Teemme työstäsi helpompaa.

Laske Laudatur ClassPadilla

Pitkä matematiikka, kevät 2018

Casio Scandinavia

Keilaranta 17 | 02150 Espoo | info@casio.fi

Hyvä lukija,

Viimeinen paperille kokonaisuudessaan vastattu kevään ylioppilaskoe matematiikassa on nyt tehty! Keväästä 2019 alkaen vastausvälineenä niin A- kuin B-osan tehtäviinkin on tietokone.
Toki suttupaperia saa käyttää ja B-osassa laskinkin saa olla mukana -vastaukset kuitenkin siirretään YTL:n sähköiseen vastauskenttään Abitissa.

A-osion tehtävien ratkaisut tätä vihkoa varten on tehty ClassPadin avulla, vaikka kokelaat tekivätkin ne käsin ja ilman laskinta. A-osassa eActivity-sovellusta on käytetty vain teksti- ja matematiikka-editorina eikä sen avulla ole ratkaistu mitään laskuja. Tämä vastaa käsin paperille tehtyjä ratkaisuja. B-osiossa on hyödynnetty CAS-laskentaa.

Tämä vihkonen on ladattavissa pdf-muodossa ja kaikki tehtävien ratkaisut ovat saatavilla myös ClassPadin tiedostoina (.xcp) Casion kotisivuilta. ClassPadin tiedostot aukeavat suoraan eActivity -sovellukseen kaksoisklikkaamalla ja niitä voi vapaasti muokata. Tiedostot voidaan myös siirtää laskimeen. Tukesi pähkinänkuoressa löytyy osoitteesta

http://www.casio-laskimet.fi

Casio Academy – videot soittolistalla

Syksyllä 2017 Casio avasi uuden palvelun, jossa opiskelijoilla oli mahdollisuus harjoitella matematiikan yo-kokeisiin netin välityksellä matematiikan opettajien laskiessa aiempien yo-kokeiden tehtäviä ja vastaillessa opiskelijoiden kysymyksiin. Opiskelijoiden tukeminen ja opinnoissa auttaminen on meille tärkeää. Toiminta jatkui tänä keväänä ja viime syksyiset malliratkaisut löytyvät jo tallenteina YouTubesta osoitteesta

https://bit.ly/casio-academy

ClassPad Manager (Win, Mac, iOS, Android)

Siirtyminen ClassPadin kämmenlaitteesta fx-CP400 tietokoneohjelman ClassPad Manager käyttöön ei vaadi käyttäjältä kummoisia toimia. Laskin itsessään on jo kuin tablettilaite: suuri kosketus-näyttö, näkymä vaakaan ja pystyyn, käyttö sormella tai kosketuskynällä, komennot alasveto-valikoista, jne. Nyt työtilan kooksi saadaan koko näyttö ja tiedostojen siirtely on nopeampaa!

Mukavia hetkiä kevään 2018 yo-ratkaisujen parissa,

Espoossa 27.3.2018

Pepe Palovaara

1. Merkitään $f(x) = x^3 - x$. Laske **a)** $f(-2)$, **b)** $f'(3)$ ja **c)** $\int_0^4 f(x)\,dx$.

Tehtävä 1

a) $f(-2)=(-2)^3-(-2)=-8+2=-6$.

b) $f'(x)=3x^2-1$ ja $f'(3)=3*3^2-1=27-1=26$.

c) $F(x)=\int_{\square}^{\square} x^3-x dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+C$ ja $\int_0^4 f(x)dx=F(4)-F(0)=\frac{1}{4}*4^4-\frac{1}{2}*4^2-0=56$.

2. Toisen asteen polynomifunktiolle voidaan käyttää kahta erilaista esitystapaa.

$$\text{Summamuoto:} \quad ax^2 + bx + c.$$
$$\text{Tulomuoto:} \quad a(x - x_1)(x - x_2).$$

a) Muokkaa polynomi $2(x-6)(x-9)$ summamuotoon.
b) Muokkaa polynomi $x^2 + x - 12$ tulomuotoon.
c) Osoita, että $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, jos x_1 ja x_2 ovat polynomin $ax^2 + bx + c$ nollakohdat.

Tehtävä 2

a) $2(x-6)(x-9)=2(x^2-9x-6x+54)=2x^2-30x+108$.

b) Ratkaistaan yhtälön $x^2+x-12=0$ juuret esim. neliöksi täydentämällä:

$x^2+2*\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=12+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{49}{4} \Leftrightarrow x+\frac{1}{2}=\pm\frac{7}{2} \Leftrightarrow x=-4$ tai $x=3$.

Nyt tulomuoto on $(x+4)(x-3)$.

c) Koska x_1 ja x_2 ovat polynomin nollakohtia, niin polynomi voidaan kirjoittaa niiden avulla tulomuotoon $a(x-x_1)(x-x_2)$. Tämä summamuodossa on $ax^2+a(-x_1-x_2)x+ax_1x_2$. Polynomit ax^2+bx+c ja $ax^2+a(-x_1-x_2)x+ax_1x_2$ ovat samat, joten niiden termien kertoimien pitää olla samat. Vakiotermeistä saadaan yhtälö $c=ax_1x_2 \Leftrightarrow \frac{c}{a}=x_1x_2$. Siis juuten tulo on vakiotermi jaettuna 2. asteen termin kertoimella.

3. Määritä funktion $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ suurin ja pienin arvo välillä $0 \leq x \leq 2\pi$.

Tehtävä 3

Funktio on jatkuva ja derivoituva koko tarkasteluvälillä, joten sen suurin ja pienin arvo löytyvät välin päätepisteistä tai vastaavalle avoimelle välille kuuluvista derivaatan nollakohdista.

$f'(x)=\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)=0 \Leftrightarrow \cos(x)=\sqrt{3}\sin(x) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}=\tan(x)$,

ehdolla $\cos(x)\neq 0$. Yhtälön ratkaisut välillä $]0,2\pi[$ ovat $x=\frac{\pi}{6}$ ja $x=\frac{7\pi}{6}$.

Lisäksi pitää tutkia nimittäjän nollakohdat $x\neq\frac{\pi}{2}$ ja $x\neq\frac{3\pi}{2}$, koska yhtälö jaettiin puolittain lausekkeella $\cos(x)$ eikä nollalla saa jakaa.

$f(0)=\sin(0)+\sqrt{3}\cos(0)=0+\sqrt{3}*1=\sqrt{3}$

$f(2\pi)=\sin(2\pi)+\sqrt{3}\cos(2\pi)=\sqrt{3}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+\sqrt{3}*0=1$

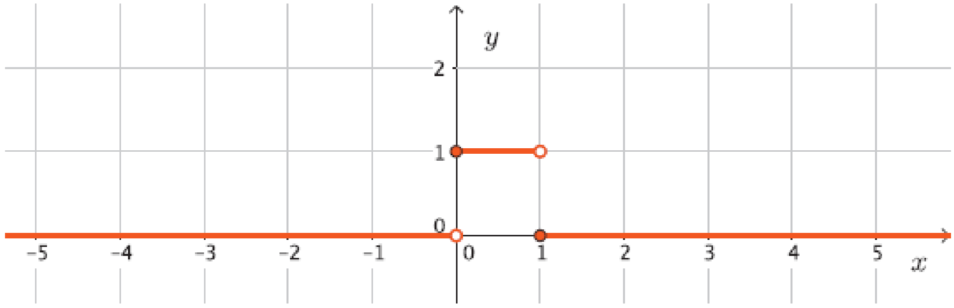
$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1+\sqrt{3}*0=-1$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{3}*\frac{\sqrt{3}}{2}=2$

$f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}+\sqrt{3}*\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2$

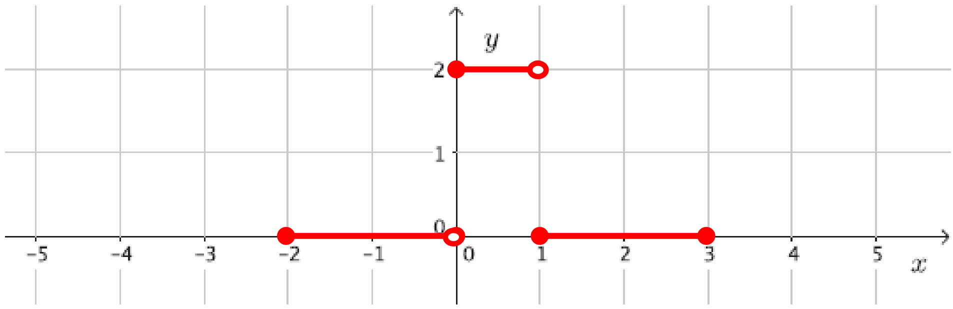
Suurin arvo on 2 ja pienin arvo -2.

4. Ikkunafunktioiden avulla voidaan kuvata esimerkiksi ajastimen toimintaa. Oheisessa kuviossa on erään tällaisen funktion $f(x)$ kuvaaja punaisella piirrettynä.

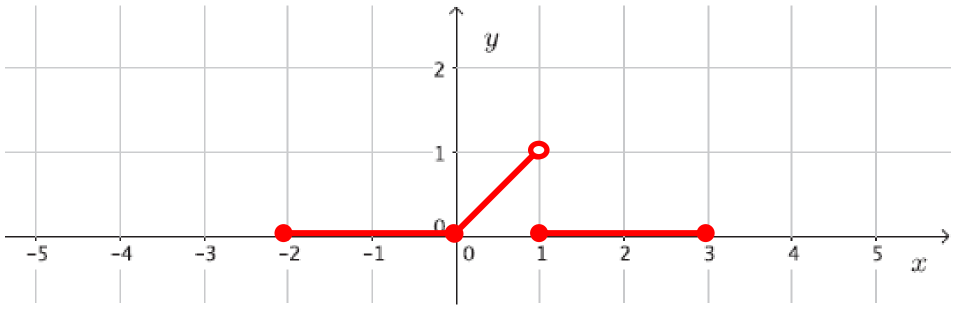


Piirrä alla oleviin koordinaatistoihin annettujen funktioiden kuvaajat välillä $-2 \leq x \leq 3$. Perusteluja ei vaadita.

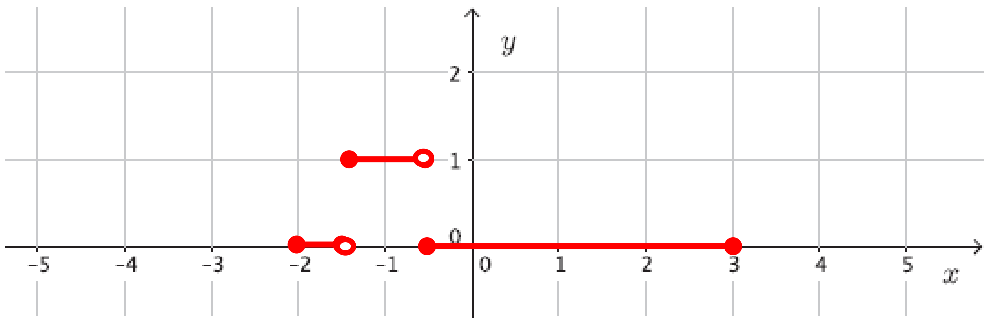
a) $g(x) = 2f(x)$



b) $h(x) = xf(x)$



c) $k(x) = f(x + \frac{3}{2})$



5. a) Muodosta sen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on $(2, 1)$ ja säde 2. Laske ympyrän niiden pisteiden y-koordinaatit, joiden x-koordinaatti on 1.

b) Määritä a-kohdan ympyrän pienin etäisyys suorasta $3y = 4x + 20$.

Tehtävä 5

a) Ympyrän yhtälö on $(x-2)^2+(y-1)^2=4$. Kun x-koordinaatti on 1, voidaa y-koordinaatit ratkaista yhtälöstä.

solve$((1-2)^2+(y-1)^2=4, y)$

$$\{y=-\sqrt{3}+1, y=\sqrt{3}+1\}$$

Kysytyt y-koordinaatit ovat $y=-\sqrt{3}+1$ ja $y=\sqrt{3}+1$.

b) Tutkitaan aluksi yhtälöparin avulla, leikkaako suora ympyrän.

$$\left\{\begin{array}{l}(x-2)^2+(y-1)^2=4 \\ 3y=4x+20\end{array}\right|_{x, y}$$

No Solution

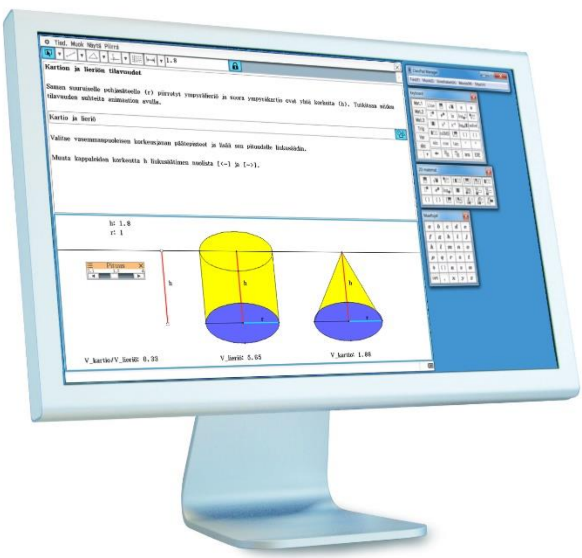
Koska suora ja ympyrä eivät leikkaa, saadaan kysytty etäisyys laskemalla ympyrän keskipisteen etäisyys suorasta ja vähentämällä tästä säde 2:

$$\frac{|4*2-3*1+20|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}-2$$

$$3$$

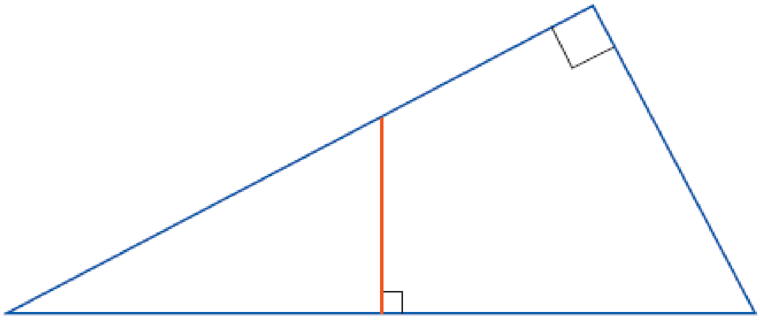
Ympyrän etäisyys suorasta on 3.

Nämäkin tehtävät on ratkaistu ClassPad-teknologian avulla.



CASIO

6. Suorakulmaisen kolmion toinen terävä kulma on 30 astetta. Kolmion hypotenuusan keskipisteeseen piirretään kuvion mukaisesti kohtisuora jana, jonka toinen päätepiste sijaitsee kolmion kateetilla. Laske niiden kahden osan pituuksien suhde, joihin kohtisuora jakaa kateetin.



Tehtävä 6

Yhdenmuotoisista kolmioista (90° ja yhteinen kärki 30°) ja muistikolmiosta saadaan suhde selville. Jos merkitään ison kolmion lyhyempää kateettia a, niin hypotenuusa on 2a ja pidempi kateetti $\sqrt{3}a$.

Pienemmässä kolmiossa pidempi kateetti on siis a (2a-mittaisen sivun keskipiste), lyhyempi kateetti on $\frac{a}{\sqrt{3}}$ ja hypotenuusa $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Kysytty suhde on

$$\frac{\frac{2a}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}a-\frac{2a}{\sqrt{3}}}$$

2

Vastaus: 2:1.

7. Lotto-peli alkoi Suomessa vuonna 1971, ja sen sääntöjä on muutettu useita kertoja vuosien varrella. Viimeisin sääntöuudistus tehtiin vuoden 2016 lopussa.

Ennen uudistusta arvottiin 7 varsinaista ja 2 lisänumeroa 39 numerosta. Uudistuksen jälkeen arvotaan 7 varsinaista ja vain 1 lisänumero 40 numerosta. Seuraavassa loton pelaaja täyttää yhden lottorivin eli käytännössä valitsee 7 numeroa.

Laske tuloksen "6 + 1" todennäköisyys ennen uudistusta ja sen jälkeen. Tässä "6 + 1" tarkoittaa tulosta, jossa on kuusi varsinaista ja yksi lisänumero oikein.

Tehtävä 7

Ennen uudistusta todennäköisyys saada 6 oikein 7 arvotusta numerosta ja 1 oikein 2 lisänumerosta on

$$\frac{\mathrm{nCr}(7,6)*\mathrm{nCr}(2,1)}{\mathrm{nCr}(39,7)}$$

$$\frac{14}{15380937}$$

$$\frac{14}{15380937}$$

9.102176285E-7

Uudistuksen jälkeen vastaavan tuloksen todennäköisyys on

$$\frac{\mathrm{nCr}(7,6)*\mathrm{nCr}(1,1)}{\mathrm{nCr}(40,7)}$$

$$\frac{7}{18643560}$$

$$\frac{7}{18643560}$$

3.754647717E-7

Todennäköisyys tulokselle 6+1 ennen vuoden 2016 uudistusta oli $\frac{14}{15380937}$ ja uudistuksen jälkeen $\frac{7}{18643560}$.

8. Jyrki on 23-vuotias, ja hänellä on kolme nuorempaa sisarusta, joiden ikien tulo on 156. Minkä ikäisiä Jyrkin sisarukset ovat? Esitä kaikki kokonaislukuratkaisut.

Tehtävä 8

Jaetaan luku 156 alkutekijöihinsä:

factor(156)

$$2^2 \cdot 3 \cdot 13$$

Otetaan mukaan triviaali tekijä 1 ja tutkitaan, kuinka näistä luvuista voidaan muodostaa sisarten iät. Koska Jyrki oli 23-vuotias, vanhin heistä voi olla 13-vuotias ja samalla yhden heistä on oltava 13-vuotias. Jotta ikien tuloksi saadaan 156, on kahden nuorimman sisaren ikien tulon oltava 12. Mahdolliset vaihtoehdot ovat muiden sisarten iiksi ovat

1) 1, 12 ja 13-vuotiaat
2) 2, 6 ja 13-vuotiaat
3) 3, 4 ja 13-vuotiaat

9. Tarkastellaan funktiota, jonka derivaattafunktio on myös derivoituva. Soveltamalla Newtonin menetelmää derivaattafunktioon saadaan selville funktion mahdollisen paikallisen ääriarvokohdan likiarvo.

Selvitä Newtonin menetelmällä funktion

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 2x^2 + x$$

mahdolliset ääriarvokohdat välillä $]0, 2[$. Käytä alkuarvoa 0,5, laske kolme iteraatiota ja anna tulos viiden merkitsevän numeron tarkkuudella. Laske toinen mahdollinen ääriarvokohta samalla tavalla alkuarvoa 1,5 käyttäen. Määritä näiden tulosten avulla funktion $f(x)$ paikalliset ääriarvot välillä $]0, 2[$ neljän merkitsevän numeron tarkkuudella.

Tehtävä 9

Määritetään funktio f(x)

Define $f(x)=\frac{1}{5}x^5-2x^2+x$

done

sen 1. derivaattafunktio f1(x)

Define $f1(x)=\frac{d}{dx}(f(x))$

done

ja sen 2. derivaattafunktio f2(x)

Define $f2(x)=\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$

done

Tutkitaan Newtonin menetelmällä derivaattafunktion f1(x) nollakohtia välillä]0,2[.
Alkuarvolla x=0.5 saadaan 3 iteroinnilla

0.5

0.5

$x-\frac{f1(x)}{f2(x)}|x=ans$

0.2321428571

$x-\frac{f1(x)}{f2(x)}|x=ans$

0.2509614668

$x-\frac{f1(x)}{f2(x)}|x=ans$

0.2509921574

ja alkuarvolla x=1.5 saadaan 3 iteroinnilla

1.5

1.5

$x-\frac{f1(x)}{f2(x)}|x=ans$

1.493421053

$x-\frac{f1(x)}{f2(x)}|x=ans$

1.493358562

$x-\frac{f1(x)}{f2(x)}|x=ans$

1.493358557

Derivaattafunktion f1(x) nollakohdat ovat 5 merkitsevän numeron tarkkuudella kolmella iterointikerralla x≈0.25099 ja x≈1.4934.

Tutkitaan, vaihtaako derivaattafunktio f1(x) merkkiään nollakohdissa:

f1(0)

1

f1(1)

−2

f1(2)

9

Ensimmäinen nollakohdista on paikallinen maksimikohta ja jälkimmäinen paikallinen minimikohta, koska derivaatan f1(x) merkki vaihtuu positiivisesta negatiiviseksi ja sitten negatiivisesta positiiviseksi. Ääriarvojen likiarvot ovat

f(0.25099)

0.1251972502

f(1.4934)

−1.481456881

Paikallinen maksimiarvo on neljän merkitsevän numeron tarkkuudella 0.1252 ja paikalinen minimiarvo −1.481.

10. Annukka ja Fareed yrittävät laskea seuraavien vektoreiden pistetulon ilman laskinta:

$$\overline{u} = 7\cos\tfrac{\pi}{5}\,\overline{i} + 7\sin\tfrac{\pi}{5}\,\overline{j} \quad \text{ja} \quad \overline{v} = 3\cos\tfrac{8\pi}{15}\,\overline{i} + 3\sin\tfrac{8\pi}{15}\,\overline{j}.$$

Heidän ratkaisunsa ovat seuraavat.

Annukan ratkaisu	Fareedin ratkaisu
$\overline{u}\cdot\overline{v} = 7\left(\cos\frac{\pi}{5}\,\overline{i}+\sin\frac{\pi}{5}\,\overline{j}\right)\cdot 3\left(\cos\frac{8\pi}{15}\,\overline{i}+\sin\frac{8\pi}{15}\,\overline{j}\right)$	Vektorien pituudet: $\lvert\overline{u}\rvert = 7$ ja $\lvert\overline{v}\rvert = 3$
$= 21(\cos\frac{\pi}{5}\,\cos\frac{8\pi}{15} + \sin\frac{\pi}{5}\,\sin\frac{8\pi}{15})$	Pistetulon kaava: $\overline{u}\cdot\overline{v} = 7\cdot 3\cos(\overline{u},\overline{v})$
$= 21\cos(\frac{8\pi}{15} - \frac{\pi}{5})$	Vektorien välinen kulma: $\frac{8\pi}{15} - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{3}$
$= 21\cos\frac{\pi}{3} = \frac{21}{2}$.	Siten $\overline{u}\cdot\overline{v} = 21\cos\frac{\pi}{3} = \frac{21}{2}$.

a) Annukka ja Fareed ovat käyttäneet eri kaavoja pistetulon laskemiseksi. Esitä nämä kaavat yleisille vektoreille $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j}$ ja $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j}$.

b) Fareed on laskenut vektorien pituudet ja niiden välisen kulman. Esitä vektorit graafisesti ja merkitse kuvaan, miten Fareed on päätellyt vektorien välisen kulman.

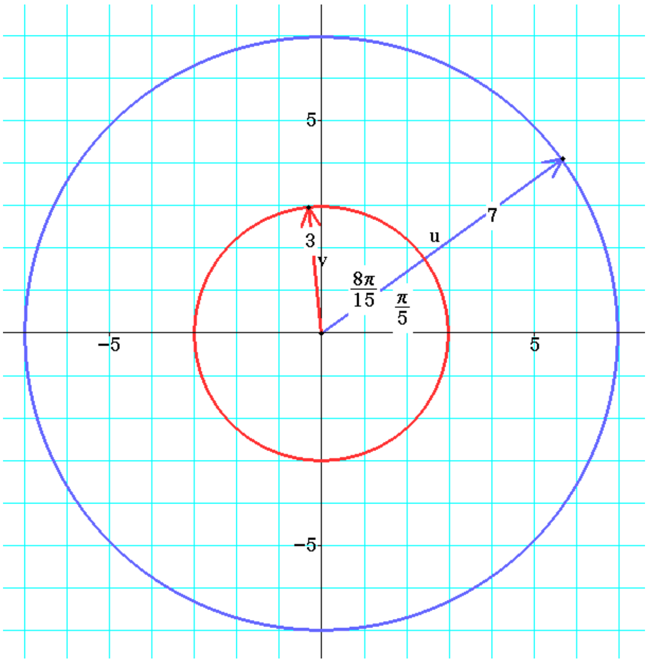
c) Selitä lyhyesti rivi riviltä, miten Annukan ratkaisu etenee.

Tehtävä 10

a) Annukkan käyttämä pistetulo vektoreille a ja b on $a\cdot b = a_x b_x + a_y b_y$ ja Fareedin $a\cdot b = |a||b|\cos(a, b)$.

b) Piirretään vektorit Geometria-sovellukseen alkamaan samasta pisteestä.

Havainnekuva =>



Fareed on voinut päätellä vektorien välisen kulman esim. miettimällä vektorit alkamaan origosta ja piirtämällä 3– ja 7–säteiset origokeskeiset ympyrät. Vektorien välisen kulman suuruus radiaaneina on $\frac{8\pi}{15}-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{3}$.

c) Annukkan vastauksessa rivillä
1 on otettu yhteinen tekijä 7 ja 3 ja merkitty pistetulon kaava,
2 vakiokertoimet on kerrottu keskenään, samojen komponenttien kertoimet samoin,
3 kosinin summakaavalla on sievennetty lauseketta,
4 kulma on sievennetty ja laskettu $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ ja saatu vastaus.

11. **a)** Anna esimerkki rationaalifunktiosta $f(x)$, jolle epäyhtälö $f(x) \geq 2$ toteutuu täsmälleen silloin, kun $-1 \leq x \leq 0$ tai $1 \leq x \leq 2$.

b) Anna esimerkki funktiosta $g(x) \geq 0$, joka on määritelty kaikilla reaaliluvuilla ja jonka derivaatalla on täsmälleen kaksi nollakohtaa.

Tehtävä 11

a) Muodostetaan funktio, jonka

1) nollakohdat ovat −1, 0, 1 ja 2 ja

2) jonka nimittäjä ei supistu eli nimittäjän nollakohta ei ole osoittajan nollakohta.

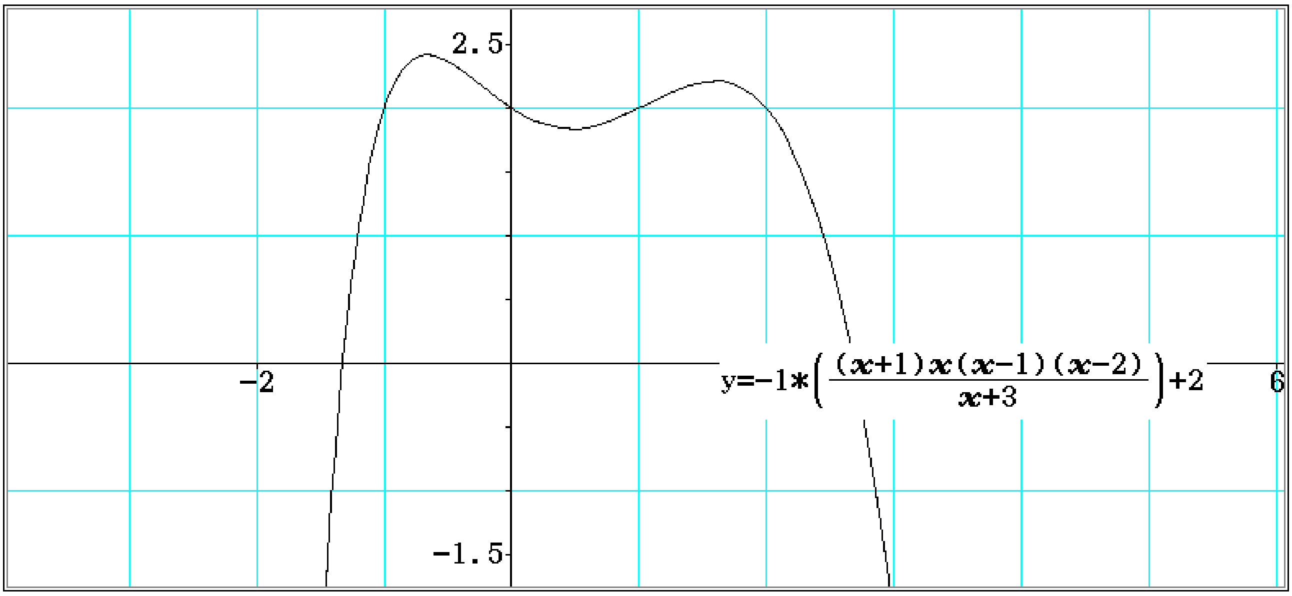
3) Koska osoittaja on 4. asteen polynomi, kerrotaan se luvulla −1, jolloin sen muoto tulee halutun kaltaiseksi

4) Lisätään funktioon lopuksi luku 2, jolloin sen äskeiset nollakohdat nousevat suoran y=2 leikkauspisteiksi. Esimerkiksi.

define $f(x)=-1*\left(\frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{x+3}\right)+2$

done

Kuvaaja =>



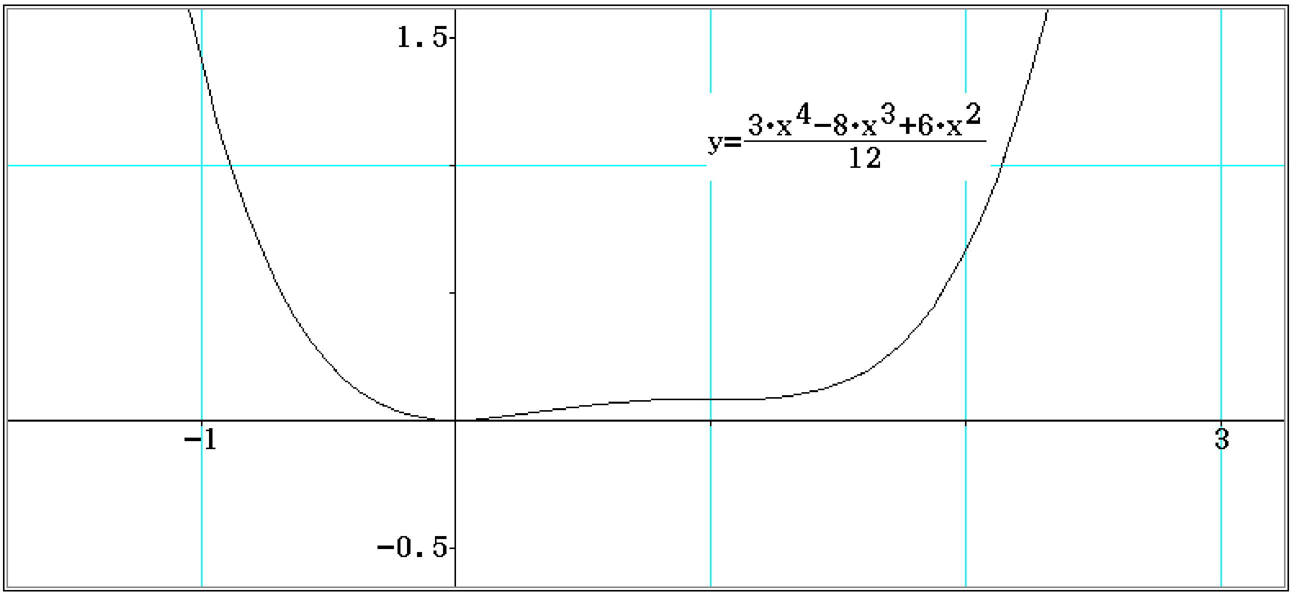
b) Esimerkiksi funktio, joka on 4. asteen polynomi ja jolla toinen derivaatan nollakohdista on terassipiste. Derivaattafunktio on tällöin 3. astetta ja sillä pitää olla kaksoisjuuri – esim. $x(x-1)^2$. Tämän yksi integraalifunktio on

$$\int_{\square}^{\square} x(x-1)^2 dx$$

$$\frac{3\cdot x^4-8\cdot x^3+6\cdot x^2}{12}$$

Funktio $\frac{3\cdot x^4-8\cdot x^3+6\cdot x^2}{12}$ on määritelty kaikilla reaaliluvuilla, sen derivaatalla on täsmälleen kaksi nollakohtaa x=0 ja x=1 ja funktio on epänegatiivinen, sillä se saa pienimmän arvonsa origossa.

Kuvaaja =>



12. a) Olkoon $a > 0$. Määritellään a-kantainen logaritmi funktion $f(x) = a^x$ käänteisfunktiona, toisin sanoen $\log_a x = f^{-1}(x)$. Kiinnitetään $x > 1$ ja määritellään $g(a) = \log_a x$. Osoita, että funktio $g(a)$ on vähenevä.

b) Olkoon $h(t)$ jatkuva funktio. Osoita, että

$$H(x) = \int_0^x h(t)\,dt$$

on kasvava täsmälleen silloin, kun $h(t) \geq 0$ kaikilla $t \in \mathbf{R}$.

Tehtävä 12

a) Funktio on vähenevä, kun sen derivaattafunktio on negatiivinen tai nolla.
Funktion $g(a)=\log_a(x)$, $a>0$, $a\neq1$, derivaatta on

$$\frac{d}{da}\left(\log_a(x)\right)$$

$$\frac{-\ln(x)}{a\cdot(\ln(a))^2}$$

Nimittäjä on positiivinen, sillä $a>0$ (oletus) ja luvun neliönä $(\ln(a))^2>0$.
$\ln(a)\neq0$, koska $a\neq1$. Derivaattafunktio on määritelty kaikille $a>0$ ja $a\neq1$.

Osoittaja on negatiivinen, sillä $\ln(x)>0$, kun $x>1$. Derivaattafunktio $g'(a)$ on siis negatiivinen koko määrittelyjoukossaan ja funkio $g(a)$ on vähenevä, kun $0<a<1$ ja $a>1$. Funktio $g(a)$ ei ole vähenevä kaikille $x>1$ ja $a>0$.

b) Olkoon $h(t) \geq 0$ ja $x_2 > x_1$. Kasvava funktio säilyttää suuruusjärjestyksen, joten tutkitaan funktion arvojen erotusta

$H(x_2) - H(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} h(t)dt \geq \int_{x_1}^{x_2} 0dt = 0$. Siis $H(x_2) - H(x_1) \geq 0$, joten $H(x_2) \geq H(x_1)$ ja $H(x)$ on kasvava funktio.

Olkoon $h(t) < 0$ välillä $x_1 < t < x_2$, joloin vastaava erotus

$H(x_2) - H(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} h(t)dt < \int_{x_1}^{x_2} 0dt = 0$. Siis $H(x_2) - H(x_1) < 0$, joten $H(x_2) < H(x_1)$ ja $H(x)$ ei ole kasvava funktio. Ei siis voi olla $h(t) < 0$ millään mielivaltaisella välillä $x_1 < t < x_2$.

$H(x)$ kasvaa täsmälleen silloin, kun $h(t) \geq 0$ kaikille reaaliluvuille t.

Tehtävä 13

Paloittain määritellyn funktiot osafunktiot ovat kaikkialla derivoituvia. Mikäli funktio f(x) on derivoituva osafunktioiden liitoskohdassa x=0, niin se on derivoituva funktio.

Tutkitaan toispuoleisia derivaattoja kohdassa x=0.

$$\lim_{x\to 0-}\left(\frac{d}{dx}(\ln(1-x))\right)$$

$$-1$$

Jotta funktio olisi derivoituva kohdassa x=0, niin myös sen toisen osafunktion derivaatan pitää lähestyä arvoa −1, kun x→0+. Ratkaistaan, löytyykö kertoimia a ja c, joilla tämä olisi mahdollista. Muodostetaan funktion f(x) erotusosamäärän raja-arvo, kun x→0+:

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{\left(ax^2+c\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)-\ln(1-0)}{x}\right)=\lim_{x\to 0+}\left(\left(ax+\frac{c}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Kun x→0+, niin

1) $ax\to 0$

2) $\frac{c}{x}\to\infty$, jos $c>0$

3) $\frac{c}{x}\to-\infty$, jos $c<0$

4) $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ei lähesty mitään raja-arvoa.

Siis erotusosamäärällä ei ole raja-arvoa lainkaan, kun x→0+ ja c≠0.

Jos c=0, niin raja-arvo on muotoa $\lim_{x\to 0+}\left((ax)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0$. Millään kertoimien a ja c arvoilla oikeanpuolen derivaatta ei saa arvoa −1. f(x) ei ole derivoituva.

Muistiinpanoja ja huomioita

Muistiinpanoja ja huomioita