Laske Laudatur Casion avulla

Pitkä matematiikka,
syksy 2023

Sisältö

Syksyn 2023 matematiikan yo-kokeiden ratkaisut työasemalle ladattavan ja Abitista löytyvän ClassPad Managerin avulla laskettuina.

Pepe Palovaara

FI – Matematiikka, pitkä oppimäärä

19.9.2023

Koe koostuu 13 tehtävästä, joista vastataan kymmeneen. Tehtävät on jaettu kolmeen osaan. A-osassa on neljä kaikille pakollista tehtävää. B1-osassa on viisi tehtävää, joista vastataan kolmeen. B2-osassa on neljä tehtävää, joista vastataan kolmeen. Kaikki tehtävät arvostellaan pistein 0–12, joten kokeen maksimipistemäärä on 120.

A-osassa saat käyttää koejärjestelmässä olevaa taulukkokirjaa ja perusohjelmia. A-osa palautetaan tehtävän 4 jälkeen olevalla painikkeella. Tämän jälkeen A-osan vastauksia ei voi enää muokata. A-osan palauttamisen jälkeen kaikki koejärjestelmän ohjelmat ovat käytettävissäsi. Voit vastata B-osien tehtäviin myös ennen A-osan palauttamista.

Useimmissa tehtävissä kaikkien osatehtävien vastaukset kirjoitetaan samaan vastauskenttään. Jaottele vastauksesi osatehtävien mukaisesti. Halutessasi voit tuottaa vastausten tueksi piirroksia, kaavioita tai taulukoita ja liittää niistä kuvakaappauksen mihin tahansa tekstivastaukseen.

Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

1. Yhtälö ja epäyhtälö 12 p.

1. Ratkaise yhtälö $-7x+3=17$. **(3 p.)**
2. Ratkaise epäyhtälö $-7x+3<17$. **(3 p.)**
3. Ratkaise yhtälö $x^2+x=2$. **(3 p.)**
4. Ratkaise epäyhtälö $x^2+x-2\le 0$. **(3 p.)**

1. $-7x+3=17 \;\Leftrightarrow\; -7x=14 \;\Leftrightarrow\; x=-2$
2. $-7x+3<17 \;\Leftrightarrow\; -7x<14 \;\Leftrightarrow\; x>-2$
3. $x^2+x=2 \;\Leftrightarrow\; x^2+x-2=0 \;\Leftrightarrow\; x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm 3}{2} \;\Leftrightarrow\; x=1 \;\vee x=-2$

4. Edellisen kohdan nojalla nollakohdat ovat $x=1 \;\vee x=-2$. Koska kyseessä on ylöspäin avautuva paraabeli, on se negatiivinen vain nollakohtiensa välissä $-2\le x\le 1$.

ClassPad Managerin lataukset ja päivitykset löydät kansainväliseltä tukisivulta.

COMPUTER SOFTWARE

Get Started

You can use the software for free with the 90-day trial version.

Select your OS: Windows > Mac >

To activate:

Activation Guide >

Issue License Code from Claim Code

Member Login >

https://edu.casio.com/softwarelicense/index.php

2. Tason pisteitä 12 p.

Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset ilman välivaiheita ja perusteluja. Tehtävässä ei voi käyttää kuvakaappauksia eikä kaavaeditoria. Kunkin vastauksen maksimipituus on 10 merkkiä. Vastaukset arvostellaan tietokoneavusteisesti ja ohjeiden noudattamatta jättäminen voi johtaa pistevähennyksiin.

Määritä seuraavien pisteiden koordinaatit, jotka ovat kokonaislukuja. Anna kaikissa osatehtävissä pelkkä vastaus ilman välilyöntejä, välivaiheita tai perusteluja, esimerkiksi muodossa (-5,5) eikä (- 5, 5) tms.

2.1 Piste, jossa suora $y = 3x + 7$ leikkaa y-akselin. 2 p.

$(x, y) =$ (0,7)

2.2 Pisteiden $(0, 0)$ ja $(6, 8)$ välisen janan keskipiste. 2 p.

$(x, y) =$ (3,4)

2.3 Suorien $x + y = 0$ ja $2x + 5y = 3$ leikkauspiste. 2 p.

$(x, y) =$ (-1,1)

2.4 Käyrän $xy = 6$ piste, jonka y-koordinaatti on 3. 2 p.

$(x, y) =$ (2,3)

2.5 Ympyrän $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ keskipiste. 2 p.

$(x, y) =$ (-1,2)

2.6 Paraabelin $y = (x - 3)^2 + 1$ huippupiste. 2 p.

$(x, y) =$ (3,1)

3. Minimointi 12 p.

Määritä funktion $f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}$ pienin arvo, kun $x > 0$.

Lasketaan aluksi funktion derivaattafunktio ja sen nollakohdat:

$f'(x) = 2x - \frac{32}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 2x^4 - 32 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 2,$ joista vain positiivinen juuri käy. Lasketaan derivaatan merkit tämän nollakohdan ympärillä: $f'(1) = -30 < 0$ ja $f'(4) = 7\frac{1}{2} > 0$, joten kyseessä on minimikohta. Funktion pienin arvo on $f(2) = 2^2 + \frac{16}{2^2} = 8.$

4. Vektorit ja taso (12 p.)

Tarkastellaan vektoreita $\overline{u} = 3\,\overline{i} + \overline{j} - 2\,\overline{k}$, $\overline{v} = \overline{i} + 2\,\overline{j} - 2\,\overline{k}$ ja $\overline{w} = -5\,\overline{i} - 5\,\overline{j} + 6\,\overline{k}$.

1. Määritä vektori $\overline{u} + 2\,\overline{v} - \overline{w}$. **(3 p.)**
2. Vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ virittävät origon kautta kulkevan tason T, eli ne ovat tason suuntavektoreita. Määritä pisteen $(6, 7, 1)$ etäisyys tasosta T. **(9 p.)**

1. $\overline{u} + 2\overline{v} - \overline{w} = 3\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k} + 2\overline{i} + 4\overline{j} - 4\overline{k} + 5\overline{i} + 5\overline{j} - 6\overline{k} = 10\overline{i} + 10\overline{j} - 12\overline{k}$

2. Yksi tason normaalivektoreista on $\overline{u} \times \overline{v} = 2\overline{i} + 4\overline{j} + 5\overline{k}$, joten tason normaalimuoto on $2x + 4y + 5z + d = 0$.
Sijoitetaan tason pisteenä origo, jolloin $d = 0$ ja tason yhtälö on $2x + 4y + 5z = 0$. Pisteen (6,7,1) etäisyys tasosta on

$$\frac{|2 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{45}{\sqrt{45}} = \frac{45}{3\sqrt{5}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}.$$

B1-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

5. Matematiikan merkintöjä 12 p.

Kuinka seuraavat sanalliset kuvaukset voidaan ilmaista symbolein?

Valitse parhaiten soveltuva vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 1 p. tai 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluakaan jättää tehtävää arvosteltavaksi, poista vastauksesi valitsemalla pudotusvalikosta tyhjä rivi.

5.1 Luvun 6 kuutiojuuri. **1 p.**

$\sqrt[3]{6}$

5.2 Parilliset kokonaisluvut. **1 p.**

$2k,\ k \in \mathbf{Z}$

5.3 Luvun $\frac{7}{5}$ käänteisluvun ja vastaluvun summan itseisarvo. **2 p.**

$|\frac{5}{7}| + |-\frac{7}{5}|$

5.4 Luvut A ja B ovat suoraan verrannolliset verrannollisuuskertoimella k. **1 p.**

$A : B = k$

5.5 Kun kerrotaan kaksi samakantaista potenssia, niin eksponentit lasketaan yhteen. **1 p.**

$x^n x^m = x^{n+m}$

5.6 Tuotteen lopullinen hinta, kun alkuperäistä hintaa 129 € alennetaan ensin 10 % ja alennettua hintaa myöhemmin vielä 20 %. **1 p.**

$0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 129$ €

5.7 Lukusuoran pisteen x etäisyys pisteestä -2 on 3. **1 p.**

$|x-(-2)| = 3$

5.8 Tason pisteen (x, y) etäisyys pisteestä $(1, -3)$ on 4. **2 p.**

$\sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} = 4$

5.9 Suorien $2x - 3y = 1$ ja $-x + 4y = -2$ leikkauspiste. **1 p.**

$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + 4y = -2 \end{cases}$

5.10 Funktion f arvo kohdassa 2 on suurempi kuin funktion g arvo kohdassa -3. **1 p.**

$f(2) > g(-3)$

6. Appelsiinien kuoret 12 p.

Kaupassa myydään kokonaisia appelsiineja 1,50 euron kilohinnalla ja kuorittuja appelsiineja 9,50 euron kilohinnalla. Kuorimattomien appelsiinien ympärysmitta on 25,0 cm ja kuoren paksuus 6,0 mm.

1. Kuinka suuri osuus appelsiinin tilavuudesta on kuorta? Oletetaan appelsiini palloksi ja kuori tasapaksuksi. **(6 p.)**
2. Mikä on kuorimistyön osuus hinnasta prosentteina? Oletetaan, että kuoren ja syötävän osan tiheys on sama ja että kuoren arvo on nolla euroa. **(6 p.)**

1. Lasketaan kuoren tilavuuden suhde koko appelsiinin tilavuuteen

$$\frac{\frac{4\pi}{3}*\left(\frac{25}{2\pi}\right)^3-\frac{4\pi}{3}*\left(\frac{25}{2\pi}-0.6\right)^3}{\frac{4\pi}{3}*\left(\frac{25}{2\pi}\right)^3}$$

0.3875996826

Vastaus: Kuoren osuus tilavuudesta on n. 39%

2. Yhteen kilogrammaan kuorittuja appelsiineja kuluu

$$\frac{1}{1-0.3875996826}$$

1.632918814

kilogrammaa kuorellisia appelsiineja, joten niiden hinta olisi euroina

1.632918814*1.5

2.449378221

Kuorimistyöhön käytetään siis euroina

9.5−2.449378221

7.050621779

Työhön käytetty osuus hinnasta on prosentteina

$$\frac{7.050621779}{9.5}$$

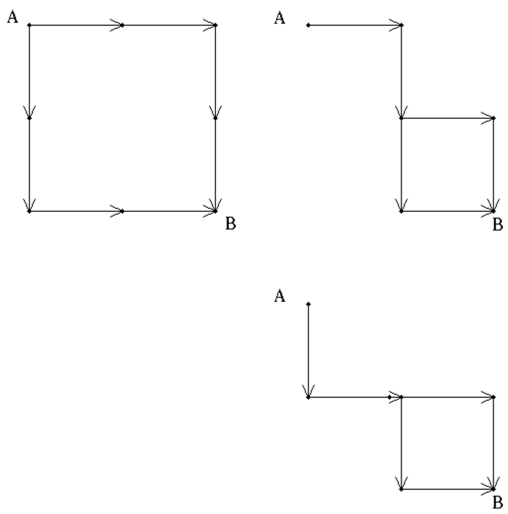
0.7421707136

Vastaus. Noin 74%.

7. Ken Guru hyppii 12 p.

Ken Guru on 3×3 -ruudukon vasemman yläkulman ruudussa A, ja sen on päästävä hyppimällä oikean alakulman ruutuun B. Yksittäinen hyppy on mahdollinen vain naapuriruutuun joko suoraan oikealle tai suoraan alas, muttei vinottain tai ruudukon ulkopuolelle. Jos mahdollisia vaihtoehtoja on kaksi, niin Ken hyppää niistä kumpaan tahansa todennäköisyydellä 0,5. Muuten se hyppää ainoaan mahdolliseen ruutuun.

1. Määritä jokaisen mahdollisen reitin todennäköisyys. **(8 p.)**
2. Ken palaa ruudusta B takaisin ruutuun A hyppimällä muuten samalla periaatteella, mutta nyt hypyt ovat mahdollisia vain suoraan vasemmalle tai suoraan ylös. Kuinka suurella todennäköisyydellä Ken palaa takaisin samaa reittiä (mutta vastakkaiseen suuntaan) kuin menomatkalla? **(4 p.)**



1. Jos Ken Guru etenee oikealle kulmaan, on hän tehnyt kaksi valintaa todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$ mutta nurkasta ruutuun B hänellä ei ole vaihtoehtoja. Tämän reitin todennäköisyys on siis $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. Sama pätee, jos Ken Guru etenee alas kulmaan, joten tämänkin reitin todennäköisyys on $\frac{1}{4}$.

Jos Ken Guru poikkeaa ensimmäisen hypyn jälkeen kulmaan johtavalta reitiltä, hän päätyy ruudukon keskelle. Tähän mennessä hän on tehnyt kaksi valintaa ja päätynyt keskelle todennäköisyydellä $\frac{1}{4}$. Ruutuun B hän pääsee kahta kautta, joten koko polun todennäköisyys on $\frac{1}{2}*\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$. Tällaisia reittivalintoja on kaikkiaan neljä erilaista.

Eri reitit 6 kpl

2. Jokaisen paluureitin todennäköisyys on sama kuin alkuperäisen reitin todennäköisyys ja vaihtoehdot ovat samat, mutta vastakkaiseen suuntaan. Todennäköisyys valita sama paluureitti on

$$\frac{1}{4}*\frac{1}{4}+\frac{1}{4}*\frac{1}{4}+\frac{1}{8}*\frac{1}{8}+\frac{1}{8}*\frac{1}{8}+\frac{1}{8}*\frac{1}{8}+\frac{1}{8}*\frac{1}{8}$$

$$\frac{3}{16}$$

8. Ison luvun jaollisuus (12 p.)

1. Määritä suurin luku $k \in \mathbf{N}$, jolle $1023 \equiv -1 \pmod{2^k}$. **(3 p.)**
2. Todista, että luku $2^{12345678910} - 1$ on jaollinen luvulla 1023. **(9 p.)**

1. Luvun 1024 pitää siis olla kongruentti nollan kanssa modulo 2^k: $1024 \equiv 0 \pmod{2^k}$. $2^{10}=1024$, joten kysytty suurin luonnollinen luku on 10.

2. Koska $2^{10} \equiv 1 \pmod{1023}$, niin $(2^{10})^k \equiv 1^k \pmod{1023}$. Kun k=1234567891, niin lauseke on muotoa $(2^{10})^{1234567891} = 2^{12345678910} \equiv 1^k \pmod{1023} \equiv 1 \pmod{1023}$. Siis $2^{12345678910} - 1 \equiv 0 \pmod{1023}$ eli luku $2^{12345678910}-1$ on jaollinen luvulla 1023.

9. Taidemuseon aaltoileva aita (12 p.)

Taidemuseon aita halutaan maalata ja sen pinta-alaa mallinnetaan integraalilla

$$\int_0^4 \left(\frac{\cos(10x + x^2)}{2} + 1 \right) dx.$$

Arvioi integraalia puolisuunnikassäännön avulla käyttäen 10:tä ja 100:aa jakoväliä. Laske näiden arvioiden suhteelliset virheet, kun integraalin arvo viiden desimaalin tarkkuudella on 3,98636.

Määritellään aluksi funktio f:

define $f(x)=\frac{\cos(10x+x^2)}{2}+1$

done

Yhden osavälin pituus on ensin $\frac{4-0}{10}$ ja sitten $\frac{4-0}{100}$. Puolisuunnikassääntö antaa likiarvoksi 10 osavälillä

$$\frac{1}{2}*\frac{4}{10}*\sum_{k=1}^{10}\left(f\left(\frac{4*(k-1)}{10}\right)+f\left(\frac{4*k}{10}\right)\right)$$

4.288225244

ja 100 osavälillä

$$\frac{1}{2}*\frac{4}{100}*\sum_{k=1}^{100}\left(f\left(\frac{4*(k-1)}{100}\right)+f\left(\frac{4*k}{100}\right)\right)$$

3.986993452

Suhteelliset virheet ovat vastaavasti prosentteina

$$\frac{4.288225244-3.98636}{3.98636}*100$$

7.572453165

$$\frac{3.986993452-3.98636}{3.98636}*100$$

0.01589048656

Vastaus. Integraalin likiarvoksi saadaan n. 4,29 (10 osaväliä) ja n. 3,99 (100 osaväliä). Suhteelliset virheet ovat vastaavasti n. 7,6% ja 0,02%.

B2-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

10. Parilliset ja parittomat funktiot 12 p.

Funktio $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on *parillinen*, jos $h(-x) = h(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, ja *pariton*, jos $h(-x) = -h(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Valitse osatehtävissä 10.1–10.4 oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 1 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

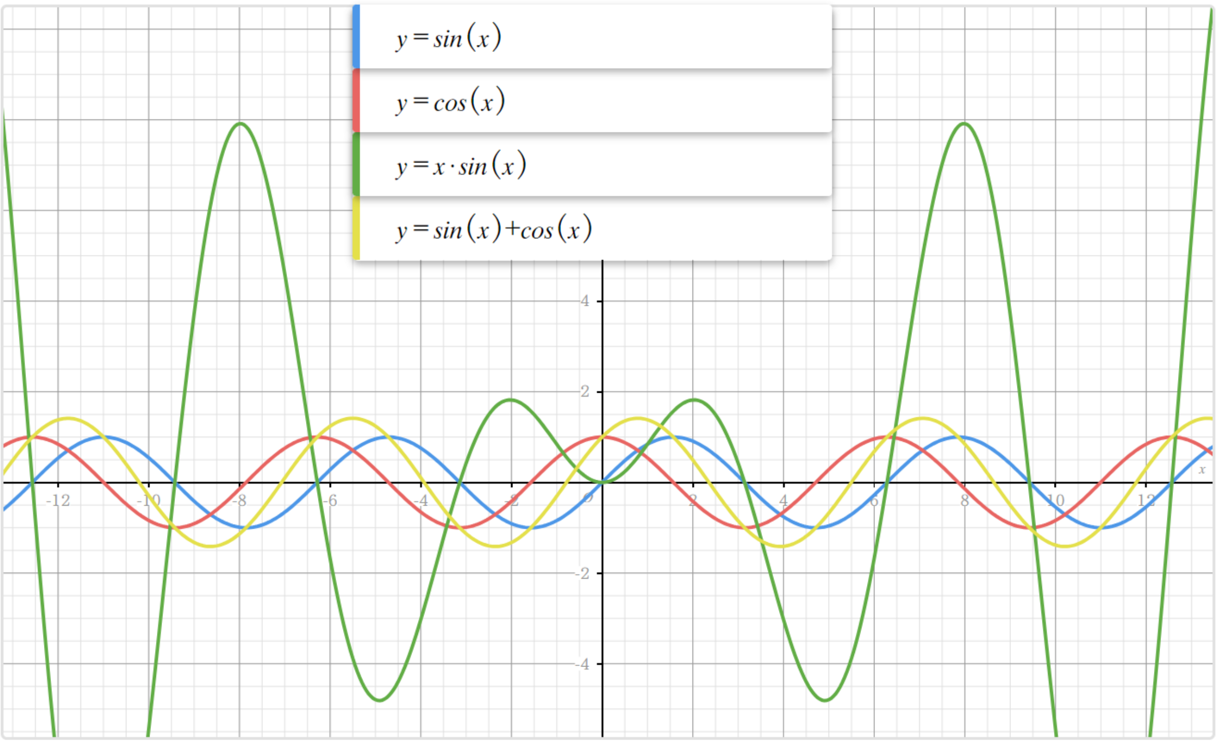
Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluakaan jättää tehtävää arvosteltavaksi, poista vastauksesi valitsemalla pudotusvalikosta tyhjä rivi.

Kirjoita osatehtävien 10.5 ja 10.6 vastaukset perusteluineen vastauslaatikkoon.

1. Funktio $a(x) = \sin x$ on pariton 1 p.
2. Funktio $b(x) = \cos x$ on parillinen 1 p.
3. Funktio $c(x) = x \sin x$ on parillinen 1 p.
4. Funktio $d(x) = \sin x + \cos x$ ei ole parillinen eikä pariton 1 p.
5. Oletetaan, että f on pariton. Osoita, että $f(0) = 0$. **(4 p.)**
6. Oletetaan, että g on parillinen ja derivoituva. Osoita, että g' on pariton. **(4 p.)**

10.5 Koska f on pariton, niin sille pätee f(−0)=f(0)=−f(0), joten 2f(0)=0 ja f(0)=0.

10.6 Koska g on derivoituva, niin Dg(−x)=−g'(−x). Parillisuudesta seuraa, että g(−x)=g(x), joten myös funktion g(x) derivaatan on oltava −g'(−x). Siis g'(x)=−g'(−x) eli −g'(x)=g'(−x), mikä tekee funktiosta g' parittoman.



11. Väliarvolauseen ehdot 12 p.

Tässä tehtävässä tutkitaan, milloin välillä $[-1,1]$ määritelty funktio f toteuttaa *väliarvolause-ehdon*:

$$f'(a) = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} \qquad \text{jollakin luvulla } a \in \,]-1,1[\,.$$

Vastaa perustellen seuraaviin osatehtäviin.

1. Anna esimerkki funktiosta, joka on jatkuva suljetulla välillä $[-1,1]$, derivoituva avoimella välillä $]-1,1[$ ja toteuttaa väliarvolause-ehdon. **(4 p.)**
2. Anna esimerkki funktiosta, joka on jatkuva suljetulla välillä $[-1,1]$ mutta joka ei ole derivoituva avoimella välillä $]-1,1[$ eikä toteuta väliarvolause-ehtoa. **(4 p.)**
3. Anna esimerkki funktiosta, joka on derivoituva avoimella välillä $]-1,1[$ mutta joka ei ole jatkuva suljetulla välillä $[-1,1]$ eikä toteuta väliarvolause-ehtoa. **(4 p.)**

1. Valitaan yksinkertainen polynomifunktio $f(x)=x$. Tämä toteuttaa ehdot, sillä
- se on jatkuva välillä $[-1,1]$, koska polynomifunktiot ovat kaikkialla jatkuvia.
- se on derivoituva välillä $]-1,1[$, koska polynomifunktiot ovat kaikkialla derivoituvia.
- $\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{1-(-1)}{2}=1$ ja toisaalta $f'(x)=1$ kaikkialla.
- jokin luku a voidaan valita miksi tahansa avoimen välin $]-1,1[$ pisteeksi, esim. $a=0,5$.

2. Valitaan funktio, jonka kuvaajassa on kulma välillä $]-1,1[$. Esim. $f(x)=|x|=\begin{cases}-x, \text{kun } x<0\\ x, \text{ kun } x\geq 0\end{cases}$. Tämä toteuttaa ehdot, sillä
- se on jatkuva välillä $[-1,1]$.
- se ei ole derivoituva välin $]-1,1[$ kohdassa $x=0$.
- $\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{1-1}{2}=0$ ja toisaalta $f'(x)=1$, kun $x>0$ ja $f'(x)=-1$, kun $x<0$.

3. Valitaan paloittain määritelty funktio $f(x)=\begin{cases}0, \text{kun } x=-1\\ x, \text{kun } -1<x<1\\ 0, \text{kun } x=1\end{cases}$. Tämä toteuttaa ehdot, sillä
- se ei ole jatkuva välillä $[-1,1]$.
- se on derivoituva välillä $]-1,1[$.
- $\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{0-0}{2}=0$, mutta $f'(x)=1$ välillä $]-1,1[$.

12. Palautuskaavat 12 p.

1. Olkoon $f_n(x)=x^n\sin x$ ja $g_n(x)=x^n\cos x$, kun $n=0,1,2,\ldots$ Laske derivaatat $f_n'(x)$ ja $g_n'(x)$. **(2 p.)**
2. Merkitään
$$S_n=\int_0^\pi x^n\sin x\,dx \quad \text{ja} \quad C_n=\int_0^\pi x^n\cos x\,dx.$$
Laske S_0 ja C_0. **(2 p.)**
3. Oletetaan, että integraaleille S_n ja C_n pätevät rekursiokaavat
$$S_n=nC_{n-1}+\pi^n \quad \text{ja} \quad C_n=-nS_{n-1},$$
kun $n=1,2,3,\ldots$ Laske näitä kaavoja käyttämällä integraalin S_4 arvo. **(2 p.)**
4. Integroi osatehtävässä 1 saadut derivaattakaavat puolittain välillä $[0,\pi]$ ja johda tulosten avulla osatehtävän 3 molemmat rekursiokaavat. **(6 p.)**

1. Määritellään funktiot f ja g ja lasketaan derivaatat

define $f_n(x)=x^n*\sin(x)$

done

define $g_n(x)=x^n*\cos(x)$

done

$\frac{d}{dx}(f_n(x))$

$n\cdot x^{n-1}\cdot\sin(x)+x^n\cdot\cos(x)$

$\frac{d}{dx}(g_n(x))$

$n\cdot x^{n-1}\cdot\cos(x)-x^n\cdot\sin(x)$

2. Integroidaan funktiot

$\int_0^{\pi} x^0*\sin(x)dx$

2

$\int_0^{\pi} x^0*\cos(x)dx$

0

3. Sovelletaan rekursiokaavoja toistuvasti:

$S_4=4C_3+\pi^4=4(-3S_2)+\pi^4=-12S_2+\pi^4=-12(2C_1+\pi^2)+\pi^4=-24C_1-12\pi^2+\pi^4$

$=-24(-S_0)-12\pi^2+\pi^4=-24*(-2)-12\pi^2+\pi^4=$

$48-12\pi^2+\pi^4$

26.97383822

Siis $S_4\approx26,97$.

4. Integroidaan kohdan 1. tulokset:

$\int_0^{\pi} n\cdot x^{n-1}\cdot\sin(x)+x^n\cdot\cos(x)dx=n\int_0^{\pi} x^{n-1}\cdot\sin(x)dx+\int_0^{\pi} x^n\cdot\cos(x)dx=n*S_{n-1}+C_n$.

Toisaalta $\int_0^{\pi} n\cdot x^{n-1}\cdot\sin(x)+x^n\cdot\cos(x)dx=\pi^n*\sin(\pi)-0^n*\sin(0)=0$, joten

$n*S_{n-1}+C_n=0$. Tästä seuraa toinen väitteistä $C_n=-n*S_{n-1}$.

$\int_0^{\pi} n\cdot x^{n-1}\cdot\cos(x)-x^n\cdot\sin(x)dx=n\int_0^{\pi} x^{n-1}\cdot\cos(x)dx-\int_0^{\pi} x^n\cdot\sin(x)dx=n*C_{n-1}-S_n$.

Toisaalta taas $\int_0^{\pi} n\cdot x^{n-1}\cdot\cos(x)-x^n\cdot\sin(x)dx=\pi^n*\cos(\pi)-0^n*\cos(0)=-\pi^n$. Näin

saadaan myös toinen tuloksista johdettua: $n*C_{n-1}-S_n=-\pi^n$ eli $S_n=n*C_{n-1}+\pi^n$.

13. Kertoman arviointi 12 p.

Perustele seuraavat epäyhtälöt.

1. $\ln k \leq \int_k^{k+1} \ln x\, dx$, kun $k = 1, 2, 3, \ldots$ **(3 p.)**

2. $\sum_{k=1}^{n} \ln k \leq \int_1^{n+1} \ln x\, dx$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$ **(3 p.)**

3. $n! \leq e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$ **(6 p.)**

1. Integroimisvälillä [k, k+1] on aina x≥k. Koska logaritmifunktio on aidosti kasvava, se säilyttää suuruusjärjestyksen: ln(x)≥ln(k). Jos kumpaakin funktiota integroidaan x:n suhteen samalla välillä, suuruusjärjestys säilyy:

$\int_k^{k+1} \ln(x)dx \geq \int_k^{k+1} \ln(k)dx = \ln(k)(k+1) - \ln(k)*k = \ln(k)$, mistä seuraa väite.

2. Hyödynnetään 1. kohdan tulosta $\sum_{k=1}^{n} (\ln(k)) \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\int_k^{k+1} \ln(x)dx\right) = \int_1^{n+1} \ln(x)dx$.

3. $\ln(n!) = \ln(1*2*3*4*...) = \ln(1)+\ln(2)+\ln(3)+... = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k))$, joten 2. kohdan nojalla

$$n! = e^{\sum_{k=1}^{n} (\ln(k))} \leq e^{\int_1^{n+1} \ln(x)dx} = e^{(n+1)\ln(n+1)-(n+1)-(1*\ln(1)-1))}$$

$$= e^{(n+1)\ln(n+1)-n} = \frac{e^{\ln(n+1)^{n+1}}}{e^n} = \frac{(n+1)e^{n+1}}{\frac{e^{n+1}}{e}} = e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$, mistä seuraa väite.