

# Laske Laudatur Casion avulla

Pitkä matematiikka,  
kevät 2024



## Sisältö

Kevään 2024 matematiikan yo-kokeiden ratkaisut työasemalle ladattavan ja Abitista löytyvän ClassPad Managerin avulla laskettuina.

Pepe Palovaara

**CASIO**®

*Integrity*

# FI – Matematiikka, pitkä oppimäärä

20.3.2024

Koe koostuu 13 tehtävästä, joista vastataan kymmeneen. Tehtävät on jaettu kolmeen osaan. A-osassa on neljä kaikille pakollista tehtävää. B1-osassa on viisi tehtävää, joista vastataan kolmeen. B2-osassa on neljä tehtävää, joista vastataan kolmeen. Kaikki tehtävät arvostellaan pistein 0–12, joten kokeen maksimipistemäärä on 120.

A-osassa saat käyttää koejärjestelmässä olevaa taulukkokirjaa ja perusohjelmia. A-osa palautetaan tehtävän 4 jälkeen olevalla painikkeella. Tämän jälkeen A-osan vastauksia ei voi enää muokata. A-osan palauttamisen jälkeen kaikki koejärjestelmän ohjelmat ovat käytettävissäsi. Voit vastata B-osien tehtäviin myös ennen A-osan palauttamista.

Useimmissa tehtävissä kaikkien osatehtävien vastaukset kirjoitetaan samaan vastauskenttään. Jaottele vastauksesi osatehtävien mukaisesti. Halutessasi voit tuottaa vastausten tueksi piirroksia, kaavioita tai taulukoita ja liittää niistä kuvakaappauksen mihin tahansa tekstivastaukseen.

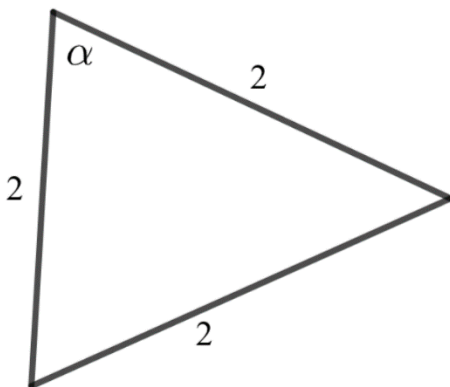
Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

## 1. Kulmanmetsästys 12 p.

Määritä kuviin merkityt tuntemattomat kulmat asteen tarkkuudella.

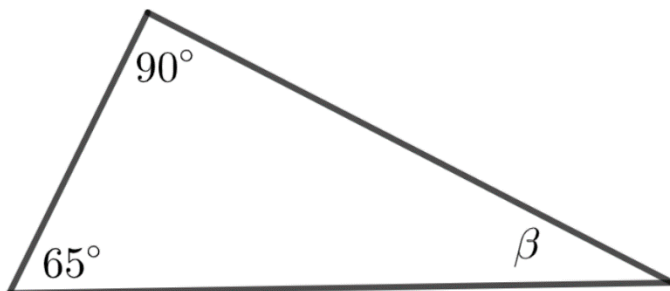
Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset ilman välivaiheita ja perusteluja. Jokaisen kohdan vastaus on kokonaisluku.

### 1.1 Määritä kulma $\alpha$ . 2 p.



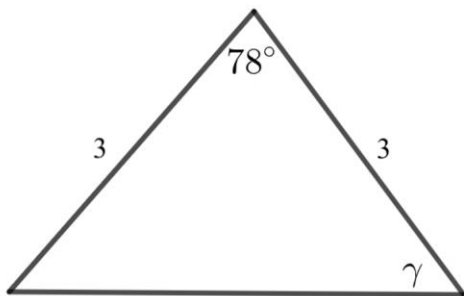
$$\alpha = \boxed{60} \text{ astetta}$$

### 1.2 Määritä kulma $\beta$ . 2 p.



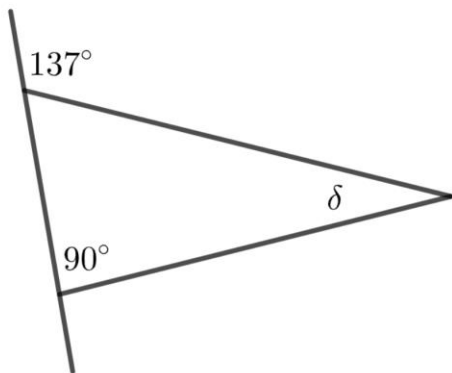
$$\beta = \boxed{25} \text{ astetta}$$

2.3 Määritä kulma  $\gamma$ . (2 p.)



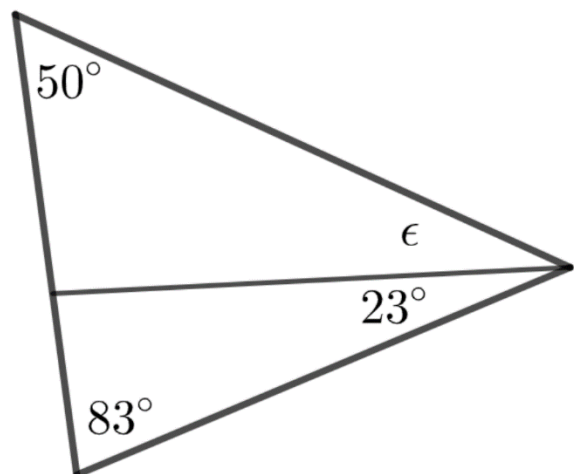
$\gamma = \boxed{51}$  astetta

2.4 Määritä kulma  $\delta$ . (2 p.)



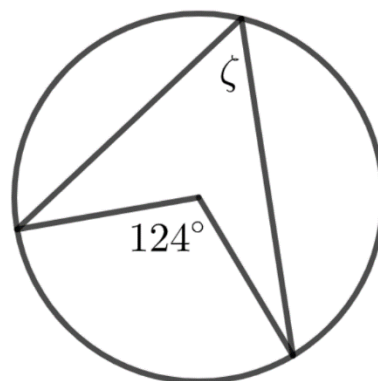
$\delta = \boxed{47}$  astetta

2.5 Määritä kulma  $\epsilon$ . (2 p.)



$\epsilon = \boxed{24}$  astetta

2.6 Määritä kulma  $\zeta$ . (2 p.)



$\zeta = \boxed{62}$  astetta

## 2. Polynomi 12 p.

Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset ilman välivaiheita ja perusteluja. Jokaisen kohdan vastaus on kokonaisluku.

1. Laske polynomin  $p(x) = 12x^3 + 4x$  arvo kohdassa  $x = 2$ .

104<sup>3p.</sup>

2. Laske polynomin  $p(x) = 12x^3 + 4x$  derivaatan arvo kohdassa  $x = 1$ .

40<sup>3p.</sup>

3. Laske määrätty integraali  $\int_1^2 (12x^3 + 4x) dx$ .

51<sup>3p.</sup>

4. Määritä neljännen asteen termin kerroin polynomissa  $(12x^3 + 4x)^2$ .

96<sup>3p.</sup>

## 3. Itseisarvoyhtälöitä 12 p.

Ratkaise algebrallisesti tai geometrisesti seuraavat yhtälöt.

1.  $|y + 3| = |y + 5|$ . (6 p.)

2.  $|x| + |x - 5| = 7$ . (6 p.)

$$1. \quad y + 3 = \pm(y + 5) \Leftrightarrow 3 = 5 \text{ (ei mahd.)} \vee y = -4$$

2.  $|x| + |x - 5| = 7 \Leftrightarrow |x - 5| = 7 - |x|$  Saadaan ehto  $7 - |x| \geq 0$  eli  $-7 \leq x \leq 7$  ja puolet voidaan neliöidä.

$$x^2 - 10x + 25 = 49 - 14|x| + x^2 \Leftrightarrow 14|x| = 24 + 10x \quad \text{Saadaan toinen ehto} \quad 24 + 10x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{12}{5} \quad \text{ja puolet}$$

voidaan neliöidä uudelleen.

$$196x^2 = 576 + 480x + 100x^2 \Leftrightarrow 96x^2 - 480x - 576 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \wedge x = 6 \quad \text{Molemmat vastaukset toteuttavat molemmat ehdot.}$$

## 4. Laskuvarjohyppääjä 12 p.

Mallinnetaan laskuvarjohyppääjän putoamisnopeutta funktiolla

$$v(t) = 80 \frac{e^{t/4} - 1}{e^{t/4} + 1},$$

kun aikaa  $t$  mitataan sekunneissa hyppäyshetkestä  $t = 0$  alkaen ja nopeuden yksikkö on metriä sekunnissa.

Johda derivaattakaava

$$D(8 \ln(e^{t/4} + 1) - t) = \frac{e^{t/4} - 1}{e^{t/4} + 1}.$$

Määritä hyppääjän ensimmäisen 20 sekunnin aikana putoama matka, joka saadaan integraalista


$$h = \int_0^{20} v(t) dt.$$

Derivoidaan funktio:  $D \left( 8 \ln \left( e^{\frac{t}{4}} + 1 \right) - t \right) = 8 \left( \frac{1}{e^{\frac{t}{4}} + 1} \right) \cdot \frac{1}{4} e^{\frac{t}{4}} - 1 = \frac{2e^{\frac{t}{4}} - \left( e^{\frac{t}{4}} + 1 \right)}{e^{\frac{t}{4}} + 1} = \frac{e^{\frac{t}{4}} - 1}{e^{\frac{t}{4}} + 1}$ , joten

derivointikaava on todistettu laskemalla.

$$h = \int_0^{20} v(t) dt = 80 \int_0^{20} \left( 8 \ln \left( e^{\frac{t}{4}} + 1 \right) - t \right) = 80 \left( 8 \ln \left( e^5 + 1 \right) - 20 - \left( 8 \ln \left( e^0 + 1 \right) - 0 \right) \right)$$

$$= 1160,683627... \approx 1200 \text{ metriä.}$$




Laskimet

Yritys Opettajan tietopalvelu Lehdistötiedotteet

🏠
Opettaja & koulu ▼
Vanhemmat & koululaiset ▼
Tuotteet ▼
Ajankohtaista
Yhteystiedot
Toimistolaskimet

Kouluun




**TUOTTEET**

## UUSI CLASSWIZ – SARJA

Tutustu uusiin ClassWiz -sarjan funktiolaskimiin  
FX-82CW, FX-85CW ja FX-991CW.  
Laskimien mukana tulee 7 vuoden ohjelmistolisenssi


Katso tästä ▶

**CLASSWIZ CW – 3IN1**



Kolme yhden hinnalla

**CASIO ACADEMY**



Casio Academy

**AJANKOHTAISTA**

12.1.2024  
[Uutta videotukea](#)

Oletko jo tutustunut uuteen ClassWiz CW-mallistoon? Katso [yleisesittely](#) ja [tukivideot](#) videoarkistostamme!

17.8.2023  
[EDUCA-messut 2024](#)


Casion osastolla voit tutustua uusiin laskimiin ja laskinsovelluksiin 2024 Messukeskuksessa 26.-27.1.2024.

Katso aiempien yo-kokeiden ratkaisut ja muut matematiikan tukimateriaalit osoitteesta

[www.casio-laskimet.fi](http://www.casio-laskimet.fi)



## B1-osa

 Vastaa kolmeen tehtävään.

5. Lämpötilaruudukko 12 p.

## Aineisto

## 5.A Taulukko: Lämpötiloja

Lämpötilajakaumaa voidaan mallintaa ruudukolla, jossa ruudussa oleva luku on kyseisen ruudun lämpötila celsiusasteina. Lämpötilat noudattavat seuraavaa keskiarvoperiaatetta: jokaisen ruudun lämpötila on neljän naapuriruudun lämpötilan keskiarvo. Ruudut ovat naapuriruutuja, jos niillä on yhteinen sivu.

Tässä tehtävässä tutkitaan taulukon 5.A tilannetta. Siinä esimerkiksi lämpötila 15 toteuttaa keskiarvoperiaatteen mukaisen yhtälön

$$\frac{0 + 10 + 20 + 30}{4} = 15.$$

Muodosta ruudukon tuntemattomille lämpötiloille  $x$  ja  $y$  keskiarvoperiaatteen mukaiset yhtälöt ja ratkaise ne.

## 5.A Taulukko: Lämpötiloja

6	10	20	40	60	68
0	15	30	$x$	$y$	80
12	20	30	50	70	75

Lähde: YTL.

Lämpötilojen keskiarvoille saadaan 3 yhtälöä, joiden pitää toteutua yht'aikaa:

$$\begin{cases} \frac{30+40+50+y}{4} = x \\ \frac{x+60+70+80}{4} = y \\ \frac{15+20+30+x}{4} = 30 \end{cases} \quad x, y$$

No Solution

**Vastaus:** Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua, joten lämpötiloja  $x$  ja  $y$  ei voida määrittää.

6. Piste hukassa (12 p.)

Tason pisteen  $C$  etäisyys pisteestä  $A = (5, 4)$  on  $\sqrt{20}$  ja etäisyys pisteestä  $B = (8, -2)$  on  $\sqrt{65}$ . Lisäksi pisteen  $C$  etäisyys pisteen  $B$  kautta kulkevasta, vektorin  $5\vec{i} + 2\vec{j}$  suuntaisesta suorasta  $s$  on alle 7. Määritä pisteen  $C$  koordinaatit sekä pisteen  $C$  tarkka etäisyys suorasta  $s$ .

Kysessä on jompikumpi ympyröiden  $(x-5)^2+(y-4)^2=20$  ja  $(x-8)^2+(y+2)^2=65$  leikkauspisteistä.

Ratkaistaan aluksi leikkauspisteet yhtälöparin avulla:

$$\begin{cases} (x-5)^2+(y-4)^2=20 \\ (x-8)^2+(y+2)^2=65 \end{cases}_{x,y}$$

$$\{\{x=1, y=2\}, \{x=9, y=6\}\}$$

Lasketaan pisteiden etäisyydet suorasta  $s$ . Suora  $s$  voidaan esittää normaalimuodossa  $-2x+5y+d=0$ , jossa  $d$  saadaan sijoittamalla suoran tunnettu piste  $(8, -2)$  yhtälöön:

$$\text{solve}(-2x+5y+d=0, d) | x=8 \text{ and } y=-2$$

$$\{d=26\}$$

Pisteiden etäisyydet suorasta saadaan suoraan kaavan avulla:

$$\frac{|-2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 26|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}}$$

$$\frac{34 \cdot \sqrt{29}}{29}$$

$$\frac{|-2 \cdot 9 + 5 \cdot 6 + 26|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}}$$

$$\frac{38 \cdot \sqrt{29}}{29}$$

Näistä vain ensimmäinen toteuttaa etäisyys ehdon, joten kysytty piste on  $(1, 2)$  ja sen etäisyys suorasta  $s$  on  $\frac{34 \cdot \sqrt{29}}{29}$ .

7. Scrabble (12 p.)

Englanninkielisessä Scrabble-pelissä pussissa on 100 laatua, joista 2 on tyhjää, 56 konsonanttilaattaa ja 42 vokaalilaattaa. Vokaalilaatoista yhdeksässä on A-kirjain. Pelaaja nostaa pussista 7 laatua palauttamatta niitä takaisin pussiin.

1. Millä todennäköisyydellä ainakin yhdessä pelaajan nostamista laatoista on A-kirjain? (6 p.)

2. Millä todennäköisyydellä ainakin yhdessä pelaajan nostamista laatoista on A-kirjain silloin, kun tiedetään pelaajan nostaneen kolme vokaalia? (6 p.)

1. Todennäköisyys on helpompi laskea vastatapahtuman avulla.  $P(\text{"ainakin yhdestä 7 laatusta on A-kirjain"}) = 1 - P(\text{"yhdeksäkään 7 laatusta ei ole A-kirjainta"}) =$

$$1 - \frac{91}{100} \cdot \frac{90}{99} \cdot \frac{89}{98} \cdot \frac{88}{97} \cdot \frac{87}{96} \cdot \frac{86}{95} \cdot \frac{85}{94}$$

$$0.4943645512$$

**Vastaus:** Ainakin yhdessä laatassa on A-kirjain todennäköisyydellä noin 0,49.

2. Kuten kohdassa 1., käytetään komplementtitapahtumaa.  $P(\text{"ainakin yhdestä 7 laatusta on A-kirjain, kun pelaajan laatoista kolmessa on vokaali"}) = 1 - P(\text{"yhdeksäkään 7 laatusta ei ole A-kirjainta, kun pelaajan laatoista kolmessa on vokaali"}) = 1 - P(\text{"yksikään 7 nostetusta kolmesta vokaalilaatusta ei ole A-kirjain"}) =$

$$1 - \frac{33}{42} \cdot \frac{32}{41} \cdot \frac{31}{40}$$

$$0.524738676$$

**Vastaus:** Ainakin yhdessä laatoista on A-kirjain, kun kolmen seitsemästä laatusta tiedetään olevan vokaali, tapahtuu todennäköisyydellä noin 0,52.

8. Taivaanmekaniikka (12 p.)

Aineisto

8.A Video: Maapallon akseli

Maapallo pyörii akselinsa ympäri. Akselin ja Maan kiertoradan tason (eli ratatason) normaalin välisen kulman suuruus on 23,5 astetta, ja akselin suunta pysyy samana Maan kiertäessä Aurinkoa. Akselin asento on sellainen, että pohjoisnapa on kesäpäivänseisauksena lähimpänä Aurinkoa ja talvipäivänseisauksena kauimpana siitä. Videossa 8.A on havainnollistettu tilannetta.

Määritä Maan akselin ja Auringosta Maahan kulkevan säteen välinen kulma kuukausi kesäpäivänseisauksen jälkeen. Maapallon kiertorata oletetaan tässä ympyräksi.

Asetetaan maan kiertorata  $xy$ -tason yksikköympyräksi ja maan sijainti koordinaatistossa kesäpäivänseisauksen aikana on  $(-1, 0, 0)$ , jolloin se vastaa parhaiten videon esitystä. Koska mitataan kulmia, ei mittakaavalla ole väliä. Nyt maan akselin kautta kulkeva suuntavektori on

$$s := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \tan(66.5^\circ) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \tan\left(\frac{133}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Kuukaudessa maa kiertää  $\frac{1}{12}$ -osan koko kierroksesta  $360^\circ$  eli  $30^\circ$ . Maan sijainti kesäpäivänseisauksena

on yksikköympyrällä pisteessä  $(\cos(210^\circ), \sin(210^\circ)) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ , sillä

$$\cos(210^\circ)$$

$$\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(210^\circ)$$

$$-\frac{1}{2}$$

Asetetaan vektorit alkamaan maasta, jotta niiden välinen kulma voidaan laskea. Origossa sijaitsevaan auringoon maasta piirretty vektori on

$$u := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Näiden vektorien välinen kulma on noin

$$\text{angle}(s, u)$$

69.79825245

**Vastaus:** Kulma on noin  $69,8^\circ$ .



9. Kääntyvä, muttei monotoninen (12 p.)

Anna esimerkki funktiosta  $f : A \rightarrow B$ , jolla on käänteisfunktio, mutta joka ei ole monotoninen. Muista kertoa, mitkä ovat funktiosi määrittelyjoukko  $A$  ja arvojoukko  $B$ .

Valitaan aidosti kasvava funktio  $f(x)=x$ , mutta määritellään yksi sen pisteistä pois suoralta, esim.

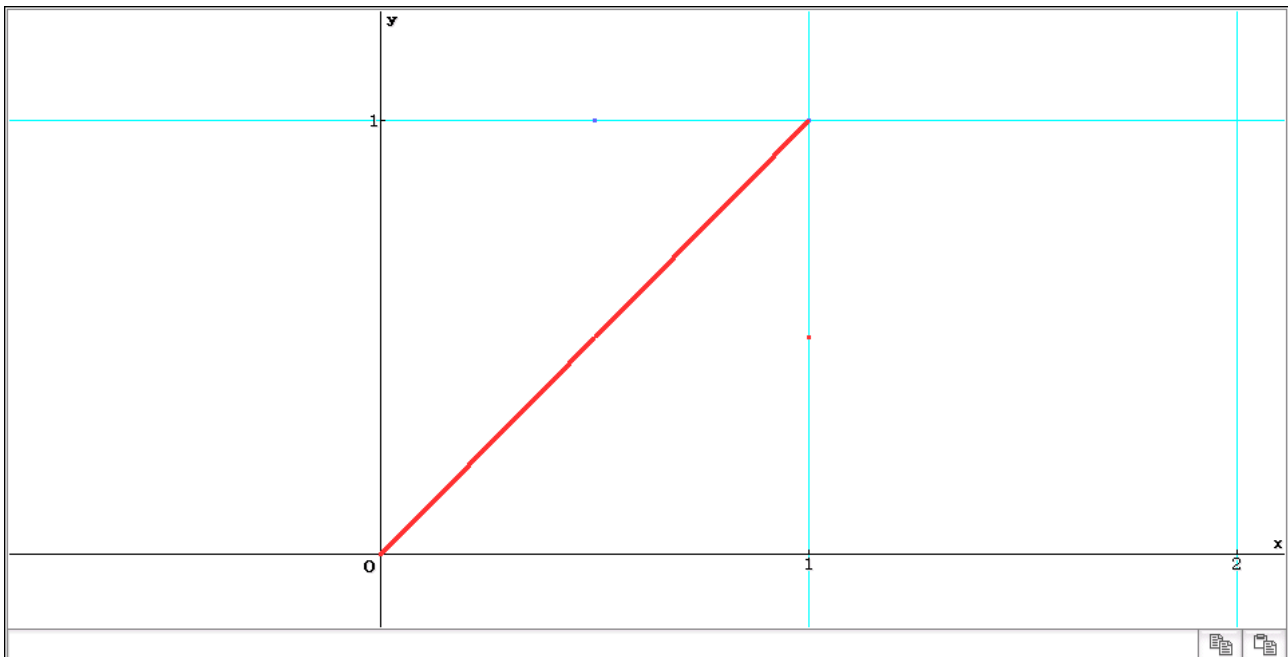
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=1. \text{ Tällöin välillä } [0,1] \text{ määritelty funktio } g(x)=\begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & x = \frac{1}{2} \\ x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \text{ ei ole enää monotoninen, mutta sillä}$$

on käänteisfunktio. Funktio  $g(x)$  saa kaikki arvot väliltä  $[0,1]$

Miksi funktio  $g(x)$  ei ole monotoninen?  $g(0)=0 < g\left(\frac{1}{2}\right)=1$ ,  $g\left(\frac{1}{2}\right)=1 > g\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$  ja  $g\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4} < g(1)=1$ .

$$\text{Miksi funktiolle } g(x) \text{ löytyy käänteisfunktio? Funktio } h(x)=\begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \text{ on sen funktion } g(x)$$

käänteisfunktio, sillä välillä  $[0,1]$  sen määrittelyjoukko on funktio  $g(x)$  arvojoukko  $[0,1]$  ja sen arvojoukko  $[0,1]$  on funktion  $g(x)$  määrittelyjoukko  $[0,1]$ .  $g(h(x))=x$  kaikille määrittelyjoukon alkioille ja  $h(g(x))$  samoin. Funktioiden  $g(x)$  ja  $h(x)$  kuvaajat ovat symmetriset suoran  $y=x$  suhteen.



## B2-osa

**i** Vastaa kolmeen tehtävään.

10. Tekoäly ja lukuteorian ihmeet **12 p.**

## Aineisto

## 10.A Teksti: Lainaus tekoälyltä

Alkulukua  $q$  kutsutaan *alkulukukaksoseksi*, jos myös  $q + 2$  tai  $q - 2$  on alkuluku. Tekoälyltä kysyttiin, kuinka monta alkulukukaksosta on olemassa, ja sen vastaus on tekstissä 10.A. Vastaa aineiston pohjalta seuraaviin osatehtäviin.

1. Anna esimerkki alkuluvusta, joka ei ole alkulukukaksonen. (3 p.)
2. Onko tekoälyn alkulukukaksonen määritelmä yhtäpitävä tehtävän määritelmän kanssa? (3 p.)
3. Onko tekoälyn perustelu alkulukukaksosten lukumäärän äärettömyydelle matemaattisesti pätevä? (6 p.)

## 10.A Teksti: Lainaus tekoälyltä

*Käyttäjän syöttämä kysymys:* Kuinka monta alkulukukaksosta on olemassa?

*Tekoälyn vastaus:* Alkulukukaksonen on alkuluku, jolla on vain yksi positiivinen kokonaisluku sen ja jonkin toisen alkuluvun välissä. Esimerkiksi luvut 3 ja 5 ovat alkulukukaksosia, sillä ne ovat molemmat alkulukuja ja niiden välissä on vain yksi positiivinen kokonaisluku (luku 4). Alkulukukaksosten määrää ei tiedetä tarkasti, mutta niitä uskotaan olevan äärettömän paljon. Tämä johtuu siitä, että on olemassa äärettömän paljon alkulukuja ja minkä tahansa kahden alkuluvun välissä on aina vähintään yksi positiivinen kokonaisluku, joka erottaa ne. Siksi minkä tahansa kahden alkuluvun välissä on ainakin yksi alkulukukaksospari.

Lähde: ChatGPT. chat.openai.com. Viitattu: 5.12.2022. Muokkaus: YTL.

1. Esim. alkuluku 97 ei ole alkulukukaksonen, sillä  $97-2=95=5*19$  ja  $97+2=99=11*3^2$ .
2. Määritelmä on yhtäpitävä tehtävän määritelmän kanssa, sillä alkuluvut ovat positiivisia kokonaislukuja ja niiden välissä saa olla vain yksi positiivinen kokonaisluku eli lukujen välinen etäisyys on kaksi.
3. Perustelu ontuu jo esimerkiksi alkulukujen 2 ja 3 kohdalla. Niiden välissä ei ole yhtään positiivista kokonaislukua, joka erottaisi ne. Samoin alkulukujen 89 ja 97 välissä ei ole yhtään alkulukukaksosparia, vaikka ne ovat peräkkäiset alkuluvut.

## COMPUTER SOFTWARE



## Get Started

You can use the software for free with the 90-day trial version.

Windows >

Select your OS:

Mac >

## To activate:

Activation Guide >

Issue License Code from Claim Code

Member Login >

## 11. Brownin liike (12 p.)

Vuonna 1827 kasvitieteilijä Robert Brown tutki mikroskoopilla, miten siitepölyhiukkanen liikkuu nykien vedessä. Brownin koe viittasi molekyylien olemassaoloon, ja sillä oli siten tärkeä rooli atomiteorian historiassa.

Tutkitaan yksinkertaistettua Brownin liikettä. Hiukkasen liike tasossa alkaa origosta. Tasaisin väliajoin hiukkanen liikkuu yhden yksikön verran joko ylös, alas, oikealle tai vasemmalle. Jokaisen suunnan todennäköisyys on  $\frac{1}{4}$ . Esimerkiksi ensimmäisen askeleen jälkeen mahdolliset sijainnit ovat  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(1, 0)$  ja  $(-1, 0)$ .

Tutkitaan hiukkasen sijaintia neljän askeleen jälkeen. Kutsutaan tätä päätepisteeksi.

Määritä päätepisteen kaikki mahdolliset  $x$ -koordinaatit sekä niiden todennäköisyydet.

Kaikki mahdolliset  $x$ -koordinaatin arvot ovat  $-4$ ,  $-3$ ,  $-2$ ,  $-1$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2$ ,  $3$  ja  $4$ . Merkitään askelta oikealle  $o$ , vasemmalle  $v$ , ylös  $y$  ja alas  $a$ .

**Tapaus  $x=4$ :** Askeleet päätyä koordinaattiin  $x=4$  liikkumalla vain  $x$ -akselin suunnassa ovat "oooo". Sen todennäköisyys on  $\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$ . Sama todennäköisyys  $\frac{1}{256}$  pätee  $x$ -koordinaatille  $x=-4$ .

**Tapaus  $x=3$ :** Neljän askeleen päässä origosta olevat pisteet, joissa  $x=3$ , ovat  $(3, 1)$  ja  $(3, -1)$ . Todennäköisyys päätyä näihin pisteisiin, on pisteeseen johtavien eri reittien todennäköisyyksien summa ja eri reitit ovat yhtä todennäköisiä.

Pisteeseen  $(3, 1)$  päästään neljää eri reittiä neljällä askeleella liikkumalla "oooy", "ooyo", "oyoo" tai "yooo". Todennäköisyys päätyä pisteeseen  $(3, 1)$  on siis  $\left(\frac{1}{4}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^3$ . Sama pätee pisteeseen  $(3, -1)$ , joten todennäköisyys päätyä  $x$ -koordinaattiin  $x=3$  on  $\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{32}$ . Vastaava todennäköisyys pätee symmetrian vuoksi myös niihin mahdollisiin pisteisiin, joissa  $x=-3$ .

**Tapaus  $x=2$ :** Neljän askeleen päässä origosta olevat pisteet, joissa  $x=2$ , ovat  $(2, 0)$ ,  $(2, 2)$  ja  $(2, -2)$ . Pisteeseen  $(2, 0)$  päästään askelilla  $x$ -akselia pitkin "vooo", "ovoo", "oovo", "ooov" ja poikkeamalla  $x$ -akselilta "yao", "ayoo", "oyao", "oayo", "ooya", "ooay", "yoao", "yooa", "oyoa", "aooy", "aoyo", "oaoy". Pisteeseen  $(2, 0)$  päätyä todennäköisyys on siis  $16 * \left(\frac{1}{4}\right)^4$ . Pisteeseen  $(2, 2)$  päästään askelilla "ooyy", "oyoy", "oyyo", "yooy", "yoyo" ja "yyoo". Todennäköisyys päätyä pisteeseen  $(2, 2)$  on  $6 * \left(\frac{1}{4}\right)^4$  ja sama todennäköisyys pätee pisteelle  $(2, -2)$ . Todennäköisyys päätyä pisteeseen, jossa  $x=2$ , on  $16 * \left(\frac{1}{4}\right)^4 + 6 * \left(\frac{1}{4}\right)^4 + 6 * \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{7}{64}$ . Vastaava todennäköisyys pätee symmetrian vuoksi myös pisteisiin, joissa  $x=-2$ .

**Tapaus  $x=1$ :** Tehtävän ehdoilla saavutettavat pisteet ovat  $(1,1)$ ,  $(1,3)$ ,  $(1,-1)$  ja  $(1,-3)$ . Pisteisiin  $(1,1)$  ja  $(1,-1)$  on yhtä todennäköistä päätyä. Eri reittejä pisteeseen  $(1,1)$  ovat "ovyo", "ovoy", "oayy", "oyya", "oyov", "oyay", "oyvo", "oovy", "ooyv", "vyoo", "voyo", "vooy", "aoyy", "ayyo", "ayoy", "yayo", "yaoy", "yvoo", "yyao", "yyoa", "yovo", "yoay", "yoya", "yoov" ja näiden reittien yhteenlaskettu todennäköisyys on  $24 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4$ . Sama todennäköisyys pätee pisteelle  $(1,-1)$ .

Pisteeseen  $(1,3)$  päästään kulkemalla "oyyy", "yyyo", "yyoy" ja "yoyy". Todennäköisyys päätyä tähän pisteeseen on  $4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4$  ja sama pätee pisteelle  $(1,-3)$ . Todennäköisyys päätyä koordinaatilla  $x=1$  olevaan pisteeseen on  $24 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 + 24 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{7}{32}$ . Sama todennäköisyys on päätyä koordinaattiin  $x=-1$ .

**Tapaus  $x=0$ :** Pisteet ovat  $(0,0)$ ,  $(0,2)$ ,  $(0,-2)$ ,  $(0,4)$  ja  $(0,-4)$ . Origoon päädytään askelilla "oovv", "ovov", "ovvo", "vvo", "vovo", "voov", "yyaa", "yaya", "yaay", "aayy", "ayay", "ayya", "voya", "voay", "yavo", "yaov", "yvoa", "yova", "ovay", "ovya", "ayvo", "ayov", "vyoa", "vyao", "yvao", "yoav", "oyva", "oavy", "oyav", "oayv", "aoyv", "vaoy", "vayo", "avyo", "avoy", "aovy". Reitin todennäköisyyksien summa on  $32 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4$ . Pisteeseen  $(0,2)$  johtaa reitit "yyya", "yyay", "yayy", "ayyy", "voyy", "ovyy", "yvoy", "yovy", "yyvo", "yyov", "vyyo", "vyoy", "yvyo", "oyyv", "oyvy", "yoyv". Reitin todennäköisyyksien summa on  $16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4$  ja sama pätee reitille  $(0,-2)$ . Pisteeseen  $(0,4)$  päästään kulkemalla "yyyy" ja reitin todennäköisyys on  $\left(\frac{1}{4}\right)^4$ , joka on myös pisteen  $(0,-4)$  todennäköisyys. Todennäköisyys päätyä koordinaatilla  $x=0$  olevaan pisteeseen on  $36 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 + 2 \cdot 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{35}{128}$ .

## 12. Potensseja aritmeettisissa lukujonoissa 12 p.

- Olkoon  $k > 0$  kokonaisluku. Osoita, että jos päättymätön kasvava aritmeettinen lukujono sisältää luvut  $k^2$  ja  $k^3$ , niin se sisältää luvun  $k^4$ . (6 p.)
- Osoita, että jos  $r^2$ ,  $r^3$  ja  $r^4$  sisältyvät aritmeettiseen lukujonoon, niin  $r$  on rationaaliluku. (6 p.)

1. Aritmeettisessa lukujonossa peräkkäisten jäsenten erotus  $d$  on vakio. Jonon lukujen  $k^3$  ja  $k^2$  erotus on  $k^3 - k^2 = k^2(k-1) = m \cdot d$ . Nyt lukujen  $k^4$  ja  $k^3$  erotus  $k^4 - k^3 = k \cdot k^2(k-1) = k \cdot m \cdot d$ , joten lukujonossa on jossain kohtaa luku  $k^4$ .

2. Edellisen kohdan merkinnöillä, on olemassa erisuuret kokonaisluvut  $p$  ja  $q$ , joille  $r^3 - r^2 = p \cdot d$  ja  $r^4 - r^3 = q \cdot d$ . Luku  $r$  voidaan esittää muodossa  $r = \frac{r(r^3 - r^2)}{r^3 - r^2} = \frac{r^4 - r^3}{r^3 - r^2} = \frac{q \cdot d}{p \cdot d} = \frac{q}{p}$ , missä  $p$  ja  $q$  ovat erisuuret kokonaisluvut. Niinpä  $r$  on rationaaliluku.

13. Raja-arvo (12 p.)

Ohjelmiston mukaan

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right) = \frac{1}{6}.$$

Perustele tämä tulos seuraavien välivaiheiden avulla.

[i] Osoita, että  $x - \sin x - \frac{1}{6}x^3 \leq 0$ , kun  $0 \leq x \leq 1$ .

[ii] Osoita, että  $x - \sin x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \geq 0$ , kun  $0 \leq x \leq 1$ .

[iii] Osoita, että  $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 \leq x - \sin x \leq \frac{1}{6}x^3$ , kun  $0 \leq x \leq 1$ .

[iv] Osoita, että  $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 \geq x - \sin x \geq \frac{1}{6}x^3$ , kun  $-1 \leq x \leq 0$ .

[v] Perustele näiden epäyhtälöiden avulla, että raja-arvo on  $\frac{1}{6}$ .

Välivaiheita voi perustella toisistaan riippumattomasti. Esimerkiksi vaiheen [iv] osapisteet saa osoittamalla, että se seuraa vaiheesta [iii], riippumatta siitä, onko vaihe [iii] todistettu. Sama pätee muihinkin vaiheisiin.

[i] Tutkitaan funktiota

$$\text{define } f(x) = x - \sin(x) - \frac{1}{6}x^3 \mid 0 \leq x \leq 1$$

done

Koska

$$\frac{d}{dx}(f(x))$$

$$\frac{-(x^2 + 2 \cdot \cos(x) - 2)}{2}$$

ja

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{-(x^2 + 2 \cdot \cos(x) - 2)}{2} \right)$$

$$\sin(x) - x$$

$$f_{\max}(\sin(x) - x) \mid 0 \leq x \leq 1$$

$$\{\text{MaxValue}=0, x=0\}$$

on toinen derivaatta korkeintaan 0. Täten ensimmäinen derivaatta on vähenevä funktio ja saa suurimman arvonsa välin alkupisteessä  $x=0$ . Koska

$$\frac{-(x^2 + 2 \cdot \cos(x) - 2)}{2} \Big|_{x=0}$$

0

on ensimmäinen derivaatta negatiivinen tai nolla. Täten funktio  $f(x)$  on vähenevä funktio ja saa suurimman arvonsa välin alkupisteessä  $x=0$ :

$$f(x) \Big|_{x=0}$$

0

Niinpä  $f(x) \leq 0$  koko välillä  $[0, 1]$  eli  $x - \sin(x) - \frac{1}{6}x^3 \leq 0$ .

[ii] Tutkitaan funktiota

$$\text{define } g(x) = x - \sin(x) - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \mid 0 \leq x \leq 1$$

done

Koska

$$\frac{d}{dx}(g(x))$$

$$\frac{x^4 - 12 \cdot x^2 - 24 \cdot \cos(x) + 24}{24}$$

ja

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^4 - 12 \cdot x^2 - 24 \cdot \cos(x) + 24}{24} \right)$$

$$\frac{x^3 + 6 \cdot \sin(x) - 6 \cdot x}{6}$$

simplify (ans)

$$\frac{x^3}{6} + \sin(x) - x$$

niin huomataan, että  $g''(x) = -f(x)$ . Täten  $g''(x)$  on kasvava funktio ja saa pienimmän arvonsa välin alkupisteessä  $x=0$ :

$$\frac{x^3}{6} + \sin(x) - x \mid x=0$$

0

Niinpä  $g''(x)$  on epänegatiivinen funktio, joten  $g'(x)$  on kasvava funktio ja saa sekin pienimmän arvonsa välin alkupisteessä:

$$\frac{x^4 - 12 \cdot x^2 - 24 \cdot \cos(x) + 24}{24} \mid x=0$$

0

Koska funktion  $g'(x)$  pienin arvo on 0, on  $g'(x) \geq 0$  ja funktio  $g(x)$  kasvava funktio. Kasvavan funktion pienin arvo saadaan välin alkupisteessä:

$$g(x) \mid x=0$$

0

Koska funktio  $g(x) \geq 0$  eli  $x - \sin(x) - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \geq 0$  välillä  $[0, 1]$ , on väite [ii] todistettu.

[iii] Kohdasta [i] saadaan  $x - \sin(x) \leq \frac{1}{6}x^3$  ja kohdasta [ii] saadaan  $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 \geq x - \sin(x)$ . Yhdistämällä nämä tulokset seuraa väite.

[iv] Funktiot  $f(x)$  ja  $g(x)$  ovat parittomia. Kun siirrytään negatiivisille muuttujan arvoille, kääntyvät epäyhtälömerkit eli kohdan [iii] nojalla väite pätee.

[v] Jaetaan kohdan [iii] epäyhtälö monomilla  $x^3 > 0$  välillä  $[0, 1]$ , jolloin saadaan

$$\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} \leq \frac{1}{x^2} - \frac{\sin(x)}{x^3} \leq \frac{1}{6}. \text{ Kun } x \rightarrow 0, \text{ niin alaraja } \frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} \rightarrow \frac{1}{6}, \text{ joten väitteen lausekkeen raja-arvo jää}$$

puristuksiin kahden  $\frac{1}{6}$  väliin. Näin ollen myöskin  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{\sin(x)}{x^3} \right) = \frac{1}{6}$ .





