä 8 | Uusi paperi

Otetaan yhteiseksi tekijäksi luku

$$(9!)^{1000000}$$

jolloin luku saadaan muotoon

$$(9!)^{1000000}\cdot\left(10^{1000000}-1^{1000000}\right)$$

$$=362880^{1000000}\cdot\left(10^{1000000}-1\right).$$

$9!$

362880

Koska 9!=362880, on se jaollinen kymmenellä vain kerran ja luku

$$(9!)^{1000000}$$

päättyy miljoonaan nollaan. Koska luku

$$10^{1000000}-1$$

ei ole jaollinen kymmenellä, se ei päädy nollaan.

Niinpä alkuperäinen lukukin päättyy miljoonaan nollaan.

9. Veneen kulkema matka (12 p.)

Aineisto:
9.A Taulukko: Veneen nopeus

Matti seuraa moottoriveneen nopeusmittaria ja kirjaa veneen nopeuden 20 sekunnin välein. Tuloksena on taulukko 9.A.

Arvioi taulukon avulla veneen kulkemaa matkaa

$$s = \int_0^{200} v(t)\,dt$$

käyttämällä numeerisen integroinnin

9.1. puolisuunnikassääntöä (6 p.)
9.2. Simpsonin sääntöä. (6 p.)

9.A Taulukko: Veneen nopeus

aika *t*	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	sekuntia
nopeus *v(t)*	0	5	12	15	12	15	18	20	22	22	21	km/h

Lähde: YTL.

Pitkä matematiikka K2019, tehtävä 9.1

Uusi paperi

Muutetaan taulukon nopeudet yksikköön m/s jakamalla ne luvulla 3,6.

Kun lukuihin sovelletaan puolisuunnikasmenetelmää, saadaan integraalin likiarvoksi ja siis veneen kulkemaksi matkaksi n. 840m.

$$\frac{200-0}{10\cdot 3.6}\cdot\left(\frac{0}{2}+5+12+15+12+15+18+20+22+22+\frac{21}{2}\right)$$

841.6666667

Simpsonin menetelmällä matkaksi saadaan n. 850m.

$$\frac{200-0}{10\cdot 3\cdot 3.6}\cdot(0+4\cdot 5+2\cdot 12+4\cdot 15+2\cdot 12+4\cdot 15+2\cdot 18+4\cdot 20+2\cdot 22+4\cdot 22+21)$$

846.2962963

CASIO

10. Pohditaan sarjoja (12 p.)

10.1. Mikä seuraavassa päättelyssä on väärin?

$$\text{"Koska } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \text{ niin } \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = -1.\text{"}$$

(3 p.)

10.2. Määritä jokin sellainen luku $x \in \mathbf{R}$, että

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\tan(x))^n = \frac{3}{2}.$$

Anna vastaus radiaaneissa kolmen desimaalin tarkkuudella. (9 p.)

Pitkä matematiikka K2019, tehtävä 10 — Uusi paperi

10.1. Jälkimmäinen on geometrinen sarja, joka ei suppene. Suhdeluku q=2 eikä sille päde suppenevuus ehto |q|<1.

Silti sarjan summan laskemisessa on käytetty suppenevan geometrisen sarjan summakaavaa ja tämä on päättelyssä väärin.

10.2. Kyseess on oltava suppeneva geometrinen sarja, koska sillä on äärellinen raja-arvo. Suppenevan geometrisen sarjan summan avulla yhtälö saadaan muotoon

$$\frac{(\tan(x))^0}{1-\tan(x)} = \frac{3}{2}$$

eli

$$\frac{1}{1-\tan(x)} = \frac{3}{2}$$

Ratkaistaan tämä laskimella:

$$\text{solve}\left(\frac{1}{1-\tan(x)} = \frac{3}{2}, x\right)$$

$$\left\{x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \pi\cdot\text{constn}(1)\right\}$$

ans

$\{x=0.322+3.142\cdot\text{constn}(1.000$

Yksi ehdot täyttävä luku kolmen desimaalin tarkkuudella on 0,322.

11. Trigonometrinen yhtälö (12 p.)

Olkoot

$$f(x) = \cos(x)^{\sin(x)}$$

ja

$$g(x) = \sin(x)^{\cos(x)},$$

kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Osoita, että yhtälöllä $f(x) = g(x)$ on täsmälleen yksi ratkaisu, ja määritä se.

Pitkä matematiikka K2019, tehtävä 11 Uusi paperi

Koska kulma on 1. neljänneksessä, niin sin(x)>0 ja cos(x)>0. f'(x) on

$$\frac{d}{dx}\left(\cos(x)^{\sin(x)}\right)$$

$$\ln(\cos(x))\cdot(\cos(x))^{\sin(x)+1}-(\cos(x))^{\sin(x)-1}\cdot(\sin(x))^2$$

Käyttämällä potenssin laskusääntöjä lauseke saadaan muotoon

$$\ln(\cos(x))\cdot\cos(x)\cdot\cos(x)^{\sin(x)}-\cos(x)^{\sin(x)}\cdot\frac{(\sin(x))^2}{\cos(x)}$$

Ottamalla tästä yhteinen tekijä lauseke saadaan tulomuotoon

$$\cos(x)^{\sin(x)}\left(\ln(\cos(x))\cdot\cos(x)-\frac{(\sin(x))^2}{\cos(x)}\right)$$

f'(x)<0 ja f(x) on aidosti vähenevä funktio annetulla välillä, koska

(1) $\cos(x)^{\sin(x)}>0$

(2) välillä $0<x<\frac{\pi}{2}$ on $0<\cos(x)<1 \Rightarrow \ln(\cos(x))<0$

(3) $\Rightarrow \ln(\cos(x))\cdot\cos(x)<0$

(4) $\frac{(\sin(x))^2}{\cos(x)}>0 \Rightarrow \ln(\cos(x))\cdot\cos(x)-\frac{(\sin(x))^2}{\cos(x)}<0$

CASIO

Tutkitaan vastaavasti funktiota g(x). Nyt g'(x) on

$$\frac{d}{dx}\left(\sin(x)^{\cos(x)}\right)$$

$$-\ln(\sin(x))\cdot(\sin(x))^{\cos(x)+1}+(\cos(x))^2\cdot(\sin(x))^{\cos(x)-1}$$

Käyttämällä potenssin laskusääntöjä lauseke saadaan muotoon

$$-\ln(\sin(x))\cdot\sin(x)\cdot\sin(x)^{\cos(x)}+\sin(x)^{\cos(x)}\cdot\frac{(\cos(x))^2}{\sin(x)}$$

Ottamalla yhteinen tekijä saadaan derivaatan lauseke tulomuotoon

$$\sin(x)^{\cos(x)}\cdot\left(-\ln(\sin(x))\cdot\sin(x)+\frac{(\cos(x))^2}{\sin(x)}\right)$$

g'(x)>0 ja g(x) on aidosti kasvava funktio annetulla välillä, koska

(5) $\sin(x)^{\cos(x)}>0$

(6) välillä $0<x<\frac{\pi}{2}$ on $0<\sin(x)<1 \Rightarrow -\ln(\sin(x))>0$

(7) $\Rightarrow -\ln(\sin(x))\cdot\sin(x)>0$

(8) $\frac{(\cos(x))^2}{\sin(x)}>0 \Rightarrow -\ln(\sin(x))\cdot\sin(x)+\frac{(\cos(x))^2}{\sin(x)}>0$

Koska molemmat funktiot f(x) ja g(x) ovat jatkuvia annetulla välillä, f(x) on aidosti vähenevä ja g(x) aidosti kasvava funktio, niin niillä on korkeintaan yksi yhteinen piste.

Lasketaan funktioiden arvot kahdessa välin pisteessä (lasku oikealla).

Koska f(0.1)>g(0.1) ja f(1)<g(1), on funktioiden leikattava vähintään kerran annetun välin osavälillä 0.1<x<1.

Ehdoista seuraa, että yhtälöllä f(x)=g(x) on tasan yksi ratkaisu annetulla välillä. Symmetrian nojalla ratkaisun on oltava annetun välin puolivälissä eli muuttujan arvolla

$$\frac{\pi}{4}=0.785...$$

Tarkistetaan laskimella juuren arvo (lasku alla).

$$\text{solve}\left(\cos(x)^{\sin(x)}=\sin(x)^{\cos(x)}\right)\mid 0<x<\frac{\pi}{2}$$

{x=0.7853981634}

$f(x):=\cos(x)^{\sin(x)}$

done

$f(0.1)$

0.9995001237

$f(1)$

0.5956918283

$g(x):=\sin(x)^{\cos(x)}$

done

$g(0.1)$

0.1009893057

$g(1)$

0.9109582586

12. Kolmion piirin ja pinta-alan suhde (12 p.)

Aineisto:
12.A Tiedosto: Dynaaminen kolmio

Erään kolmion piiri on p ja sen pinta-ala on A. Toisen, tasasivuisen kolmion piiri on myös p ja sen pinta-ala on B. Osoita, että $A \leq B$.

Voit käyttää aineistoa 12.A tehtävän tilanteen hahmottamiseksi, mutta tämä ei ole välttämätöntä ratkaisun kannalta. Muista myös, että pelkät kokeilut eivät riitä matemaattisen väitteen perusteluksi.

Pitkä matematiikka K2019, tehtävä 12 | Uusi paperi

Heronin kaavalla kolmion pinta-ala on

$$A = \sqrt{s\cdot(s-a)(s-b)(s-c)}$$

missä s>0 on puolet kolmion piiristä p ja a, b ja c kolmion sivujen pituudet. Sivu c voidaan kirjoittaa 2s-a-b ja kolmion pinta-alalle saadaan muoto

$$A = \sqrt{s\cdot(s-a)(s-b)(a+b-s)}$$

Lasketaan kolmion pinta-alan derivaatta sivujen a ja b suhteen:

$$A(a,b) := \sqrt{s\cdot(s-a)(s-b)(a+b-s)}$$

done

$$\frac{d}{da}(A(a,b))$$

$$\frac{2\cdot s^3+b^2\cdot s-2\cdot a\cdot s^2-3\cdot b\cdot s^2+2\cdot a\cdot b\cdot s}{2\cdot\sqrt{s\cdot(a+b-s)\cdot(a-s)\cdot(b-s)}}$$

simplify(ans)

$$\frac{s\cdot(b-s)\cdot(2\cdot a+b-2\cdot s)}{2\cdot\sqrt{s\cdot(a+b-s)\cdot(a-s)\cdot(b-s)}}$$

$$\frac{d}{db}(A(a,b))$$

$$\frac{2\cdot s^3+a^2\cdot s-3\cdot a\cdot s^2-2\cdot b\cdot s^2+2\cdot a\cdot b\cdot s}{2\cdot\sqrt{s\cdot(a+b-s)\cdot(a-s)\cdot(b-s)}}$$

simplify(ans)

$$\frac{s\cdot(a+2\cdot b-2\cdot s)\cdot(a-s)}{2\cdot\sqrt{s\cdot(a+b-s)\cdot(a-s)\cdot(b-s)}}$$

Koska derivaatoissa s>0, b-s<0 ja a-s<0 (yksi sivu ei voi olla puolta kolmion piiristä), niin derivaattojen ainoista nollakohdista saadaan yhtälöryhmä, josta voidaan ratkaista a ja b:

$$\begin{cases} 2a+b-2s=0 \\ a+2b-2s=0 \end{cases}\Big|_{a,b}$$

$$\left\{a=\frac{2\cdot s}{3}, b=\frac{2\cdot s}{3}\right\}$$

Derivaatan nollakohtien on edustettava pinta-alan maksimikohtaa, koska pintalan funktion arvot kasvavat nollasta maksimikohtaan asti ja sen jälkeen vähenevät takaisin nollaan.

Koska kolmannen sivun pituus on

$$c = p - a - b$$

$$c = 2s - \frac{2s}{3} - \frac{2s}{3}$$

$$c = \frac{2s}{3},$$

on kolmio A tasasivuinen.

Siis kolmion pinta-alan maksimiarvo suhteessa piirin pituuteen saavutetaan tasakylkisessä kolmiossa.

Tästä seuraa väite.

13. Epäyhtälöitä (12 p.)

13.1. Olkoot $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$. Osoita, että $2a_1 a_2 \leq a_1^2 + a_2^2$. (3 p.)

13.2. Olkoot $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$. Osoita, että

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^4\right)^{\frac{1}{4}}.$$

(9 p.)

Pitkä matematiikka K2019, tehtävä 13

Uusi paperi

13.1. Koska

$$(a_1 - a_2)^2 = a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 \geq 0,$$

niin siirtämällä termejä epäyhtälössä

$$a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a_2.$$

Näin väite on todistettu.

13.2. Muokataan tehtävän epäyhtälöä:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^4\right)\right)^{\frac{1}{4}} \quad | \text{ korotetaan puolittain potenssiin 4, puolet } \geq 0$$

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\right)\right)^{2} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^4\right)\right)^{1} \quad | \text{ kerrotaan puolittain luvulla } n^2 > 0$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\right)\right)^{2} \leq n \cdot \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^4\right) \quad | \text{ yksinkertaistetaan lausekkeita sijoittamalla } a_k^2 = b_k \ (1)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left(b_k\right)\right)^{2} \leq n \cdot \sum_{k=1}^{n}\left(b_k^2\right) \quad | \text{ avataan summlausekkeiden rakennetta}$$

$$b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 + 2b_1b_2 + 2b_1b_3 + \ldots + 2b_1b_n + 2b_2b_3 + \ldots + 2b_2b_n + \ldots + 2b_{n1}b_n \leq nb_1^2 + nb_2^2 + \ldots + nb_n^2$$

$$2b_1b_2 + 2b_1b_3 + \ldots + 2b_1b_n + 2b_2b_3 + \ldots + 2b_2b_n + \ldots + 2b_{n1}b_n \leq (n-1)b_1^2 + (n-1)b_2^2 + \ldots + (n-1)b_n^2$$

$$0 \leq (n-1)b_1^2 - 2b_1b_2 + (n-1)b_2^2 + (n-1)b_1^2 - 2b_1b_3 + (n-1)b_3^2 + \ldots + (n-1)b_{n1}^2 - 2b_{n1}b_n + (n-1)b_n^2 \quad | :(n-1)$$

$$0 \leq b_1^2 - \frac{2b_1b_2}{n-1} + b_2^2 + b_1^2 - \frac{2b_1b_3}{n-1} + b_3^2 + \ldots + b_{n1}^2 - \frac{2b_{n1}b_n}{n-1} + b_n^2$$

Sekatermit ovat korkeintaan nollia, joten ne pienenevät tai pysyvät samansuuruisina, kun nimittäjä n-1>0 poistetaan.

$$0 \leq b_1^2 - 2b_1b_2 + b_2^2 + b_1^2 - 2b_1b_3 + b_3^2 + \ldots + b_{n1}^2 - 2b_{n1}b_n + b_n^2 \leq \text{alkuperäinen lauseke}$$

$$0 \leq (b_1 - b_2)^2 + (b_1 - b_3)^2 + \ldots + (b_{n1} - b_n)^2$$

Tämä on 13.1. kohdan nojalla tosi kaikille reaaliluvuille, joten tulos pätee myös lukujen neliöille eli sijoitukselle (1).