k14

CASIO

Laske Laudatur ClassPadilla

- Lyhyt matematiikka, kevät 2014 –

”Enemmän aikaa matematiikan opiskeluun,

vähemmän aikaa laskimen opetteluun.”

Casio Scandinavia

Keilaranta 4 | 02150 Espoo | info@casio.fi

Hyvä lukija,

Luet kevään 2014 lyhyen matematiikan yo-kokeen ratkaisuja ClassPad fx-CP400 laskimen tietokoneohjelmalla ClassPad Manager tehtyinä. Ohjelma toimii juuri samalla tavalla kuin laskinkin, joten toisen käytön osaaminen takaa toisenkin käytön osaamisen. Symbolinen laskin on mainio apuväline tukemaan myös lyhyen matematiikan opiskelua ja koevastaamista.

Manager -ohjelma sopii erinomaisesti tällaiseen työskentelyyn ja sillä on helppo tuottaa ruudun-kaappauksia laskuista, kuvaajista, diagrammeista, taulukoista, jne. Oikean hiiren napin valikossa on valmis komento sieppauskuvan ottamiseksi. Manager-ohjelma on mukana YTL:n kokeiden sähköistämis-projektissa, joten opiskelijat voivat käyttää sitä tulevaisuudessa vastatessaan sähköisissä yo-kokeissa.

Vastaustapa vuoden 2019 kokeissa on näillänäkymin samanlainen kuin tässä vihkossa käytetty – perusteluja ja ruudunkaappauksia yhteen dokumenttiin tallennettuna. Tätä vihkosta voi siis perustellusti pitää yhtenä mallina sähköisen kokeeseen vastaamisesta.

Kevään 2014 lyhyen matematiikan kokeessa perustaidoilla selvisi varsin pitkälle. Yhtälönratkaisutaitoja ja geometrian perusteita mitattiin useissa tehtävissä ja derivointitaitoja tarvittiin kahdessa tehtävässä. Yhteensä näillä tehtävillä saa kasaan täydet 60 pistettä. Lisänä kokeesta löytyi prosenttilaskennan ja todennäköisyyslaskennan tehtävät sekä lukujonoihin liittyvä iterointitehtävä 11.

Tämä ratkaisuvihkonen on tarkoitettu niin opettajien ammattitaidon kehittämiseen kuin opiskelijoidenkin tukimateriaaliksi. Mitä keväällä 2014 kysyttiin, miten symbolisella ClassPadilla voi laskuihin tarttua, kuinka niitä voi hahmotella tai tarkistaa? Uskon tästä olevan hyötyä myös kirjoituksiin tulevaisuudessa valmistautuville abeille kertauksen yhteydessä.

Lisää tukimateriaalia on Casion kotisivuilla

http://www.casio-laskimet.fi

Sivun ”Ajankohtaista” –palstalla on mm. linkki toisen asteen opinnot kattavaan suomenkieliseen kirjaan ja lukion kursseja tiivistetysti esittelevään YouTube-kanavaan. Sivuilta löydät myös aiempien yo-kokeiden ratkaisuja, ideoita ryhmätöihin, laskinesittelyjä ja tietoa tulevista tapahtumista.

Ystävällisin terveisin,

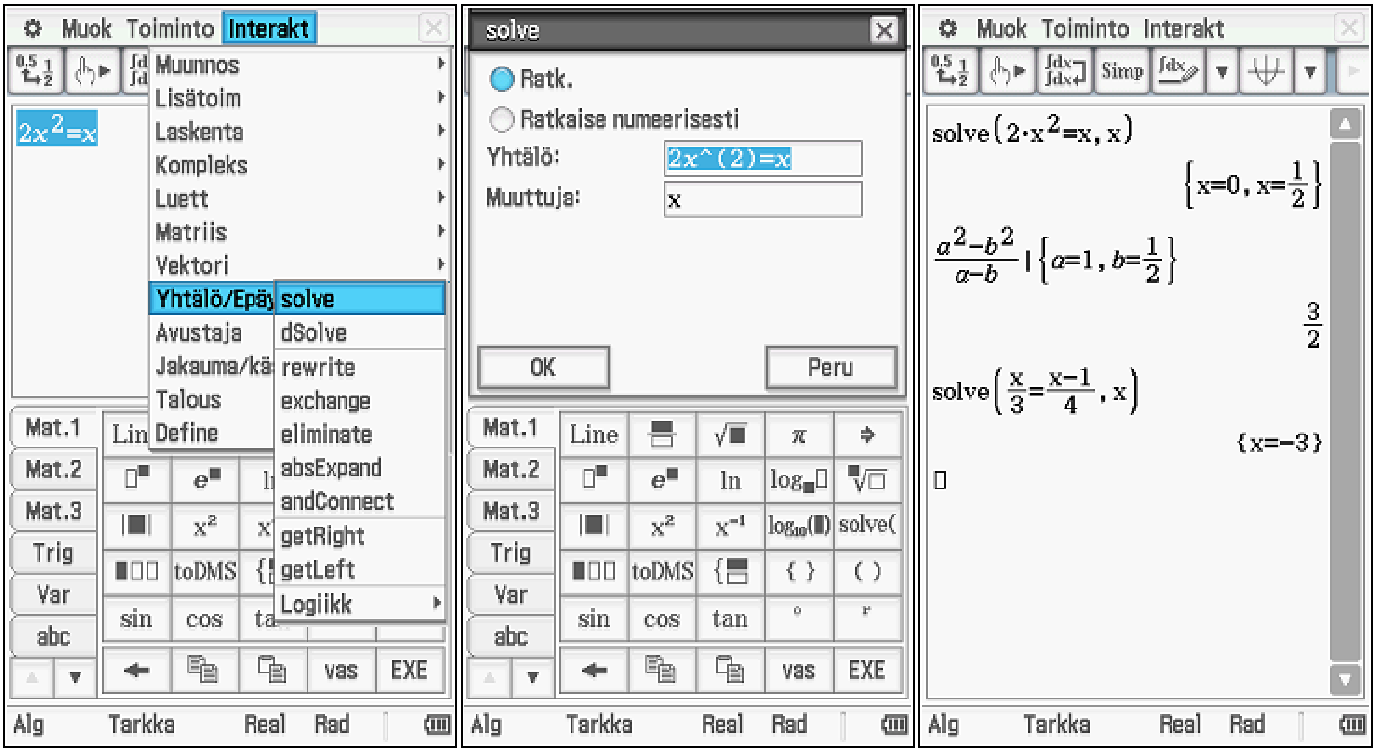
Espoossa 20.3.2014 Pepe Palovaara

1. **a)** Ratkaise yhtälö $2x^2 = x$.

b) Laske lausekkeen $\dfrac{a^2 - b^2}{a - b}$ arvo, kun $a = 1$ ja $b = \dfrac{1}{2}$.

c) Ratkaise yhtälö $\dfrac{x}{3} = \dfrac{x-1}{4}$.

Tehtävä 1. Kaikki osatehtävät on suoraan ClassPadilla laskettavissa. Käyttäjän ei tarvitse kirjoittaa komentoja itse. Esimerkiksi a-kohdan yhtälön ratkaisussa lasku kirjoitetaan sellaisenaan, maalataan kosketuskynällä ja valitaan interaktiivisesta valikosta komento solve. Tällöin laskin täydentää tarvittavat komennot ja kirjoitusasu on aina oikein. b-kohdan lausekkeen voi myös jakaa tekijöihin (factor):



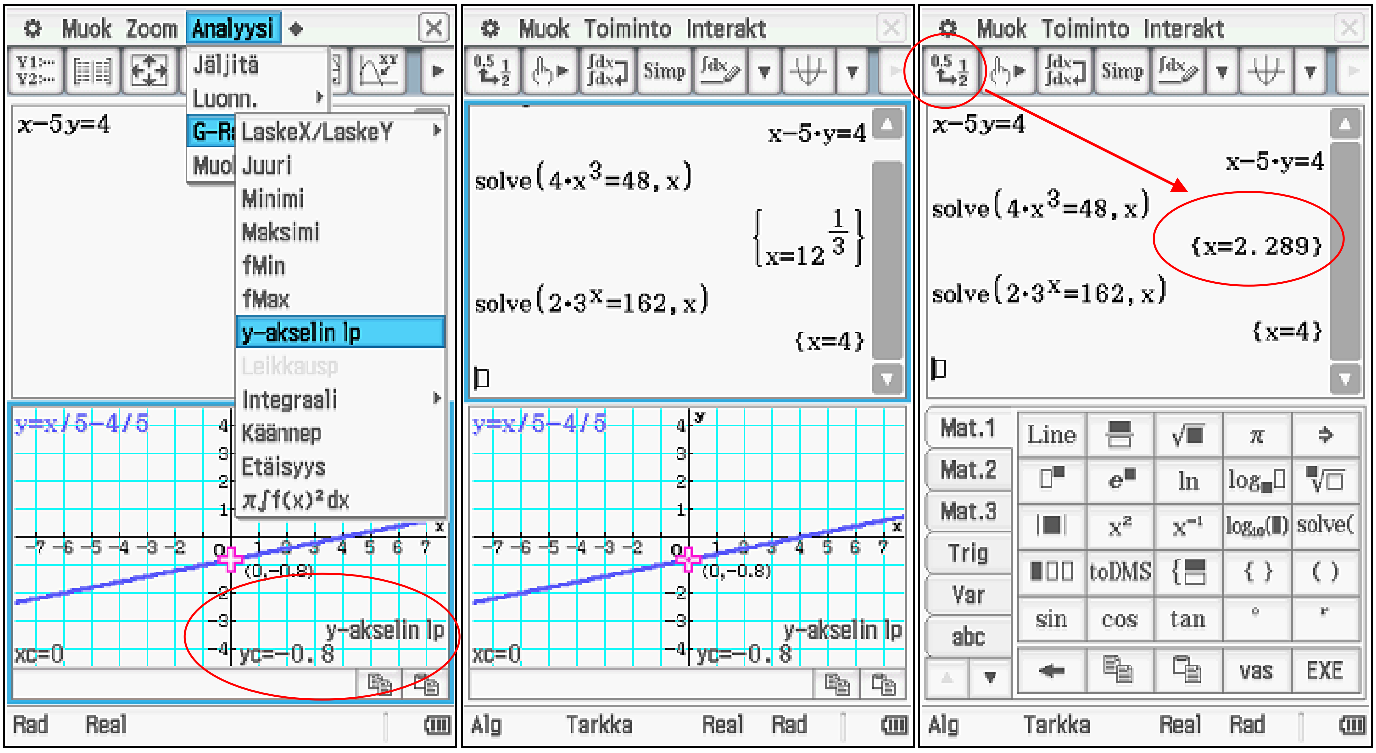
Vastaus: a) x = 0 tai x = 1/2 **b) 3/2** **c) x = -3**

2. **a)** Missä pisteessä suora $x - 5y = 4$ leikkaa y-akselin?

b) Ratkaise yhtälö $4x^3 = 48$. Anna tarkka arvo ja kolmidesimaalinen likiarvo.

c) Ratkaise yhtälö $2 \cdot 3^x = 162$.

Tehtävä 2. Kuten tehtävä 1, tämäkin on suoraan laskimella laskettava tehtävä. a-kohdan suoran yhtälön voi vetää koordinaatiston päälle, jolloin sen kuvaaja piirtyy. Tämän jälkeen valikosta Analyysi -> G-ratk -> y-akselin lp saadaan leikkauspisteen y-koordinaatti selville. b- ja c-kohdissa käytetään tehtävässä 1 kuvattua yhtälön ratkaisumenetelmää:



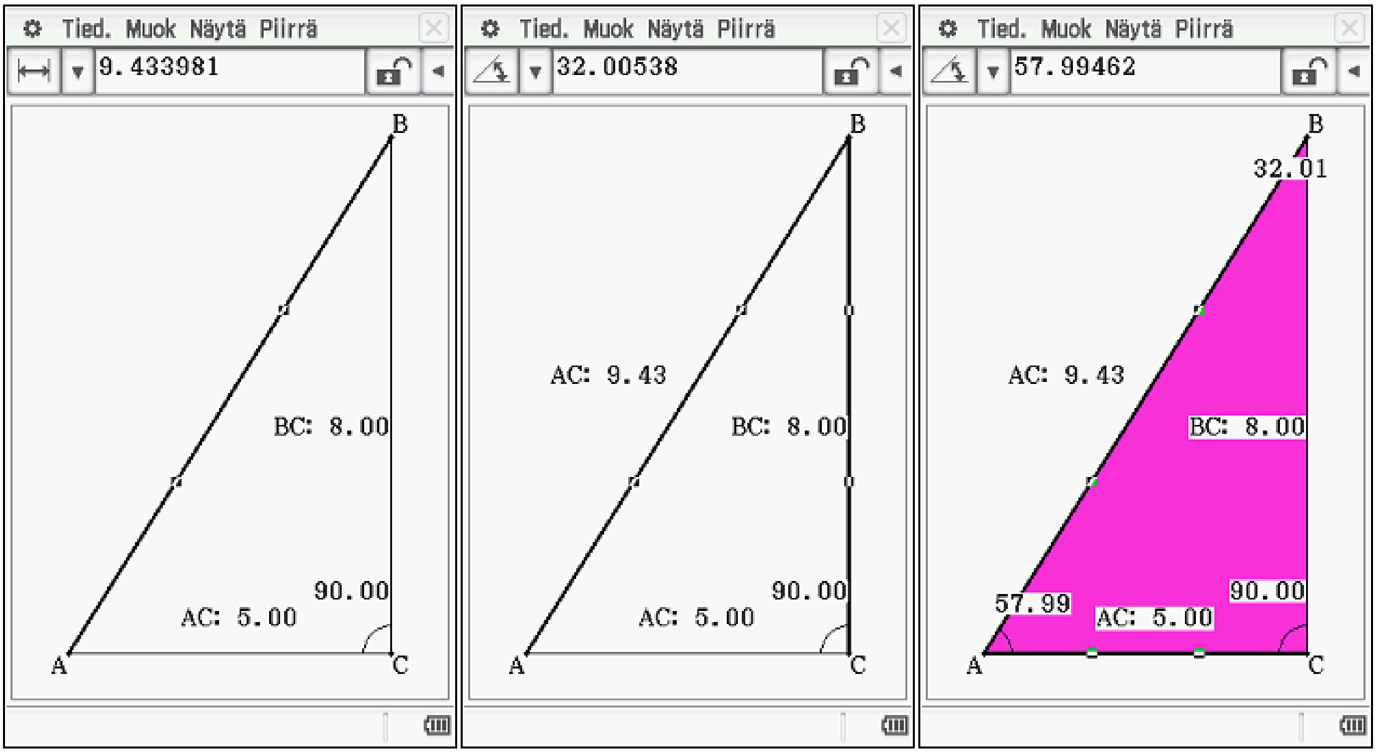
Vastaustarkkuuden voi vaihtaa sopivaksi asetuksista Perusmuoto -> Numeromuoto -> Korj. 3. Jos laskimen alareunassa lukee ”Tarkka”, niin vastaus ilmoitetaan tarkkana arvona. Tämän voi vaihtaa likiarvoksi maalaamalla vastauksen ja koskemalla vasemmassa yläreunassa olevaa nappia (oikean puoleisin kuva)

Vastaus: a) (0; -0,8) **b) x =** $\sqrt[3]{12} \approx 2,289$ **c) x = 4**

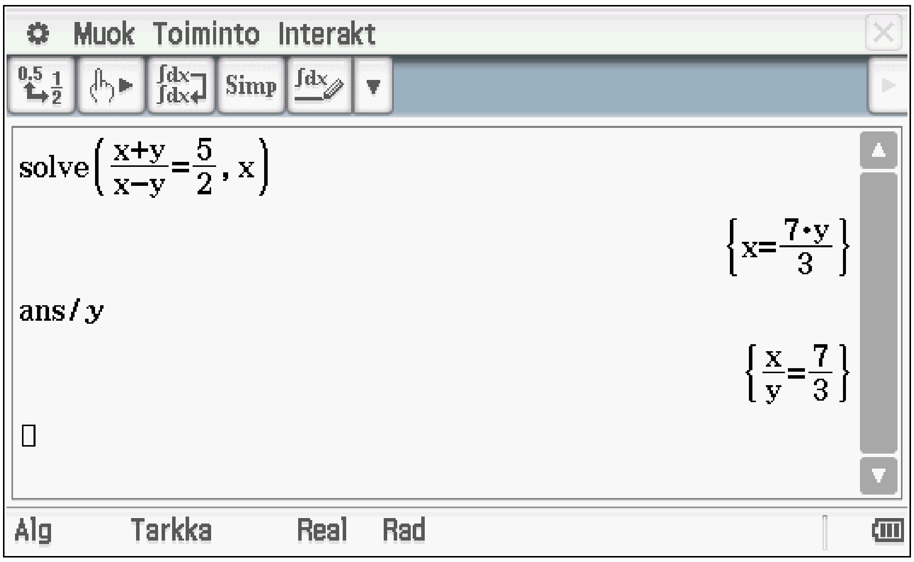
3. **a)** Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 5,0 cm ja 8,0 cm. Määritä hypotenuusan pituus millimetrin tarkkuudella ja terävien kulmien suuruus asteen tarkkuudella.

b) Positiiviset luvut x ja y toteuttavat yhtälön $\frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{2}$. Määritä lausekkeen $\frac{x}{y}$ tarkka arvo.

Tehtävä 3. a-kohdan tehtävän voi piirtää Geometria-sovellukseen annetuilla mitoilla. Kun kolmiosta valitaan hypotenuusa, näkyy sen pituus kuvion yläpuolella ominaisuusrivillä. Vastaavasti kolmion kulmat saadaan selville valitsemalla kaksi sivua yhtäaikaa. Valinnat voi poistaa koskemalla tyhjää kohtaa näytössä.



b-kohdassa ratkaistaan ensin yhtälö muuttujan x suhteen ja lasketaan sitten kysytty suhde jakamalla muuttujalla y > 0:



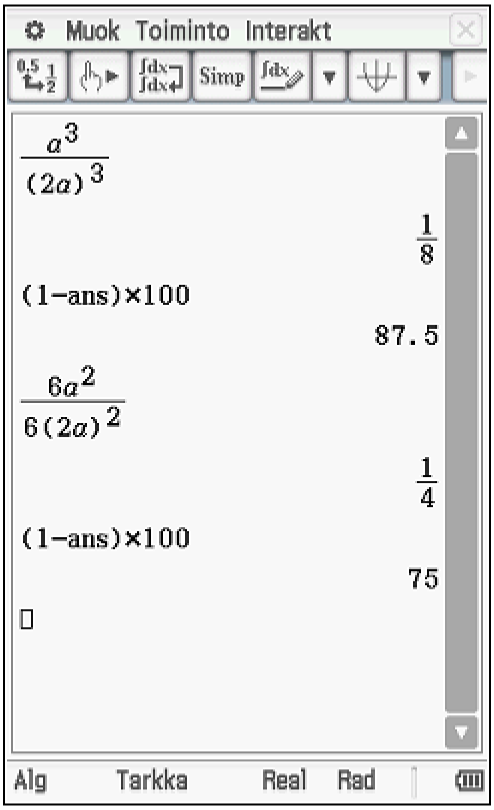
Vastaus: a) Hypotenuusa on n. 9,4 cm ja kulmat n. 32° ja 58°. b) x/y = 7/3

4. Kuution särmän pituus puolittuu. Kuinka monta prosenttia pienenee kuution

a) tilavuus?

b) sivutahkojen yhteenlaskettu pinta-ala?

Tehtävä 4. Merkitään alkuperäisen kuution sivun pituutta 2a, jolloin pienemmän kuution sivuksi saadaan a. Lasketaan laskimella kysytyt suhteet:



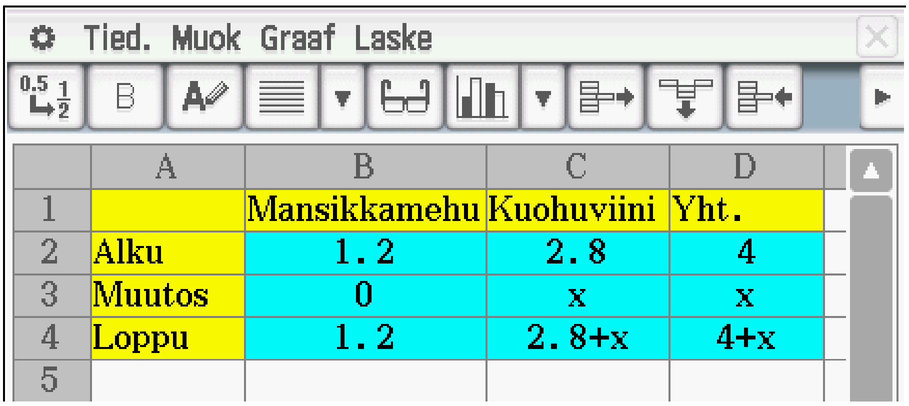
Norjalaisen matematiikon Tor Andersenin tekemä kirja ClassPadin käytöstä toisen asteen opinnoissa koostuu keskeisimmän oppiaineksen esimerkeistä.

Lataa suomenkielinen kirja ilmaiseksi osoitteesta www.casio-laskimet.fi

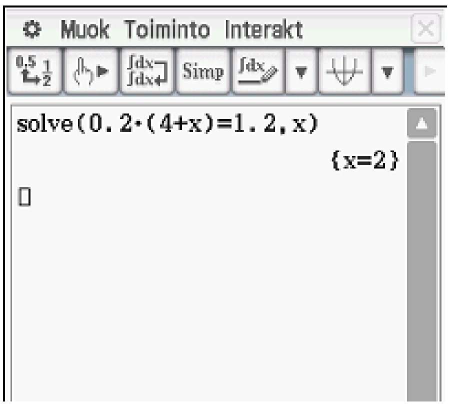
Vastaus: a) 87,5% b) 75%

5. Boolimaljassa on 4,0 litraa sekoitusta, jonka tilavuudesta 70 % on kuohuviiniä ja 30 % mansikkamehua. Kuinka paljon siihen täytyy lisätä kuohuviiniä, jotta mehun osuus on 20 %?

Tehtävä 5. Taulukoidaan ilmeisesti lakkiaisboolin ainesosat Taulukko-sovelluksessa:



	A	B	C	D
1		Mansikkamehu	Kuohuviini	Yht.
2	Alku	1.2	2.8	4
3	Muutos	0	x	x
4	Loppu	1.2	2.8+x	4+x
5				



Vastaus: Kuohuviiniä pitää lisätä 2,0 litraa.

6. Kiinalainen arvoitus 5 000 vuoden takaa: Häkissä on fasaaneja ja kaniineja. Niillä on yhteensä 35 päätä ja 94 jalkaa. Kuinka monta fasaania ja kuinka monta kaniinia häkissä on?

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Common_Pheasant_RWD2.jpg>. Luettu 12.3.2013.

<http://www.hdwallpapersarena.com/rabbit-wallpapers.html>. Luettu 12.3.2013.

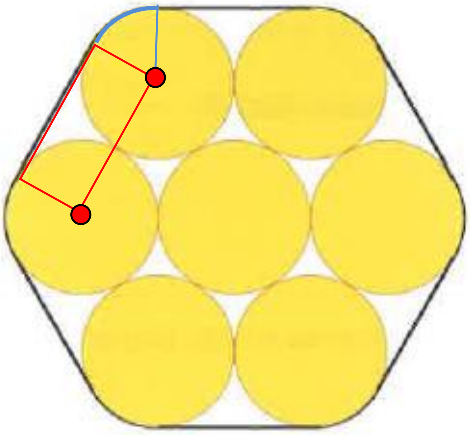
Tehtävä 6. Merkitään fasaanien määrää x ja kaniinien määrää y, jolloin saadaan yhtälöpari:

Vastaus: Fasaaneja on 23 ja kaniineja 12.

$$\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases}\Bigg|_{x,\,y}$$

$$\{x=23,\, y=12\}$$

7. Seitsemän mäntytukkia sidotaan vaijerilla alla olevan poikkileikkauskuvion mukaisesti. Kuinka paljon vaijeria tarvitaan yhteen kierrokseen? Jokaisen tukin halkaisija on 20 cm. Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.



Tehtävä 7. Vaijerin suorassa olevat kuusi osaa ovat tukkien keskipisteiden etäisyyden mittaiset eli 20 cm (punainen apukuva). Kaarevia osiakin on 6 kpl (sinisellä kuvassa) ja ne ovat ympyrän kaaria, jotka vastaavat keskuskulmaa 60° ja sädettä 10 cm:

$$6\times20+6\times\frac{60}{360}\times2\pi\times10$$

$$20\cdot\pi+120$$

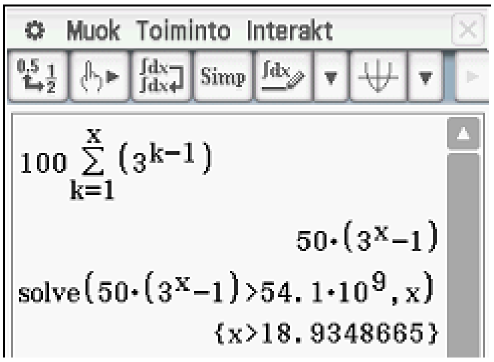
$$20\cdot\pi+120$$

$$182.8318531$$

Vastaus: Noin 183 cm.

8. Pyramidihuijari avaa pankkitilin ja siirtää ensimmäisessä vaiheessa tilille 100 €. Tämän jälkeen hän houkuttelee mukaan kolme sijoittajaa, joista jokainen siirtää toisessa vaiheessa huijarin tilille 100 €. Kolmannessa vaiheessa kukin näistä kolmesta houkuttelee edelleen mukaan kolme uutta sijoittajaa, joista jokainen siirtää 100 € huijarin tilille. Huijaus jatkuu saman kaavan mukaisesti. Kuinka monen vaiheen jälkeen tilillä oleva summa ylittää Suomen valtion vuoden 2013 talousarvion, joka on 54,1 miljardia euroa?

Tehtävä 8. Merkitään talletusten lukumäärää x (kokonaisluku). Talletukset muodostavat geometrisen jonon, joten talletusten summa saadaan laskettua muuttujan x funktiona. Ratkaistaan lopuksi, milloin summa ylittää 54,1 Mrd euroa:



Vastaus: 19 vaiheen jälkeen.

9. Sarjakuvanäyttelyn lipun hinta on 5 €, mutta lipunmyyjä on unohtanut ottaa mukaan vaihtorahaa. Lippujonossa on neljä asiakasta, joista kullakin on vain yksi seteli. Kahdella on 5 €:n seteli ja kahdella muulla 10 €:n seteli. Kuinka suurella todennäköisyydellä asiakkaat ovat sellaisessa järjestyksessä, että lipunmyyjä voi antaa heti jokaiselle oikean vaihtorahan?

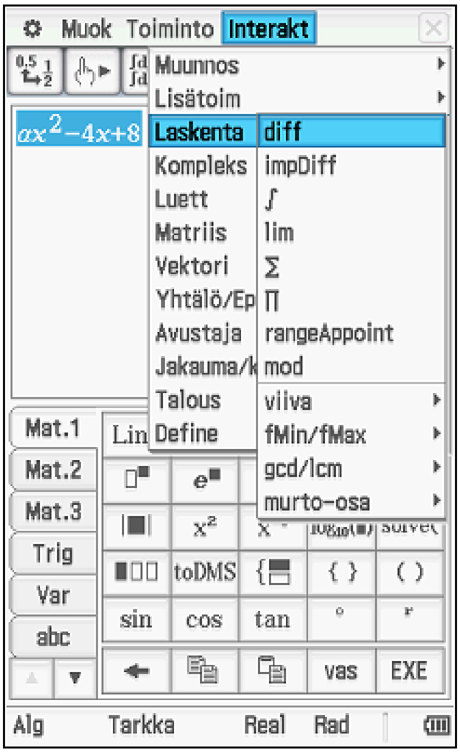
Tehtävä 9. Erilaisia tapoja, joilla eri suuruiset setelit voivat tulla myyjälle on 6 kpl: {5, 5, 10, 10}, {5, 10, 5, 10}, {5, 10, 10, 5}, {10, 5, 5, 10}, {10, 5, 10, 5} ja {10, 10, 5, 5}.

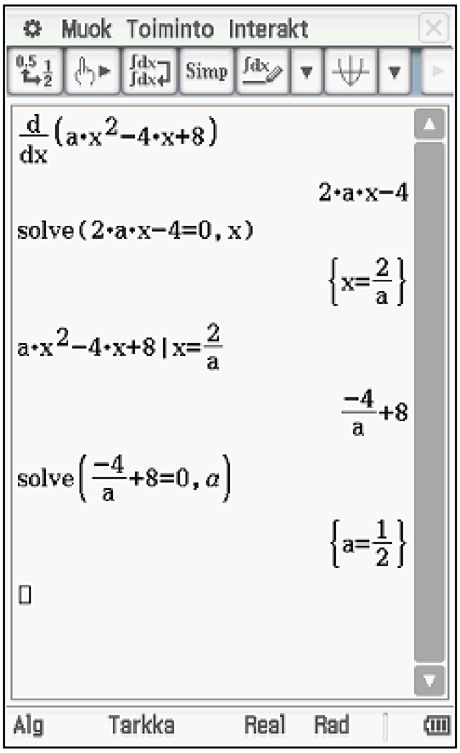
Koska myyjä tarvitsee ensin viiden euron setelin, jotta hänellä olisi yhtään vaihtorahaa, ei kolme jälkimmäistä tapausta tule kysymykseen. Myöskin kolmas vaihtehto kariutuu siihen, että ensimmäisen vaihtorahana annetun viitosen jälkeen ei seuraavalle kympin setelillä maksavalle ole enää vaihtorahaa jäljellä. Klassisen todennäköisyyden mukaan laskettuna tn on 2/6 = 1/3.

10. a) Millä vakion a arvolla funktion $f(x)=ax^2-4x+8$ pienin arvo on 0?

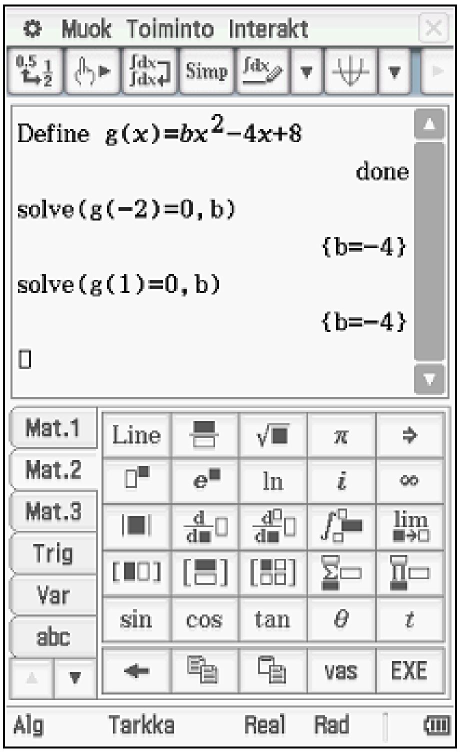
b) Millä vakion b arvolla funktio $g(x)=bx^2-4x+8$ saa positiivisia arvoja täsmälleen silloin, kun $-2<x<1$?

Tehtävä 10. a) Jos a = 0, niin kyseessä on laskeva suora eikä sillä ole pienintä arvoa. Jos a < 0, kyseessä on alaspäin avautuva paraabeli eikä sillekään voi määrittää pienintä arvoa. Siis on oltava a > 0. Pienin arvo saadaan paraabelin huipussa, joka löytyy derivaatan nollakohdasta:





b) Nyt on oltava b < 0, sillä kyseessä on oltava alaspäin avautuva paraabeli, jonka nollakohdat ovat -2 ja 1. Muodostetaan nollakohdista ehdot ja ratkaistaan vakion b arvo:



Huomautus: Käyttäjän ei tarvitse kirjoittaa laskuissa käytettyjä komentoja itse. Esimerkiksi viereisessä laskussa on käytetty interaktiivista valikkoa ja sieltä kohtaa Yhtälö/Epäyhtälö - > Solve.

Tällöin käyttäjältä kysytään ratkaistava yhtälö ja siinä oleva muuttuja, jonka suhteen ratkaisua etsitään. ClassPad täydentää komennot ja pitää näin laskun rakenteen aina oikeana ja laskimen ymmärtämässä muodossa.

Koko ClassPadin ajatus onkin helpottaa laskimen käyttöä niin paljon kuin mahdollista. Käyttäjän pitää tietää, mitä hän haluaa laskea. Käyttäjän ei tarvitse tietää komentosarjojen oikeinkirjoitusta. Näin pääpaino opetuksessakin voidaan pitää matematiikassa laskimien tukiessa sitä luontevasti.

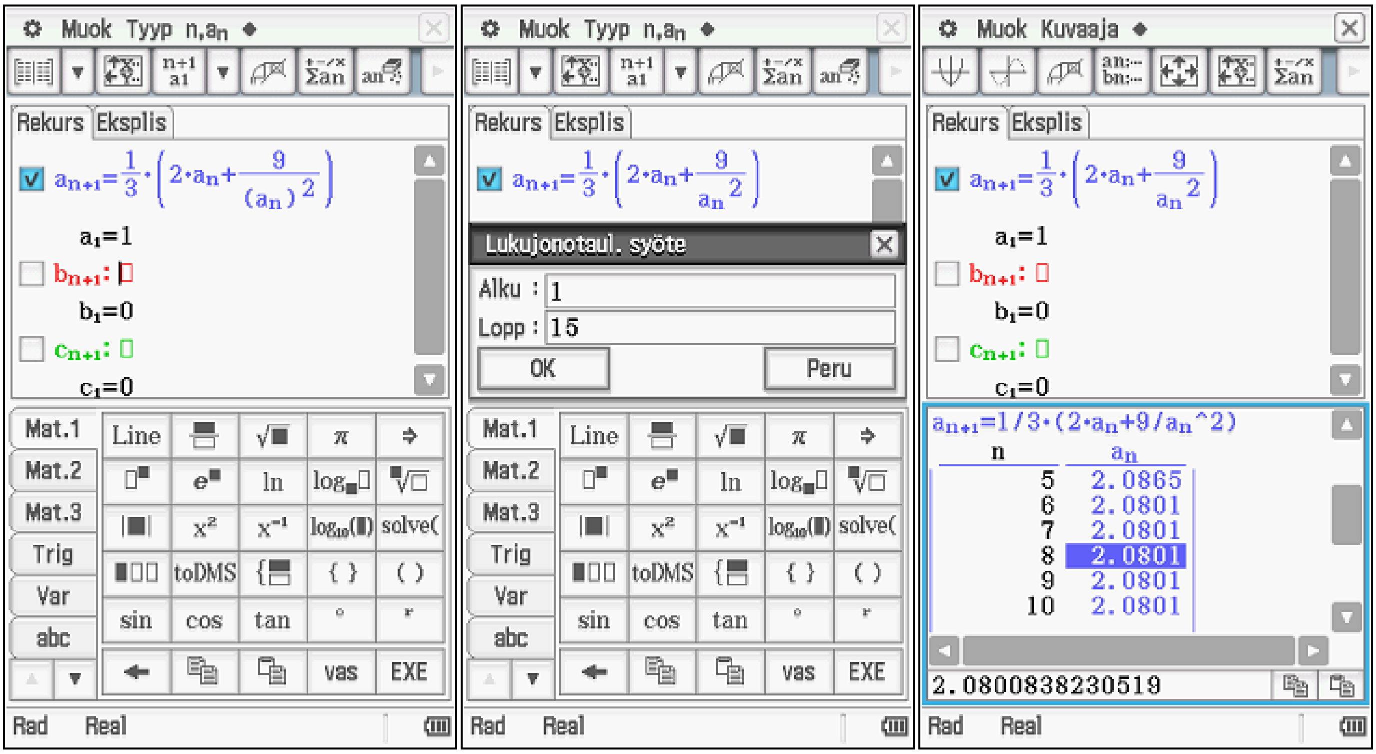
Vastaus: a) a = ½ b) b = -4

11. Eräs menetelmä luvun $\sqrt[3]{a}$ likiarvojen laskemiseksi perustuu kaavaan

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{(x_n)^2}\right),$$

kun $n = 1, 2, \ldots$ ja $x_1 = 1$. Tarkastellaan kyseistä jonoa $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, kun $a = 9$. Millä indeksin n arvolla näin lasketut likiarvot toteuttavat ensimmäisen kerran seuraavan ehdon: lukujen x_n ja x_{n+1} seitsemän ensimmäistä desimaalia ovat samat?

Tehtävä 11. Käytetään Lukujono –sovellusta. Syötetään lukujono ja alkuarvo ja taulukoidaan tulokset:

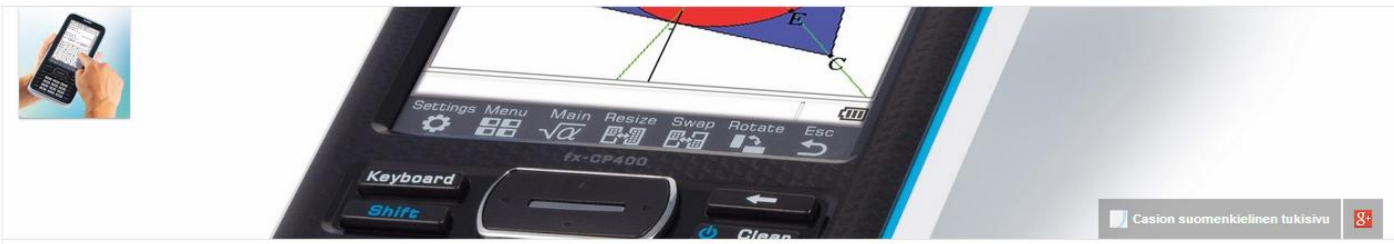


Taulukoiduista arvoista 6. on 2.08010352550957, 7. on 2.08008382323852 ja 8. on 2.0800838230519. Seitsemän ensimmäistä desimaalia ovat samat, kun n = 7 (jolloin n+1 = 8).

Vastaus. n = 7.

Casion suosittu YouTube –kanava löytyy hakusanalla fx-CP400. Tilaa kanava ja saat tiedon päivityksistä automaattisesti! Kanavalta löytyy käyttövinkkejä lukion kursseihin.

Sopii hyvin tueksi kurssien alkuun sekä itsenäiseen opiskeluun. Myös lyhyt matikka ja ylkkärivastaukset ovat tulossa omiksi soittolistoikseen.



fx-CP400

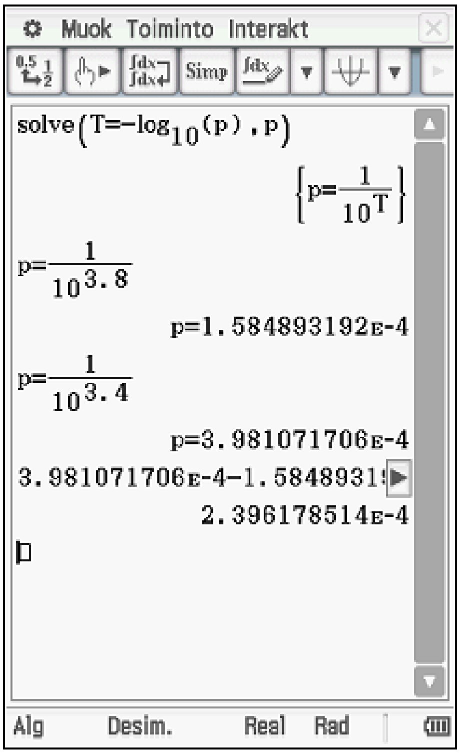
CASIO

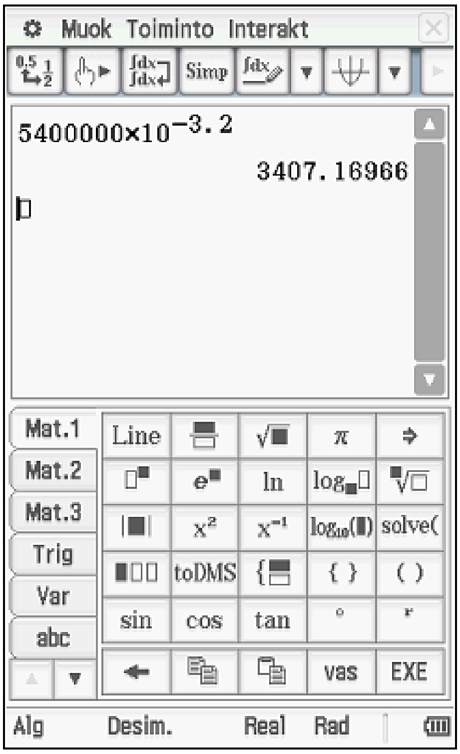
12. Tarkastellaan vahingollista tapahtumaa, jonka tilastollinen todennäköisyys on $0 < p \le 1$. Sen turvallisuusluku T määritellään kaavalla $T = -\lg p$.

a) Alkoholinkäytöstä johtuvan kuoleman turvallisuusluku on 3,8 ja tapaturmaisen kuoleman turvallisuusluku 3,4. Kumman kuolinsyyn todennäköisyys on suurempi?

b) Tieliikenteessä loukkaantumisen turvallisuusluku on 3,2. Kuinka monta suomalaista keskimäärin loukkaantuu vuosittain tieliikenteessä? Suomen väkiluku on noin 5,4 miljoonaa. Anna vastaus 100 henkilön tarkkuudella.

Tehtävä 12. Ratkaistaan annetusta turvallisuusluvun kaavasta p, jonka jälkeen voidaan laskea a-kohdan todennäköisyydet. b-kohta on suora kaavaan sijoitus:





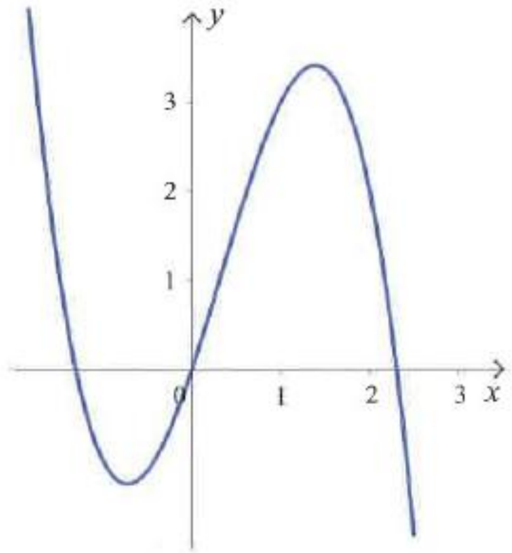
Vastaus:

a) Tapaturmainen kuolema on hiukan todennäköisempi.

b) n. 3400 suomalaista.

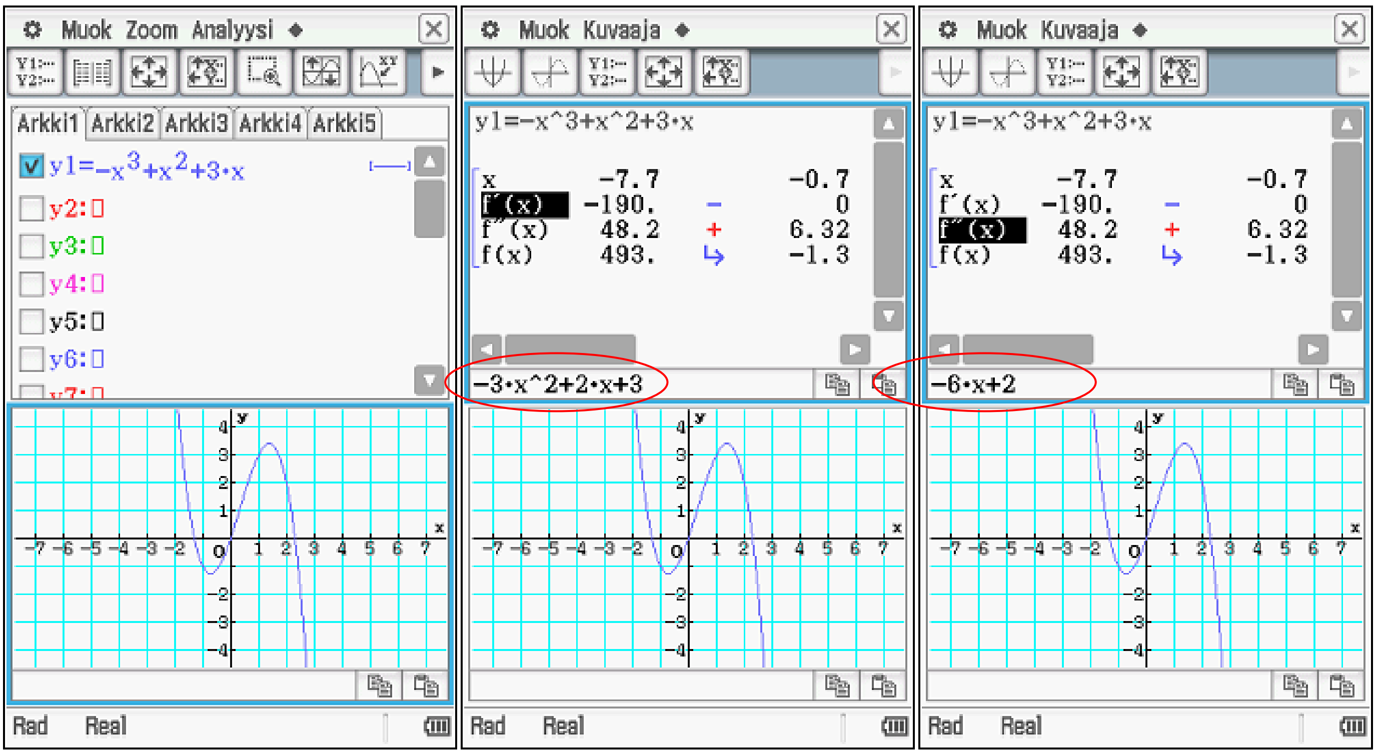
13. **a)** Mihin käyrän $y=-x^3+x^2+3x$ pisteeseen asetetun tangentin kulmakerroin on suurin mahdollinen?

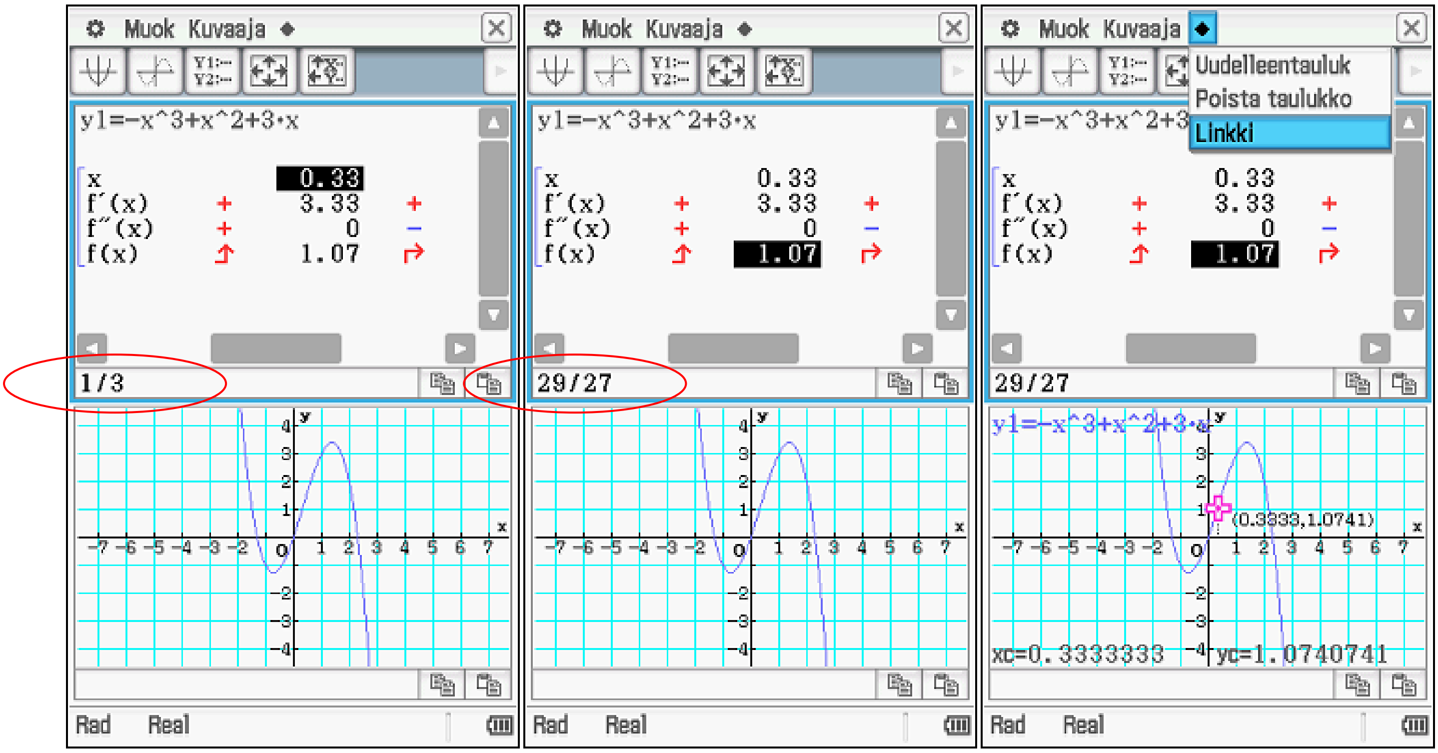
b) Määritä a-kohdan tangentin yhtälö.



Tehtävä 13. Koska kyseessä on tangentin (1. derivaatan ominaisuus) ääriarvotehtävä, tarvitaan laskuissa 2. kertaluvun derivaattaa. Ensimmäisen derivaatan ääriarvokohdassa on toisen derivaatan arvo 0 ja kiihtyvyys suurin.

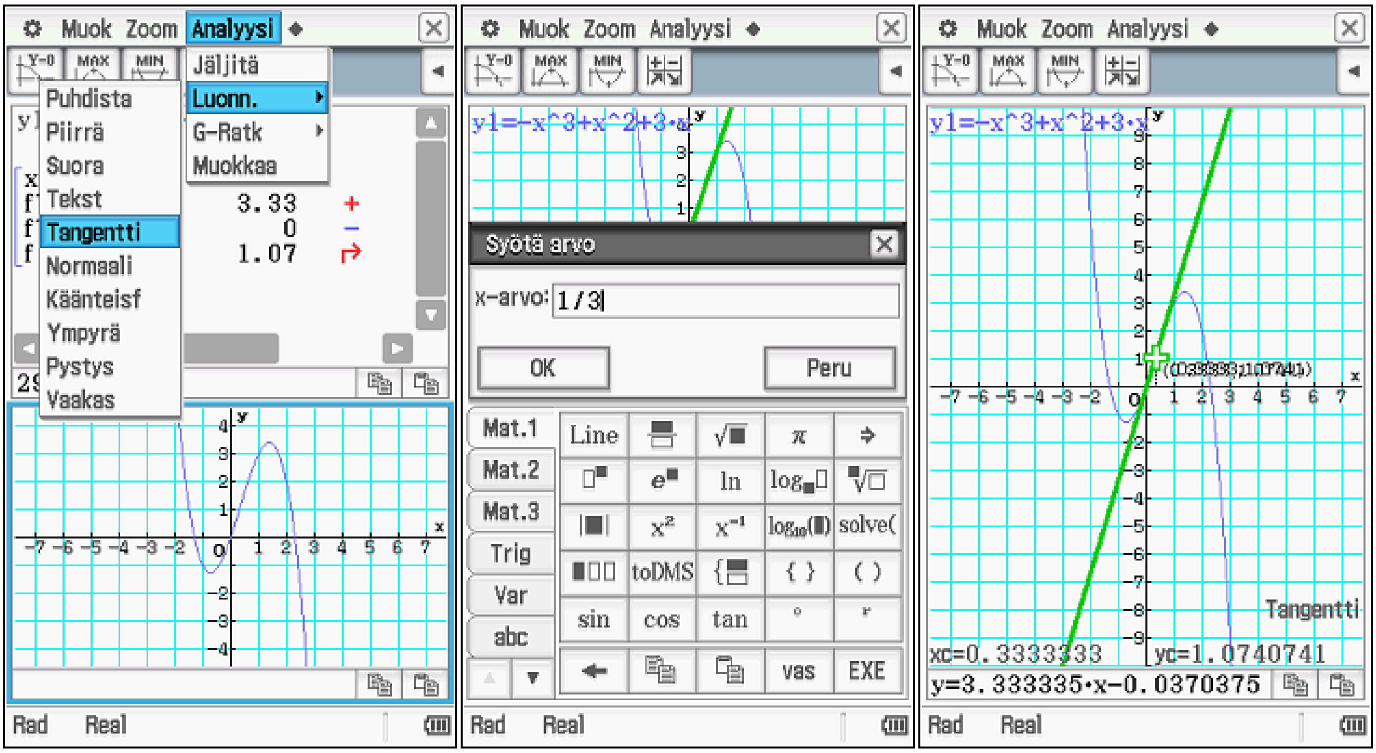
Tehdään ClassPadilla kulku- ja kuperuuskaavio niin, että taulukoituna näkyy myös toisen derivaatan lauseke. Taulukon alta on luettavissa tarkat arvot sekä derivaattafunktioille että tärkeille pisteille:



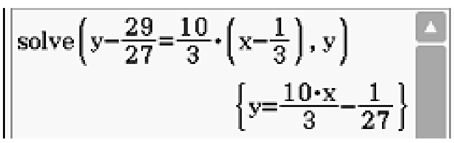


Oikeanpuolimmaisessa kuvassa kulkukaavio on linkitetty funktion kuvaajaan. Tällöin arvojen selaaminen kulkukaaviossa näyttää vastaavan pisteen funktion kuvaajalta.

b-kohdan tangentin määrittäminen voidaan tehdä myös samassa näkymässä:



Tai algebrallisesti Pääsovelluksessa:



Vastaus: a) (1/3, 29/27) b) y = 10/3*x - 1/27

14. Helsingin kaupunki teetti ennusteen kaupungin väestönkasvusta vuodesta 2012 alkaen. Ennusteen mukaan asukasluku kasvaa lineaarisesti aikavälillä 2012–2030 niin, että kaupungissa on 607 417 asukasta vuoden 2014 alussa ja 629 894 asukasta vuoden 2018 alussa. Ennusteessa ei otettu huomioon mahdollisia kuntaliitoksia.

a) Ennusteen mukaan asukasluku y toteuttaa yhtälön

$$y = a(x - 2014) + b,$$

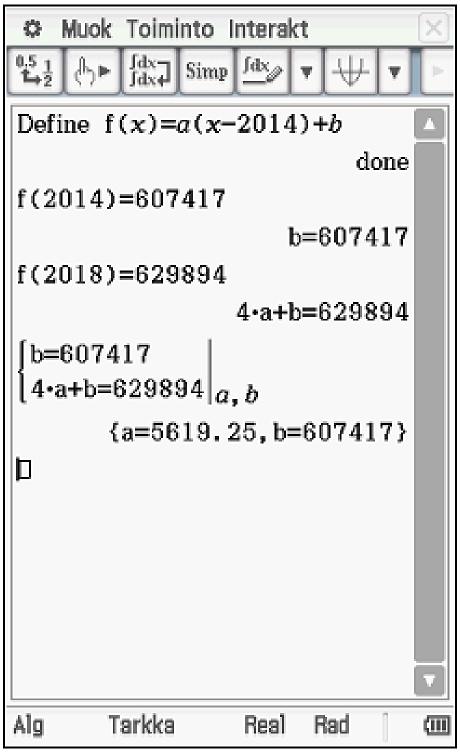
kun x on vuosiluku. Määritä vakioiden a ja b tarkat arvot käyttämällä yllä mainittuja tietoja.

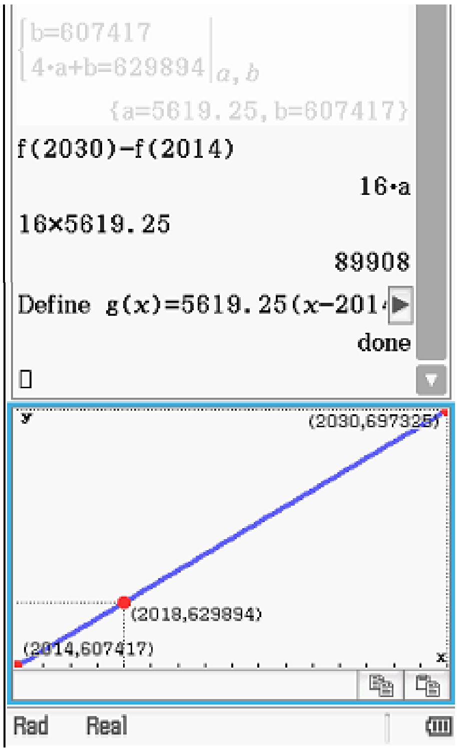
b) Kuinka paljon asukasluku kasvaa ennusteen mukaan aikavälillä 2014–2030? Anna vastaus 1 000 asukkaan tarkkuudella.

c) Piirrä asukasluvun y kuvaaja välillä $2014 \le x \le 2030$.

Tehtävä 14. Sijoitetaan tehtävässä annetut ehdot yhtälöön ja ratkaistaan vakiot a ja b yhtälöparilla (vasemmanpuoleisin kuva). Lasketaan funktion arvojen erotus annetulla aikavälillä b-kohdan vastauksen saamiseksi (keskimmäinen kuva).

Määritellään funktio g(x), johon on sijoitettu ratkaistut vakiot a ja b. Piirretään raahaamalla kosketuskynällä g(x) koordinaatiston päälle ja valitaan x-akselista väli [2014, 2030]. Jäljitä-toiminnolla voi etsiä käyrältä pisteitä ja EXEn painallus piirtää punaisen pisteen koordinaatteineen käyrälle. Oikeanpuolimmaiseen kuvaan on merkitty päätepisteet ja tehtävässä annettu vuoden 2018 väkiluvun arvio.





ClassPad Manager skaalautuu tarpeen mukaan.

Vastaus: a) a = 5619.25, b = 607417 b) n. 90 000 asukasta c) Oikeanpuolen alakuva.

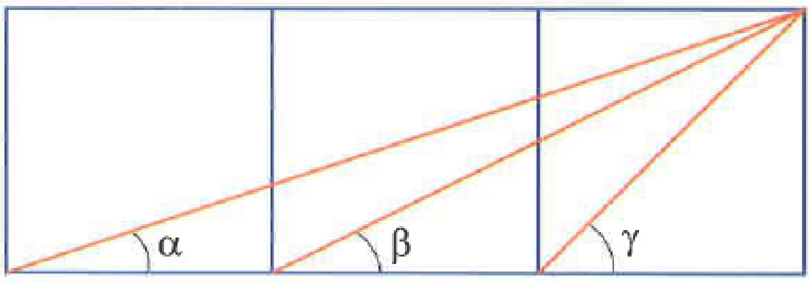
CASIO

15. **a)** Ratkaise yhtälö $\tan\gamma = 1$, kun $0^\circ \leq \gamma \leq 360^\circ$.

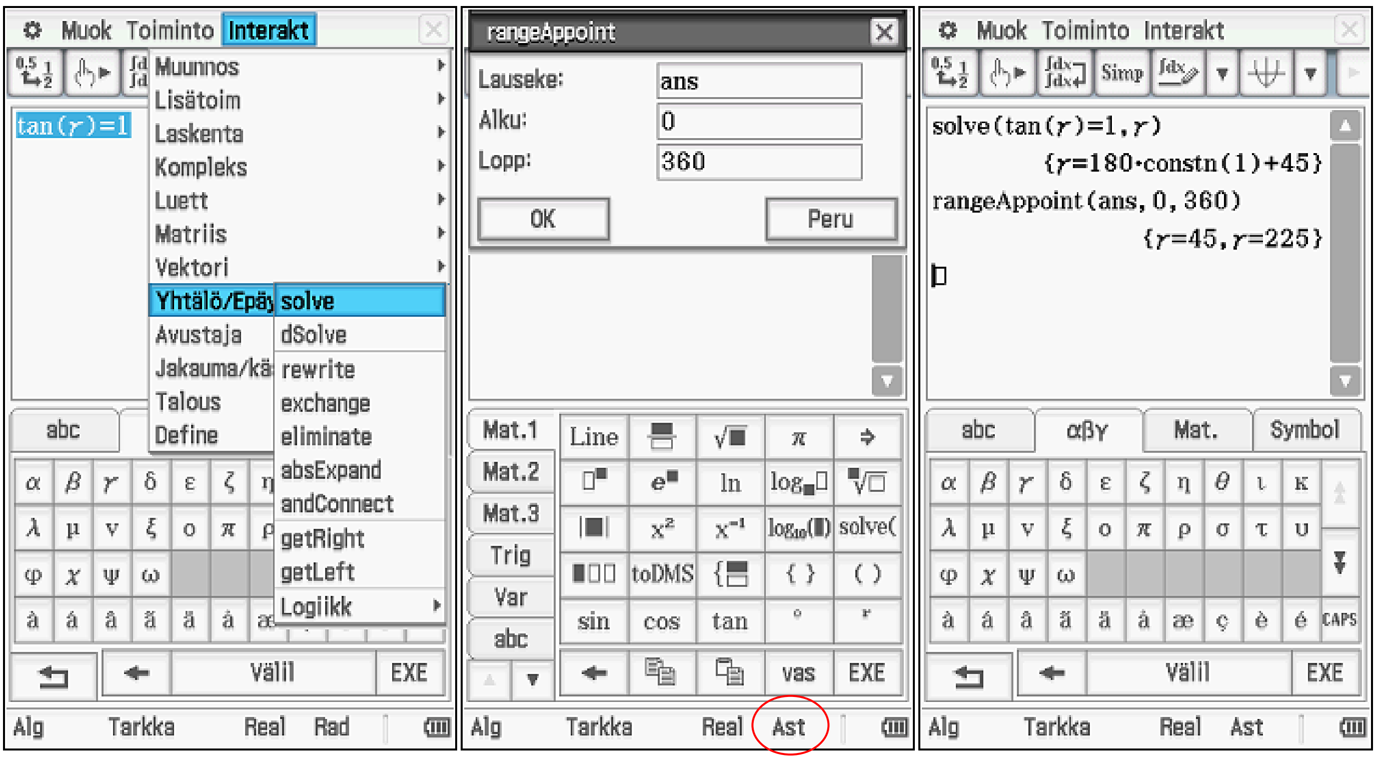
b) Oheisessa kuvassa on vierekkäin kolme neliötä, joiden sivun pituus on 1. Lisäksi kuvioon on merkitty kulmat α, β ja γ. Laske $\tan(\alpha+\beta)$ käyttämällä tangentin yhteenlaskukaavaa

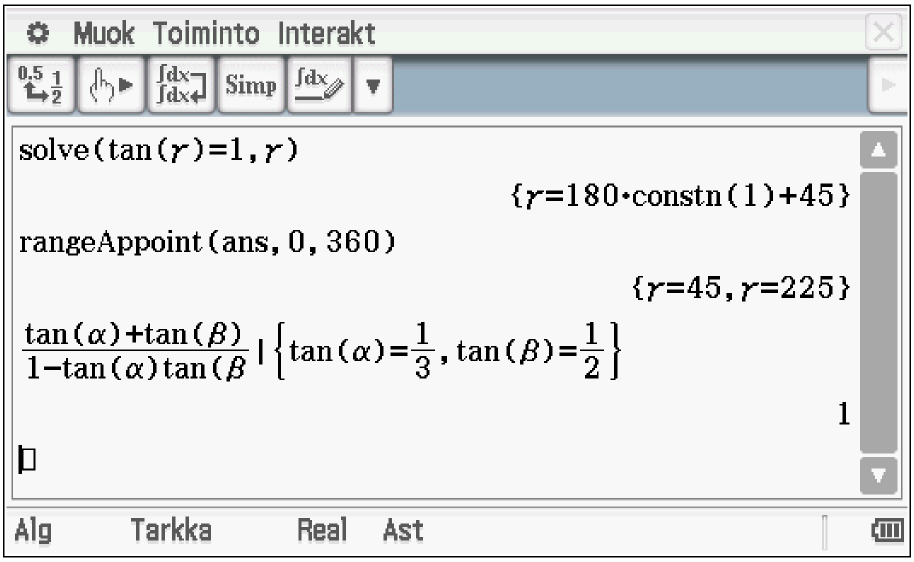
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

ja perustele yhtälö $\alpha + \beta = \gamma$.



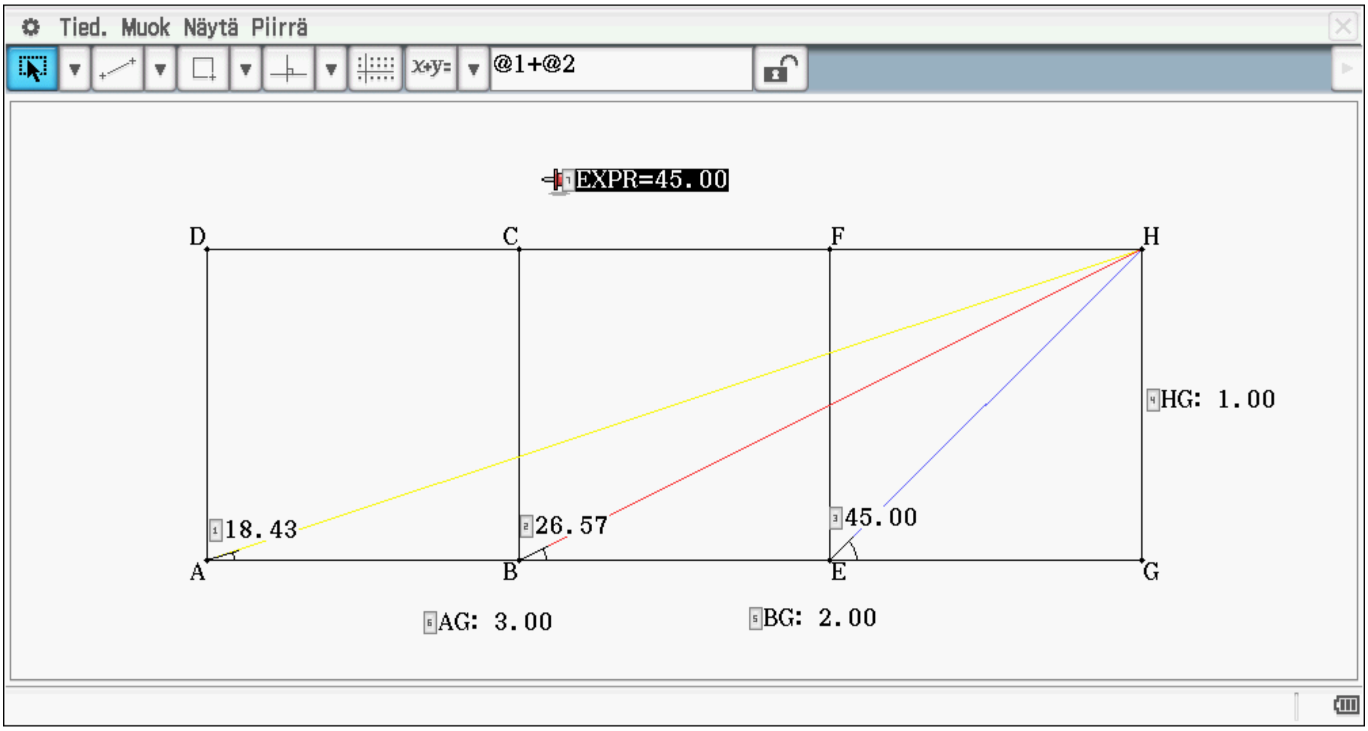
Tehtävä 15.





Koska tan(γ) = 1 = tan($\alpha + \beta$), ovat tangentin argumenttina olevat kulmat samat eli γ = α + β.

Viimeistä tehtävää voi hahmotella myös Geometria-sovelluksessa:



Vastaus: a) 45° ja 225° b) tan(α + β) = 1