# ClassPad 330 Plus ylioppilaskirjoituksissa

# -syksy 2012 pitkä matematiikka-


***Enemmän aikaa matematiikan opiskeluun,***

***vähemmän aikaa laskimen opetteluun.***

***ClassPad.***

Hyvä lukija,

CAS-laskennan hyödyntäminen ylioppilaskirjoituksissa on Suomessa alussa. Pisteytyksen ongelma opiskelijan kannalta on siinä, mitä välivaiheita vastauksessa pitää näkyä. Opettajat tarvitsevat täydennyskoulutusta ja opetussuunnitelmatkin muutoksia. Myös ylioppilaskokeeseen tullee tämän myötä erilaisia tehtäväosioita tai eri tyyppisiä tehtäviä.

Tässä vihkosessa on ratkaistu syksyn 2012 pitkän matematiikan koe Casion ClassPad 330 Plus –laskimella. Tämä on järjestyksessään toinen ylioppilaskoe, jossa symbolinen laskin oli sallittu.

Joissakin vastauksissa on sekä laskimen antama välitön vastaus annettuun tehtävään että välivaiheita sisältävä vastaus. Ratkaisuissa on lyhyesti selitetty myös, miten tehtävät voi ja kannattaa laskimeen syöttää.

Periaate ClassPad 330 Plus:n käytössä on, että lauseke tai yhtälö **kirjoitetaan laskimeen sellaisenaan**. Tämän jälkeen lauseke tai yhtälö **maalataan kynällä** (kuten esim. tekstinkäsittelyohjelmissa) ja Interactive-valikosta **valitaan** sille **tehtävä toimenpide**. Lausekkeita voi kopioida raahaamalla tai **Edit->Copy** valikon kautta laskimen eri ohjelmien välillä.

Tällöin laskijan ei tarvitse tietää laskimen syntaksia ja ikäviltä virheiltä tai laskemista jumittavilta tilanteilta vältytään. Toki paljon laskinta käyttäneelle löytyy **Action** –valikko, jolloin laskinta voi käyttää myös komentojen kautta. Aloittelevalle käyttäjälle tai opiskelijalle on huomattavan paljon miellyttävämpää päästä heti laskemaan tehtäviä ilman laskimen opiskelua ja heille **Interactive** –valikko tarjoaa siihen keinot.

Otan mielelläni vastaan kysymyksiä ja kommentteja. Yhteystietoni ovat vihkon takakannessa. Mukavia hetkiä matematiikan ja tämän ratkaisuvihkon parissa!

*Kempeleessä 2.10.2012* *Pepe*

CASIO

**1.** Ratkaise yhtälöt

**a)** $2(1-3x+3x^2)=3(1+2x+2x^2)$

**b)** $|x|=1+x$

**c)** $1-x=\dfrac{1}{1-x}$

Ratkaisu: ClassPad 330 Plus –laskimessa kannattaa kirjoittaa yhtälöt pelkkinä yhtälöinä ja maalaamisen jälkeen valikosta **Interactive -> Solve** saadaan ratkaisuiksi

$$\mathrm{solve}\left(2\cdot(1-3\cdot x+3\cdot x^2)=3\cdot(1+2\cdot x+2\cdot x^2),x\right)$$

$$\left\{x=-\frac{1}{12}\right\}$$

$$\mathrm{solve}\left(|x|=1+x,x\right)$$

$$\left\{x=-\frac{1}{2}\right\}$$

$$\mathrm{solve}\left(1-x=\frac{1}{1-x},x\right)$$

$$\{x=0,x=2\}$$

Jos tehtävään halutaan lisää välivaiheita, niin sulut voidaan ensin kertoa auki ja sitten yhdistää polynomit a-kohdassa. Tämä onnistuu kirjoittamalla lauseke, maalaamalla se ja käyttämällä valikosta **Interactive -> Transformation** löytyviä komentoja **expand** ja **collect**.

C-kohdassa lausekkeet voidaan siirtää yhtälön samalle puolelle ja laventaa yhdelle murtoviivalle valikosta **Interactive -> Transformation** löytyvällä komennolla **combine**.

Myös osoittajan ja nimittäjän nollakohdat voidaan tutkia erikseen, jotta nähdään pitääkö ratkaisujoukkoon tehdä rajoituksia määrittelyehdon vuoksi.

$\text{expand}(2\cdot(1-3\cdot x+3\cdot x^2))$

$$6\cdot x^2-6\cdot x+2$$

$\text{expand}(3\cdot(1+2\cdot x+2\cdot x^2))$

$$6\cdot x^2+6\cdot x+3$$

$\text{collect}(6\cdot x^2-6\cdot x+2-(6\cdot x^2+6\cdot x+3),x)$

$$-12\cdot x-1$$

$\text{solve}(-12\cdot x-1,x)$

$$\left\{x=-\frac{1}{12}\right\}$$

$\text{combine}\left(1-x-\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)$

$$\frac{-(x^2-2\cdot x)}{x-1}$$

$\text{solve}(x-1,x)$

$$\{x=1\}$$

$\text{solve}(-(x^2-2\cdot x),x)$

$$\{x=0,x=2\}$$

**2.** Sievennä lausekkeet

**a)** $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2$

**b)** $\dfrac{x^2-9}{x+3}$

**c)** $\ln\dfrac{x}{2}+\ln\dfrac{e^x}{x}+\ln 2$

Ratkaisu: Kirjoittamalla lausekkeet sellaisenaan laskimeen, maalaamalla ne ja valikon **Interactive -> Transformation** komennoilla **expand** ja **simplify** saadaan vastaukset ilman välivaiheita

$$\text{expand}\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right)$$

$$4$$

$$\text{simplify}\left(\frac{x^2-9}{x+3}\right)$$

$$x-3$$

$$\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\ln\left(\frac{e^x}{x}\right)+\ln(2)$$

$$x$$

Kirjoittamalla lausekkeet sellaisenaan laskimeen, maalaamalla ne ja valikon **Interactive -> Transformation** komennoilla **expand**- ja **combine** saadaan vastaukset välivaiheineen a-kohtaan

$$\text{expand}\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\right)$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2$$

$$\text{expand}\left(\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right)$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}-2$$

$$\text{combine}\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2-\left(x^2+\frac{1}{x^2}-2\right)\right)$$

$$4$$

B-kohdassa osoittaja voidaan kirjoittaa tulomuotoon valikon **Interactive -> Transformation** komennolla **factor** ja lauseke sievenee komennolla **simplify**:

$$\text{factor}(x^2-9)$$

$$(x+3)\cdot(x-3)$$

$$\text{simplify}\left(\frac{(x+3)\cdot(x-3)}{(x+3)}\right)$$

$$x-3$$

C-kohdassa voi logaritmimerkinnät avata kirjoittamalla ne suoraan laskimeen ja hyväksymällä **exe**-painikkeella. Tämän jälkeen saadut vastaukset voi raahata kynällä uudelle laskuriville. ClassPad 330 Plus sieventää vastauksen automaattisesti **exe**-painikkeella. Näin laskuihin saadaan myös välivaiheet.

$$\ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\ln(x)-\ln(2)$$

$$\ln\left(\frac{e^x}{x}\right)$$

$$-\ln(x)+x$$

$$\ln(x)-\ln(2)-\ln(x)+x+\ln(2)$$

$$x$$

**3.** **a)** Määritä funktion

$$f(x)=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$$

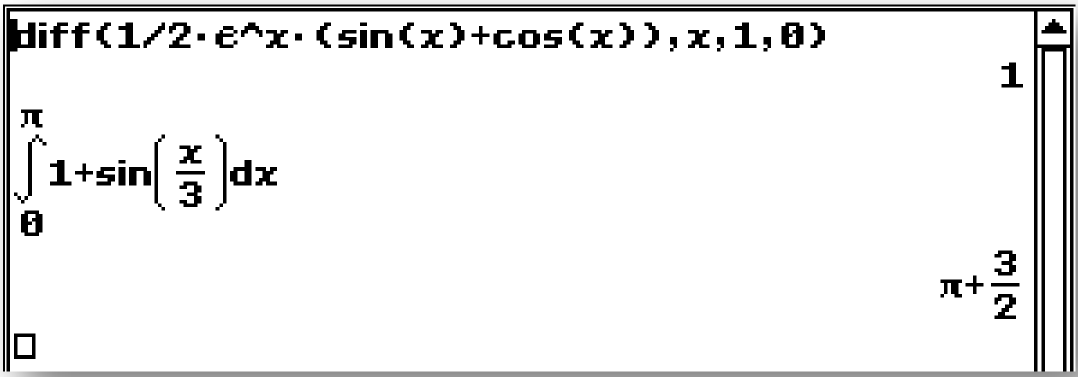
derivaatan arvo kohdassa $x=0$.

**b)** Laske integraalin

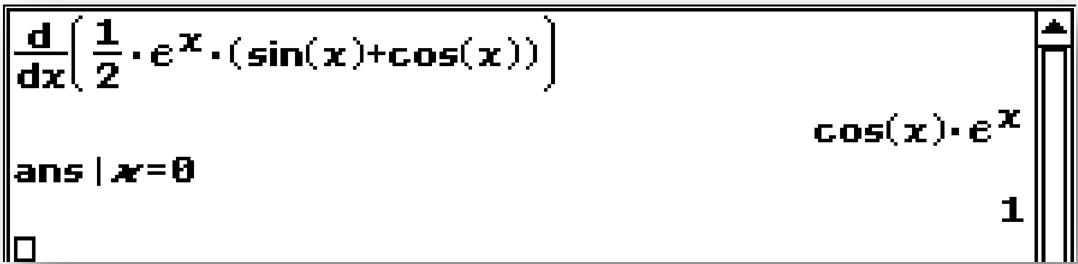
$$\int_0^{\pi}\left(1+\sin\frac{x}{3}\right)dx$$

tarkka arvo.

Ratkaisu: Laskin laskee suoraan derivaatan arvon halutussa pisteessä, samoin määrätäyn integraalinkin arvon. Lausekkeen kirjoittamisen ja maalaamisen jälkeen derivointi onnistuu helpoiten valikon **Interactive -> Calculation** komennoilla **diff** ja **integraalimerkistä**. Derivaatan kohdalla valitaan **Derivative at value** ja annetaan kohdaksi 0, integraalin kohdalla valitaan **Definite** ja annetaan ala- ja ylärajan arvot.



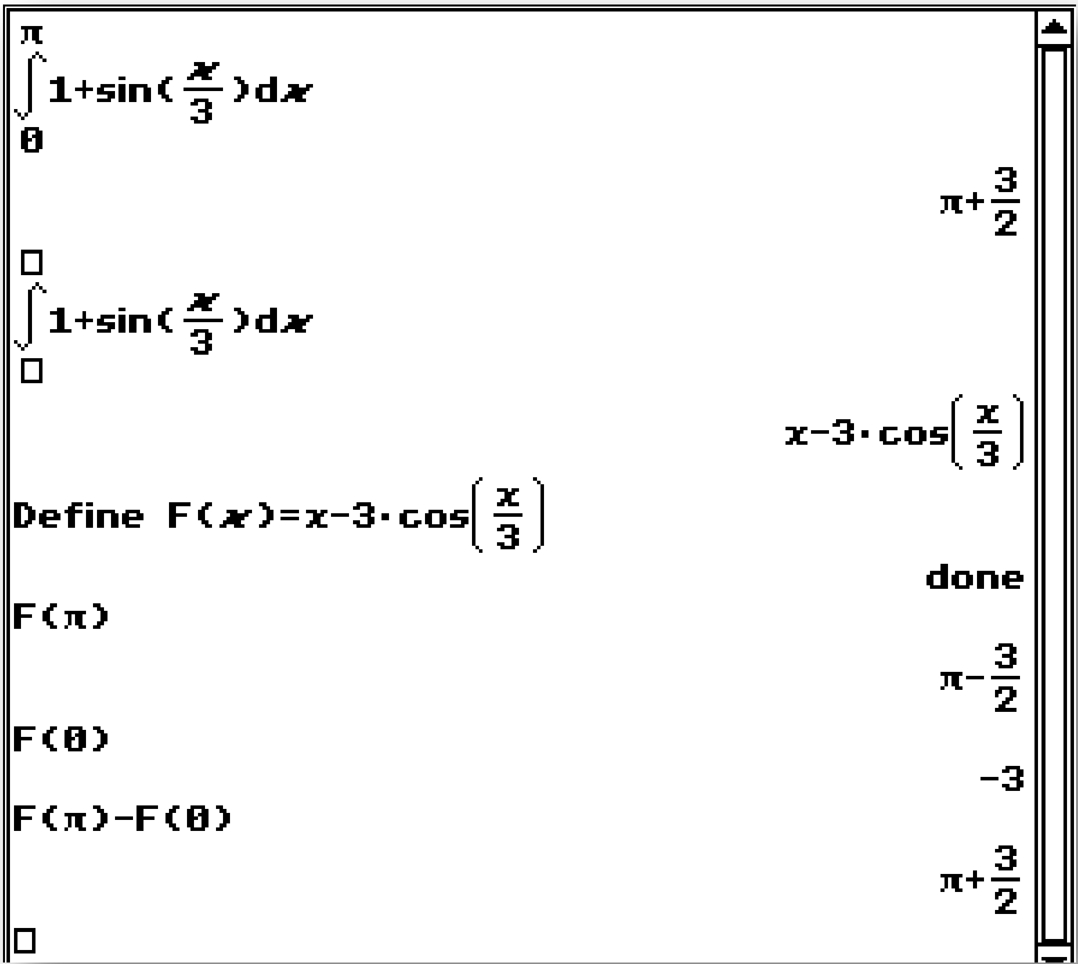

Välivaiheita sisätltävässä vastauksessa on derivaattafunktion lauseke merkitty näkyviin välivaiheena. Lausekkeen kirjoittamisen ja maalaamisen jälkeen derivointi onnistuu helpoiten valikon **Interactive -> Calculation** komennolla **diff**. Edelliseen vastaukseen voi aina viitata komennolla **ans**, kuten tässäkin on tehty. Sijoitusmerkki **|** löytyy **keyboardin** välilehdeltä **2D** tai **mth** kohdasta **OPTN**.




*Ohjelmisto on saatavissa myös tietokoneelle! Voit käyttää projektoria tai älytaulua yhdessä ohjelmiston kanssa luokkahuoneessa havainnollistamaan laskuja opiskelijoille. Lataa kokeiluversio ilmaiseksi osoitteesta http://edu.casio.com*

CASIO

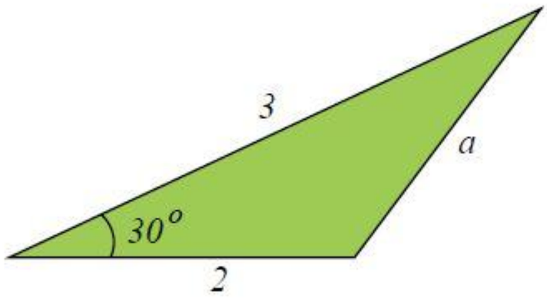
B-kohtaan välivaiheet saadaan laskemalla integraali kuten edellä, mutta ilman rajoja. Tässä on esitelty myös yksi uusi mahdollisuus: funktion sijoittaminen funktiomuistiin. **Define** –komennon voi kirjoittaa Qwerty-näppäimistöltä, hakea katalogista (**keyboard -> cat**) tai valikosta **Action -> Command**. Tämän voi myös tehdä vaiheittain valikosta **Interactive -> Define**. Nyt sijoitukset ylä- ja alarajalla voi tutkia erikseen, kuten myös määrätyn integraalin arvon kahden edellisen vähennyslaskuna.




CASIO

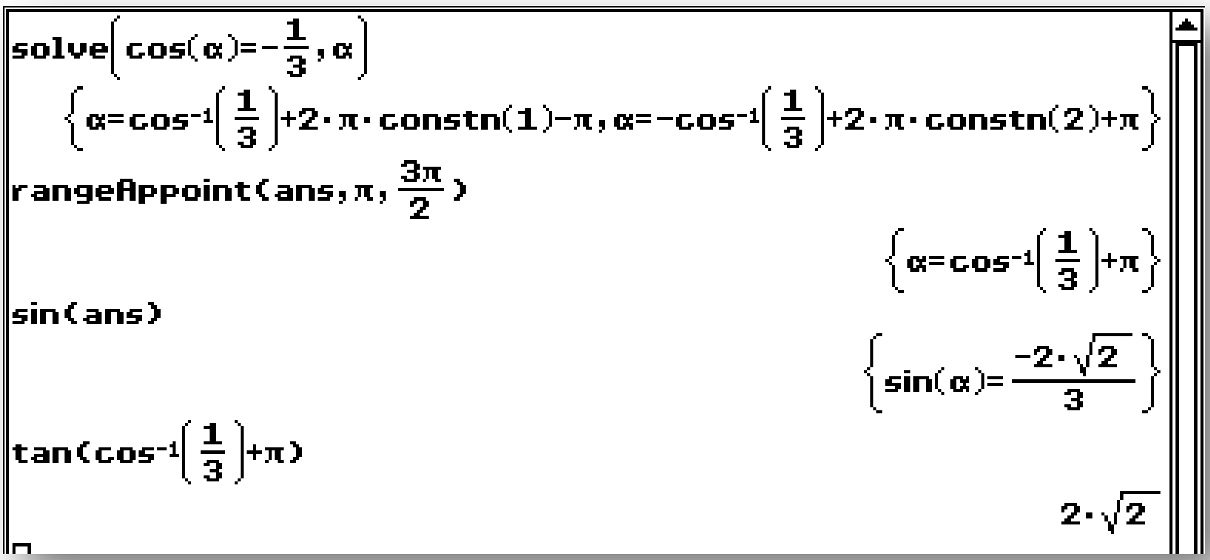
**4.** **a)** Olkoon $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ sellainen kulma, että $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$. Määritä lukujen $\sin\alpha$ ja $\tan\alpha$ tarkat arvot.

**b)** Laske oheisessa kuvassa olevan kolmion sivun pituuden $a$ tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo.




Ratkaisu: A-kohdan ratkaisussa on ensin määritetty yhtälön ratkaisut muuttujan $\alpha$ suhteen. Tässäkin yhtälö on ensin kirjoitettu, maalattu ja ratkaistu valikon **Interactive -> Advanced solve**-komennolla. Tämän jälkeen vastauksista on rajattu annetulle välille kuuluvat nollakohdat komennolla rangeAppoint, joka löytyy valikosta **Interactive -> Calculation.**

Sinin ja tangentin tarkat arvot saadaan sijoittamalla ratkaistu kulma funktioihin. Kulmaa ei kannata kirjoittaa uudelleen, vaan voi käyttää joko **ans** –komentoa tai raahata vastaus hiirellä funktion argumentiksi.



B-kohdassa pitää soveltaa taulukkokirjastakin löytyvää kosinilausetta. Olipa laskimen kulman yksikkönä radiaanit tai asteet, voi laskun suorittaa asteina kirjoittamalla asteen merkki kulman jälkeen. Koska a on kolmion sivuna positiivinen, hylätään vastauksesta negatiivinen juuri.

$$\mathrm{solve}(a^2=2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cdot \cos(30°),a)$$

$$\left\{a=-\sqrt{-6\cdot\sqrt{3}+13},a=\sqrt{-6\cdot\sqrt{3}+13}\right\}$$

$$\left\{a=-\sqrt{-6\cdot\sqrt{3}+13},a=\sqrt{-6\cdot\sqrt{3}+13}\right\}$$

$$\{a=-1.614835953,a=1.614835953\}$$

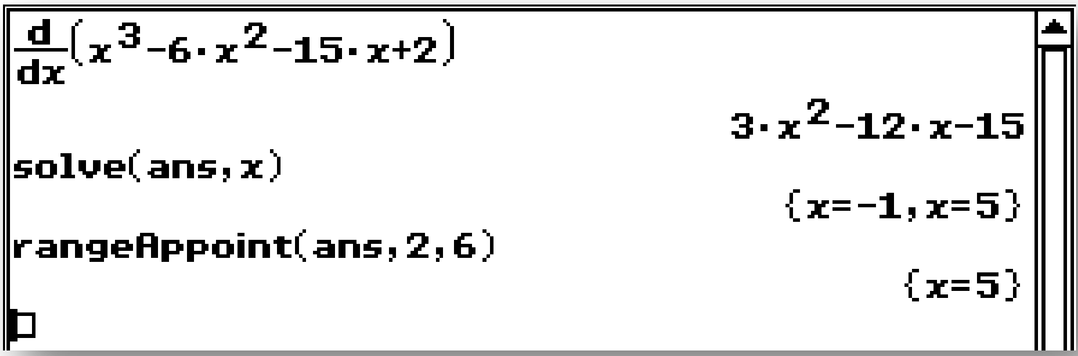
Jos halutaan käyttää laskinta likiarvon pyöristämiseen vaadittuun tarkkuuteen, niin kahden desimaalin tarkkuuden voi asettaa kuvakkeesta avautuvasta valikosta **Basic Format -> Number Format -> Fix 2**.

$$\sqrt{-6\sqrt{3}+13}$$

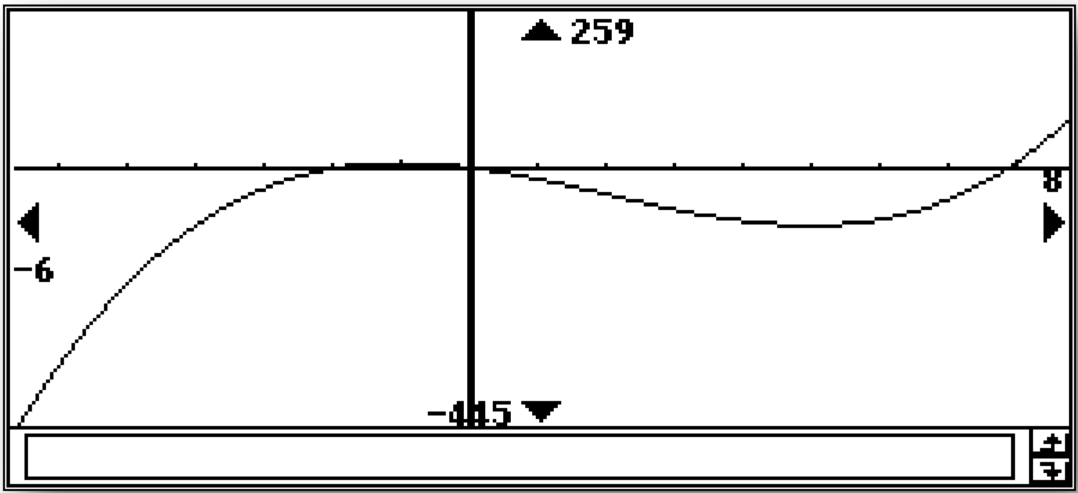
$$1.61$$

**5.** Määritä polynomin $f(x)=x^3-6x^2-15x+2$ suurin ja pienin arvo välillä $[2,6]$.

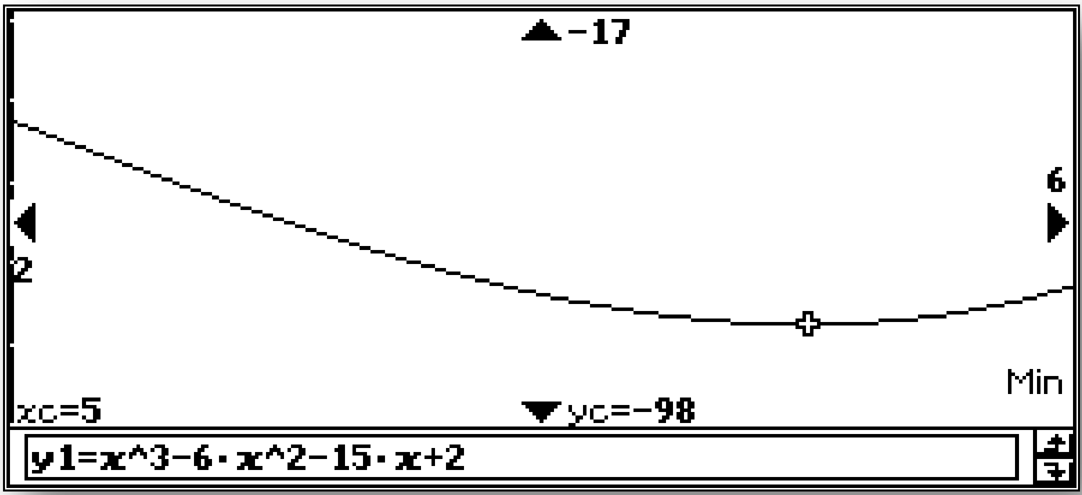
Ratkaisu: Ratkaisussa on kirjoitettu funktion lauseke, maalattu se ja haettu sille derivaattafunktio valikosta **Interactive -> Calculation -> diff**. Tämän jälkeen derivaatan nollakohdat annetulle välille saadaan käyttämällä **ans** –komentoa ja valikoita **Interactive -> Advanced -> solve** ja **Interactive -> Calculation -> rangeAppoint**.




Funktion kuvaaja isommassa mittakaavassa...

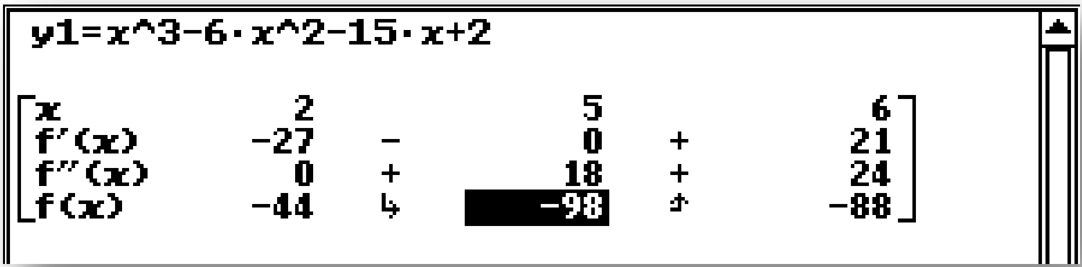



...ja pienemmässä mittakaavassa annetulle välille saadaan koskemalla ensin kuvaketta **Main** –sovelluksessa ja raahaamalla funktion lauseke koordinaatiston päälle. Kuvakkeesta voi asettaa koordinaatiston akseleille halutut arvot.




Koska funktio on jatkuva koko suljetulla välillä, riittää tutkia välin ääriarvot ja funktion arvot välin päätepisteissä. Tämä onnistuu valikosta **Analysis -> G-Solve -> y-Cal**, jolloin voi syöttää arvot 2, 5 ja 6 x-koordinaatille. Vastaavat funktion arvot ovat -44, -98 ja -88, joista saadaan pienimmäksi arvoksi -98 ja suurimmaksi -44.

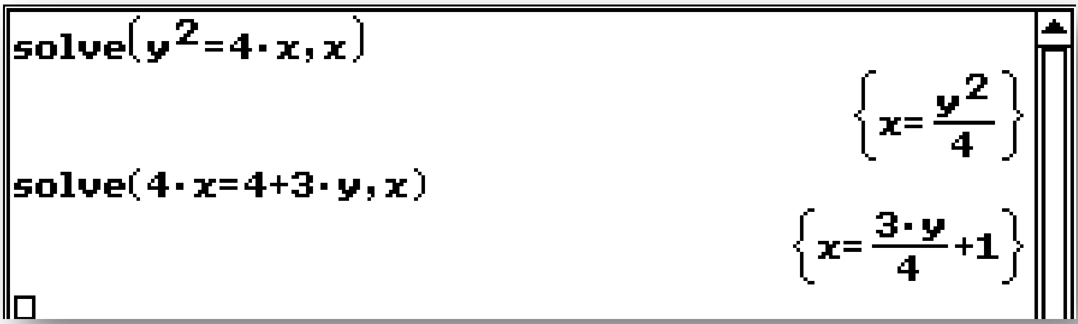
**Huomatus**: Funktion lausekkeen voi kopioida myös grafiikkasovellukseen, jolloin siitä saa kulkukaavion. Tämä onnistuu maalaamalla funktion lauseke ja kopioimalla se **Edit -> Copy**. Tämän jälkeen valitaan kuvake ja liitetään funktio grafiikkasovellukseen **Edit -> Paste**. Nyt kuvakkeesta saa näkyviin kulkukaavion, josta voi tehdä vastaavat johtopäätökset.

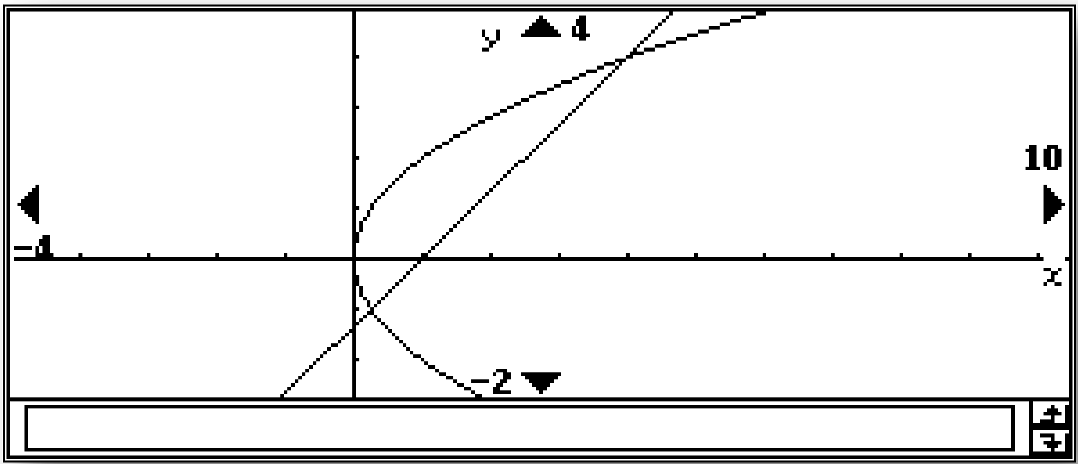



6. Laske paraabelin $y^2 = 4x$ ja suoran $4x - 3y = 4$ väliin jäävän rajoitetun alueen pinta-ala. Anna vastauksena tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo. Piirrä kuvio.

Ratkaisu: Ratkaistaan käyrät muuttujan y suhteen kirjoittamalla ensin yhtälöt. Tämän jälkeen maalataan lausekkeet ja käytetään **solve** –komentoa valikosta

**Interactive -> Advanced**. Avataan tämän jälkeen grafiikkaikkuna kuvakkeesta ja raahataan ratkaisut koordinaatiston päälle kuvaajien piirtämistä varten.




Käyrien leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöpari. Yhtälöpari löytyy **keyboardin 2D** –välilehdeltä. Lausekkeita ei kannata kirjoittaa yhtälöpariin uudestaan, vaan käyttää raahaamalla ne edellä saaduista ratkaisuista.

Tässä on välivaiheena laskettu vielä integraalifunktion lauseke erotusfunktiolle. Integraalin voi laskea joko **2D** –välilehdeltä kohdasta **CALC** tai maalaamalla lauseke ja käyttämällä valikon **Interactive -> Calculation** integraalimerkkiä.

**Huomautus**: Jos käyrien suuruusjärjestystä ei perustella, on syytä käyttää integraalin ympärillä itseisarvomerkkejä.

$$\left\{\begin{array}{l} x=\frac{y^2}{4} \\ x=\frac{3\cdot y}{4}+1\end{array}\right|_{x,y}$$

$$\left\{\{x=4,y=4\},\left\{x=\frac{1}{4},y=-1\right\}\right\}$$

$$\int_{\square}^{\square} \frac{3\cdot y}{4}+1-\frac{y^2}{4}\,dy$$

$$\frac{-y^3}{12}+\frac{3\cdot y^2}{8}+y$$

$$\left|\int_{-1}^{4} \frac{3\cdot y}{4}+1-\frac{y^2}{4}\,dy\right|$$

$$\frac{125}{24}$$

$$\frac{125}{24}$$

$$5.21$$

$\square$

*Tiesitkö, että voit lisätä yhtälöitä yhtälöryhmään koskemalla yhtäläryhmän kuvaketta uudestaan?*

**7.** Erään mallin (R. MacArthur & E. O. Wilson, 1967) mukaan saarella pesivien lintulajien lukumäärä $n$ riippuu saaren pinta-alasta $A$ likimain kaavan $n = kA^b$ mukaisesti, missä $k$ ja $b$ ovat saaresta riippumattomia positiivisia vakioita.

**a)** Havaintojen perusteella kahdella Kanariansaarella on saatu seuraavat arvot:

$n_1 = 20,\ A_1 = 10{,}2\ \text{km}^2$ (Alegranza),

$n_2 = 6,\ \ A_2 = 0{,}0158\ \text{km}^2$ (Roque del Oeste).

Määritä näiden tietojen perusteella vakiot $k$ ja $b$ kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

**b)** Arvioi mallin avulla La Palman saarella ($A$ = 708 km$^2$) pesivien lintulajien lukumäärää.

Alegranza <http://www.lanzarote.org/blog/?p=629>. Luettu 31.3.2011.

Roque del Oeste <http://www.reptilesdecanariastjorge.com>. Luettu 31.3.2011.

La Palma <http://mappery.com/map-of/La-Palma-Physical-Map>. Luettu 29.3.2011.

Ratkaisu: ClassPad 330 Plus ratkaisee symbolisena laskimena yhtälöparin minkä tahansa muuttujien suhteen. Tässä ratkaisussa on kaksi erilaista mallia a-kohtaan. Ensimmäisessä yhtälöpari on ratkaistu suoraan

$$\begin{cases} 20 = k \times 10.2^b \\ 6 = k \times 0.0158^b \end{cases} \Bigg|_{k,b}$$

$$\{b = 1.86\text{E}{-1},\ k = 1.30\text{E}{+1}\}$$

ja toisessa molemmista yhtälöistä on ratkaistu k ja sen jälkeen näin saaduista yhtälöistä b. Laskimen tarkkuudeksi on nyt valittu kolme merkitsevää numeroa kuvakkeen avautuvasta valikosta **Basic Format -> Number Format -> Sci 3**.

$$\text{solve}(20=k\cdot 10.2^{b},k) \qquad \left\{k=\frac{20}{\left(\frac{51}{5}\right)^{b}}\right\}$$

$$\text{solve}(6=k\cdot 0.0158^{b},k) \qquad \left\{k=\frac{6}{\left(\frac{79}{5000}\right)^{b}}\right\}$$

$$\text{solve}\left(\frac{20}{\left(\frac{51}{5}\right)^{b}}=\frac{6}{\left(\frac{79}{5000}\right)^{b}},b\right) \qquad \{b=1.86\text{E-}1\}$$

$$\frac{6}{\left(\frac{79}{5000}\right)^{b}}\,|\,\text{ans} \qquad 1.30\text{E+}1$$

B-kohdan vastaus saadaan sijoittamalla saadut arvot funktioon, jossa A = 708:

$$12.98219259\times 708^{0.1860816143} \qquad 44.02373007$$

**Huomatus**: Jos laskija ei tunne oloaan kotoisaksi kolmen numeron tarkkuuksilla laskettaessa (esim. merkintä 1.86E-1 eli $1{,}86*10^{-1}$), niin laskimen voi antaa olla normaalitilassa ja vastaukset voi pyöristää itse haluttuun kolmen numeron tarkkuuteen.

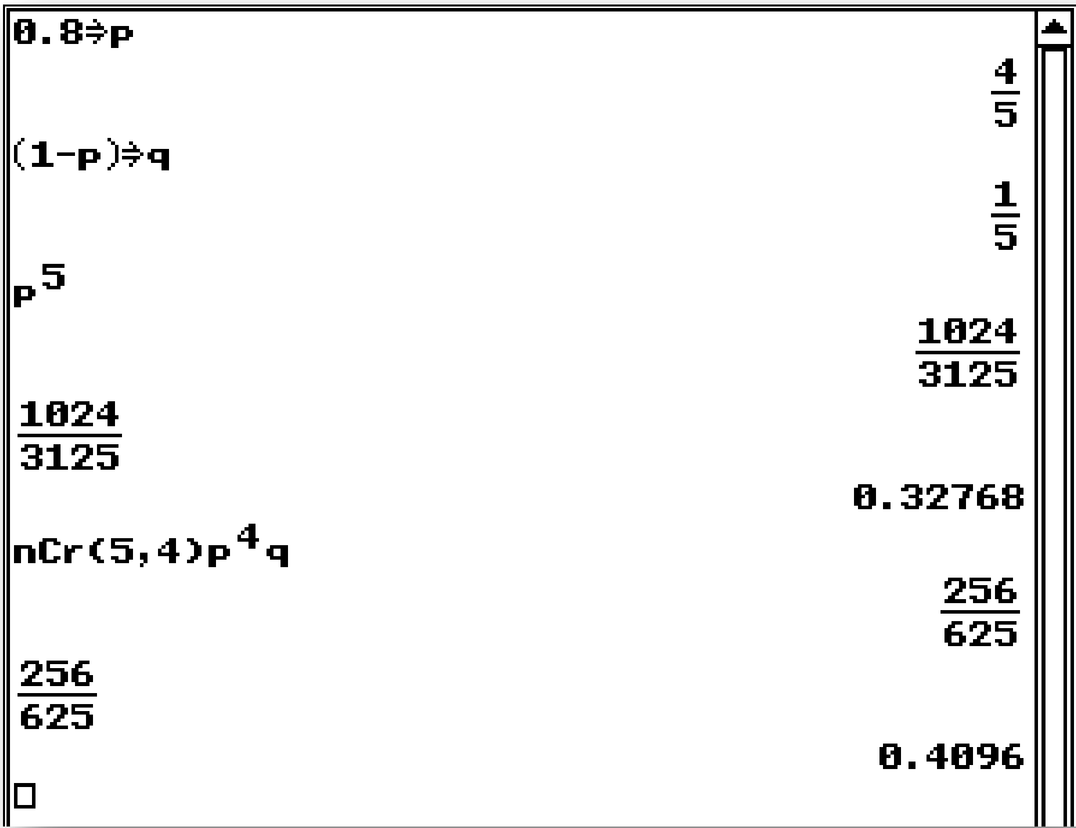
**8.** Kiireisellä professorilla on yksi luento jokaisena viitenä arkipäivänä, mutta hän ehtii pitää päivittäisen luentonsa vain 80 prosentin todennäköisyydellä.

**a)** Millä todennäköisyydellä hän ehtii pitää viikon kaikki luennot?

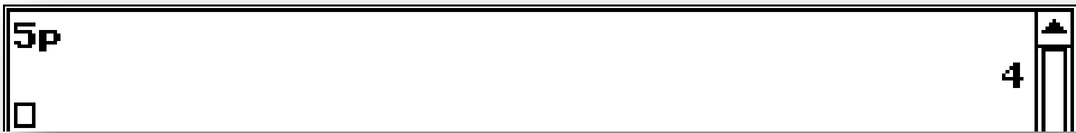
**b)** Millä todennäköisyydellä vain yksi viidestä luennosta jää pitämättä?

**c)** Määritä viikossa pidettyjen luentojen lukumäärän odotusarvo.

Ratkaisu: Koska kyseessä on riippumaton toistokoe, niin satunnaismuuttuja noudattaa binomijakaumaa, jossa on 5 toistoa. Sijoitetaan annetut todennäköisyydet p:n ja q:n paikalle ja lasketaan a- ja b-kohtien todennäköisyyksien tarkat arvot ja likiarvot näitä käyttäen. Kombinaatio löytyy **keyboardin** välilehdeltä **mth -> CALC**.




Koska kyseessä on binomijakauma, saadaan odotusarvo laskimella



**9.** Olkoot

$$\bar{a} = (\cos\varphi - 2\sin\varphi)\bar{i} + \bar{j} + (\sin\varphi + 2\cos\varphi)\bar{k},$$
$$\bar{b} = (\cos\varphi + \sin\varphi)\bar{i} + \bar{j} + (\sin\varphi - \cos\varphi)\bar{k}.$$

**a)** Osoita, että vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan kaikilla $\varphi \in \mathbf{R}$.

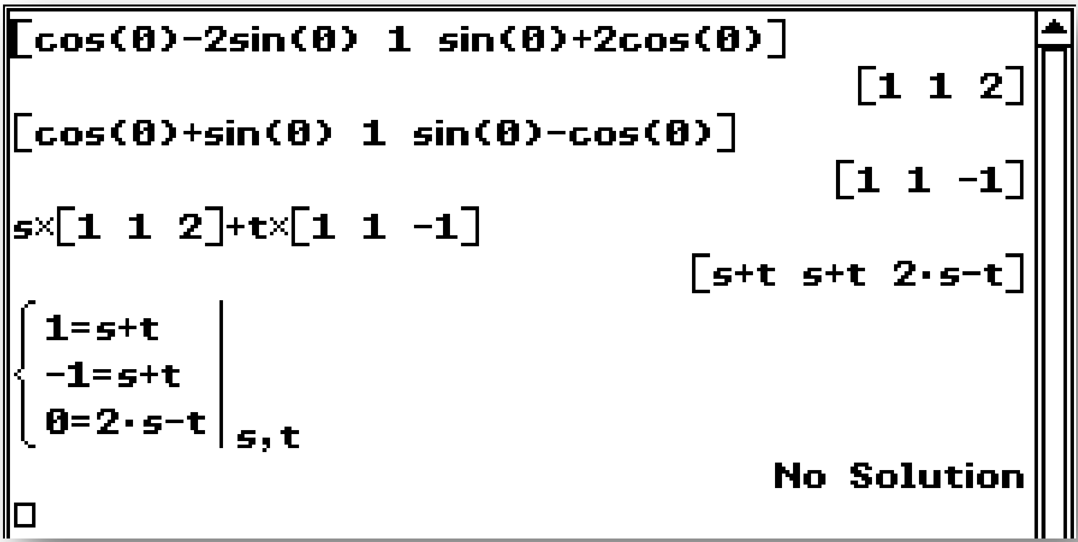
**b)** Olkoon $\varphi = 0$. Onko olemassa sellaisia kertoimia $s, t \in \mathbf{R}$, että $\bar{i} - \bar{j} = s\bar{a} + t\bar{b}$?

Ratkaisu: ClassPad 330 Plus käsittelee vektoreita matriisimuodossa. Esimerkiksi vektoria $\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} - 3\bar{k}$ vastaa kerroinmatriisi [1 2 -3]. Matriisit voi syöttää keyboardin 2D –välilehdeltä kuvakkeesta . Koskemalla kuvaketta kahdesti saa matriisiin lisää alkioita. A-kohdassa vektorit on sijoitettu **a**:n ja **b**:n paikalle, jolloin niitä on helpompi käsitellä pistetulossa.

Vektorien pistetulon voi laskea valikosta **Interactive -> Vector -> dotP**, jolloin kysyttyjen vektorien paikalle riittää kirjoittaa äsken nimetyt **a** ja **b**. Pistetulon lausekkeesta voi poistaa kertolaskut valikon **Interactive -> Transformation** komennolla **expand** ja saman valikon komento **simplify** sieventää vastaukseksi 0. Vektorit ovat siis kohtisuorassa toisiaan vasten.

```
[cos(φ)-2sin(φ) 1 sin(φ)+2cos(φ)]⇒a
                              [cos(φ)-2·sin(φ) 1 2·cos(φ)+sin(φ)]
[cos(φ)+sin(φ) 1 sin(φ)-cos(φ)]⇒b
                                 [cos(φ)+sin(φ) 1 -cos(φ)+sin(φ)]
dotP(a,b)
  -(cos(φ)-sin(φ))·(2·cos(φ)+sin(φ))+(cos(φ)+sin(φ))·(cos(φ)-2·sin(φ))+1
expand(ans)
                                          -(cos(φ))^2-(sin(φ))^2+1
simplify(ans)
                                                                 0
```

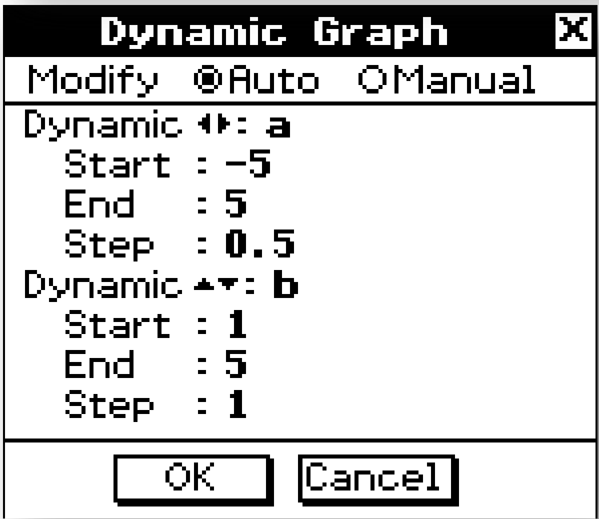
B-kohdassa kannattaa raahata jo syötetty vektori uudelle laskuriville ja syöttää annettu muuttujan arvo $\varphi = 0$. Muodostetaan kysytty vektori ja ratkaistaan kertoimista saatu yhtälöryhmä. Saat kolmannen yhtälön paikan koskemalla kuvaketta  kahdesti.




Kyseisiä kertoimia ei siis ole olemassa.

**10.** Tutki, kuinka monta ratkaisua yhtälöllä $e^{x+a}=x$ on vakion $a \in \mathbf{R}$ eri arvoilla.

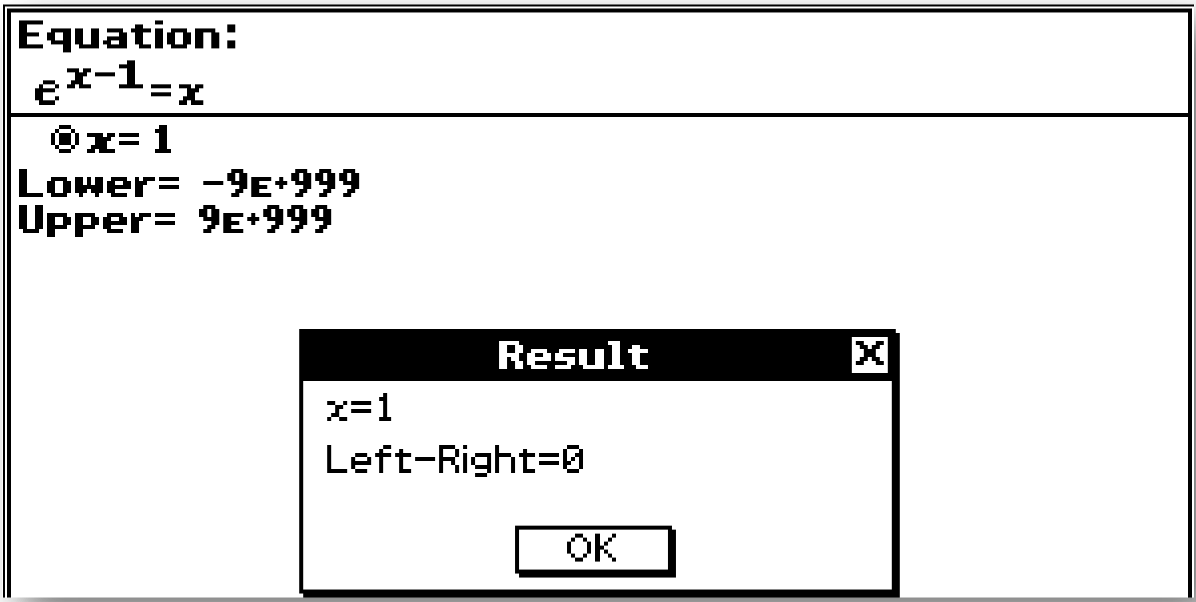
Ratkaisu: Dynaaminen graafi antaa hyvän käsityksen tilanteesta eri parametrin arvoilla. Funktioiden lausekkeiden syöttämisen jälkeen dynaamisen graafin saa tehtyä grafiikkasovelluksessa kuvakkeesta löytyvästä valikosta **Dynamic Graph.** Avautuvaan ikkunaan voi kirjoittaa dynaamisen parametrin nimen ja antaa sille arvoalueen:


Nyt piirtyvät käyrät näyttävät animoituna tilanteen eri a:n arvoilla. Tässä esimerkissä voi seurata eksponenttifunktion sijaintia suhteessa suoraan a:n arvoilla -5:n ja 5:n välillä askeleen ollessa 0,5. Tästä on hyvä tehdä johtopäätöksiä, jotka laskulla voi osoittaa oikeiksi.

Näyttää siltä, että kun a≈-1, kuvaajat sivuavat toisiaan. Kun $a > -1$, kuvaajat eivät leikkaa. Kun $a < -1$, kuvaajat leikkaavat kahdessa kohdassa. Tutkitaan käyrien leikkauspiste tarkemmin numeerisesti.

Numeerisen ratkaisimen löydät **Menu** –valikon kuvakkeesta **NumSolve**. Newtonin menetelmällä (ClassPad laskee numeerisesti Newtonin menetelmällä) nähdään, että käyrillä on tasan yksi leikkauskohta, kun $a = -1$. Koska eksponenttifunktion kuperuussuunta ei muutu (toisella derivaatalla ei edes ole nollakohtia, sillä $e^x > 0$), niin leikkauskohtia voi olla vain 0, 1 tai 2 kpl. Siis kääntyessään suorasta pois päin, eksponenttifunktion kuvaaja ei voi uudelleen kääntyä suoraa kohti.



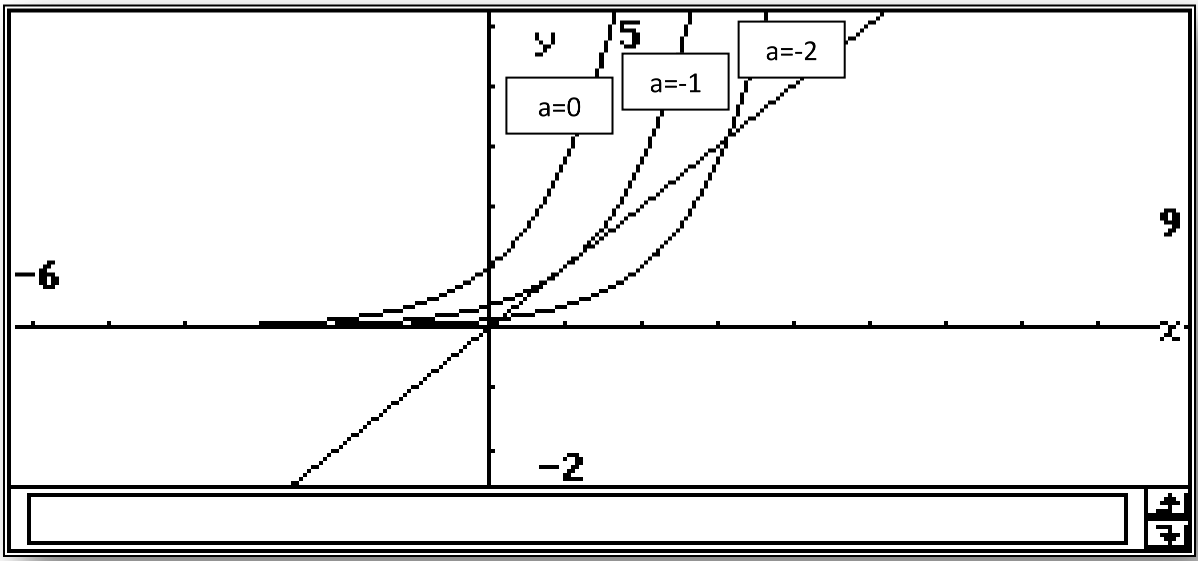

Koska kantaluku $e > 0$, niin eksponentin pienentyessä eli a:n arvon pienentyessä käyrä näyttää siirtyvän oikealle. Tämä on seurausta siitä, että $e^{x+a} = e^x \cdot e^a$ ja a:n pienentyessä myös vakiokerroin $e^a$ pienenee. Eksponenttifunktion kuvaaja siis leikkaa suoraa $y = x$ kaksi kertaa silloin, kun a on sivuamispisteeseen vaadittavaa arvoa $a = -1$ pienempi.

Vastaavasti leikkauspisteitä ei löydy, jos a on tuota arvoa suurempi.

Annetulla yhtälöllä

- ei ole reaalisia ratkaisuja, kun $a > -1$.
- on tasan yksi reaalinen ratkaisu, kun $a = -1$.
- on kaksi reaalista ratkaisua, kun $a < -1$.

Oheisessa kuvassa on tilanne kun a saa arvot 0, -1 ja -2 (vasemmalta oikealle).




Huomautus: Tehtävä 11 sivuutetaan.

**12.** Erään vuorokauden lämpötilaa $f(t)$ tutkittiin ajan $t$ funktiona mittaamalla lämpötila Celsius-asteina kolmen tunnin välein keskiyöstä alkaen. Tuloksena saatiin seuraava taulukko:

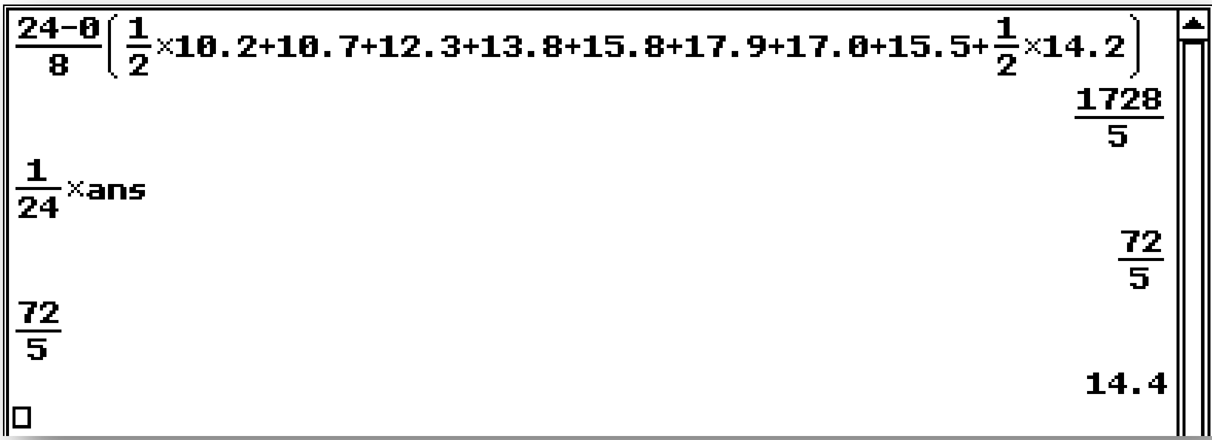
| $t$ | 0.00 | 3.00 | 6.00 | 9.00 | 12.00 | 15.00 | 18.00 | 21.00 | 24.00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ | 10,2 | 10,7 | 12,3 | 13,8 | 15,8 | 17,9 | 17,0 | 15,5 | 14,2 |

Arvioi vuorokauden keskilämpötilaa

$$\frac{1}{24}\int_0^{24} f(t)\,dt$$

laskemalla siinä esiintyvä integraali puolisuunnikassäännön avulla.

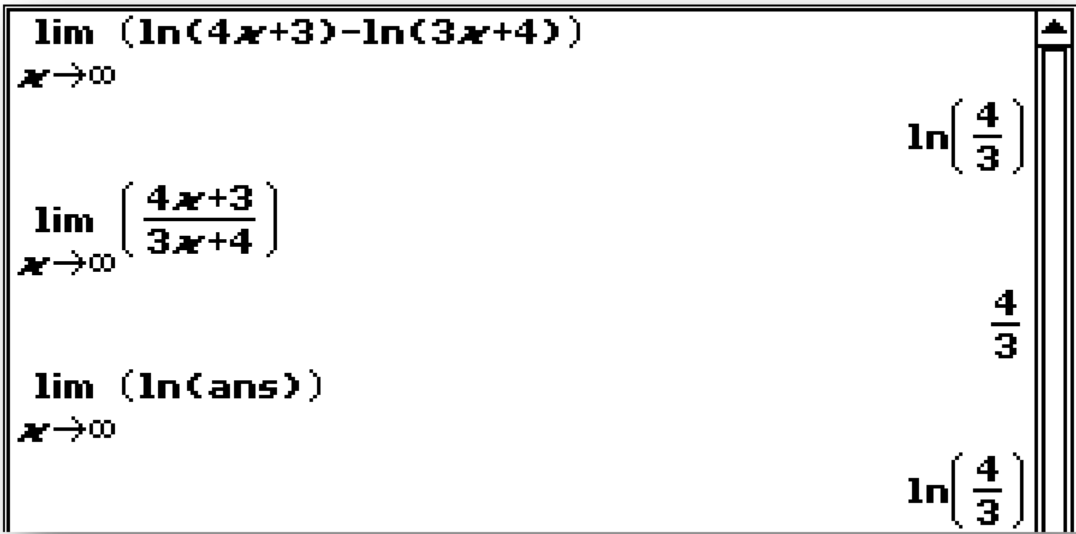
Ratkaisu: Soveltamalla suoraan taulukkokirjastakin löytyvää puolisuunnikassääntöä saadaan




**13.** Määritä raja-arvo $\lim_{x\to\infty}\left(\ln(4x+3)-\ln(3x+4)\right)$.

Ratkaisu: Tässä ratkaisussa on aluksi laskimen antaman sievennetyn vastauksen tarkka arvo. Käyttämällä logaritmin laskusääntöä ja logaritmifunktion jatkuvuusominaisuutta, voidaan ensin laskea raja-arvo sisäfunktiolle. Koska tämä raja-arvo kuuluu logaritmifunktion määrittelyalueeseen, on koko lausekkeen raja-arvo logaritmi sisäfunktion raja-arvosta.

ClassPad 330 Plus –laskimessa raja-arvoissa voi käyttää ääretöntä. ∞ -symboli löytyy keyboardin **mth**- ja **2D** –välilehdiltä. Lauseke kannattaa syöttää ensin laskimeen sellaisenaan, maalata se ja valita raja-arvo valikosta **Interactive -> Calculation -> lim**.



***14.** Sijoittaja käytti osakkeen kurssikehityksen arvioimiseen todennäköisyysjakaumaa, jonka tiheysfunktion maksimi saavutetaan markkina-arvolla 20,50 € ja joka on nolla yli viiden euron poikkeamilla markkina-arvosta 20,50 €. Tiheysfunktio on jatkuva, ja sen kuvaaja koostuu kahdesta lineaarisesta osasta välillä 15,50 – 25,50 €.

**a)** Määritä tiheysfunktion lauseke. (3 p.)

**b)** Millä todennäköisyydellä osakkeen markkina-arvo on alle 19 €? (2 p.)

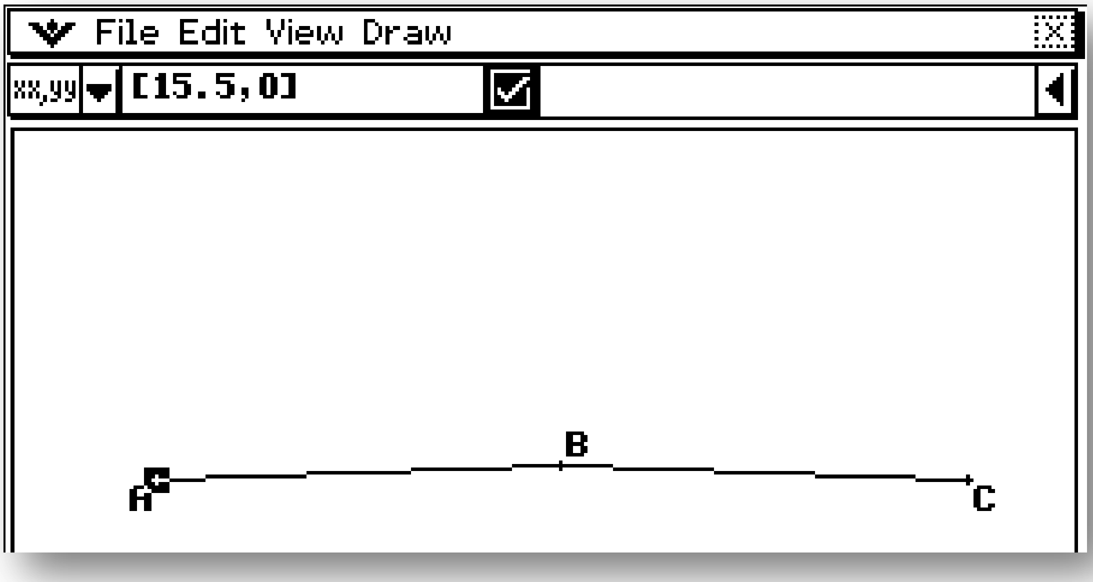
**c)** Muiden kurssien nousu sai sijoittajan muuttamaan jakaumaa epäsymmetriseksi niin, että maksimi saavutettiin edelleen arvolla 20,50 €, mutta nollakohta 25,50 € siirtyi pisteeseen 30,50 €. Muilta ominaisuuksiltaan jakauma pysyi samantyyppisenä kuin aikaisemmin. Määritä tämän uuden jakauman odotusarvo. (4 p.)

Ratkaisu: Maksimipisteen korkeus on kolmion pinta-alan, joka on siis tiheysfunktion ominaisuuksien mukaan oltava 1, kaavasta suoraan laskimella

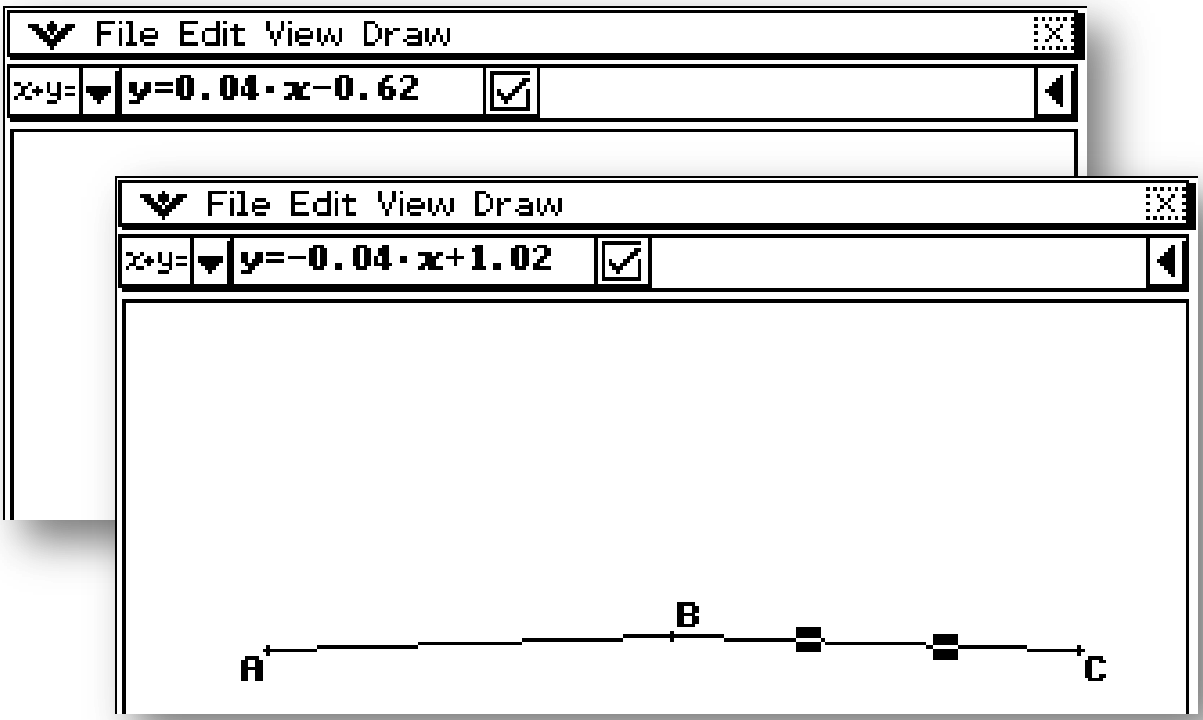
$$\text{solve}\left(\frac{10\cdot h}{2}=1,h\right) \qquad \left\{h=\frac{1}{5}\right\}$$

Käytetään a-kohdassa **Geometria** –sovellusta tehtävän tiheysfunktion määrittämiseen. Sovellus löytyy menu –valikosta kuvakkeesta Geometry. Piirretään janat viiden euron poikkeaman kohdista (15,5;0) ja (25,5;0) maksimipisteeseen $\left(20{,}5;\frac{1}{5}\right)$. Tämä onnistuu valikosta **Draw -> Line segment** tai kuvakkeesta. Vaihtoehtoisesti tarvittavat suorien yhtälöt voi määrittää **Main**-sovelluksessa tarkkoina arvoina.

Kun janat on piirretty, voi kynällä koskettaa janan päätepistettä ja asettaa sille halutut koordinaatit. Huomaa, että edellisen pisteen valinta poistetaan koskettamalla kynällä tyhjää aluetta piirtoikkunassa. Kuvassa on säädetty pisteen A koordinaatit. Koordinaattien asettamisen jälkeen kuvan saa keskitettyä valikosta **View -> Zoom to Fit.**

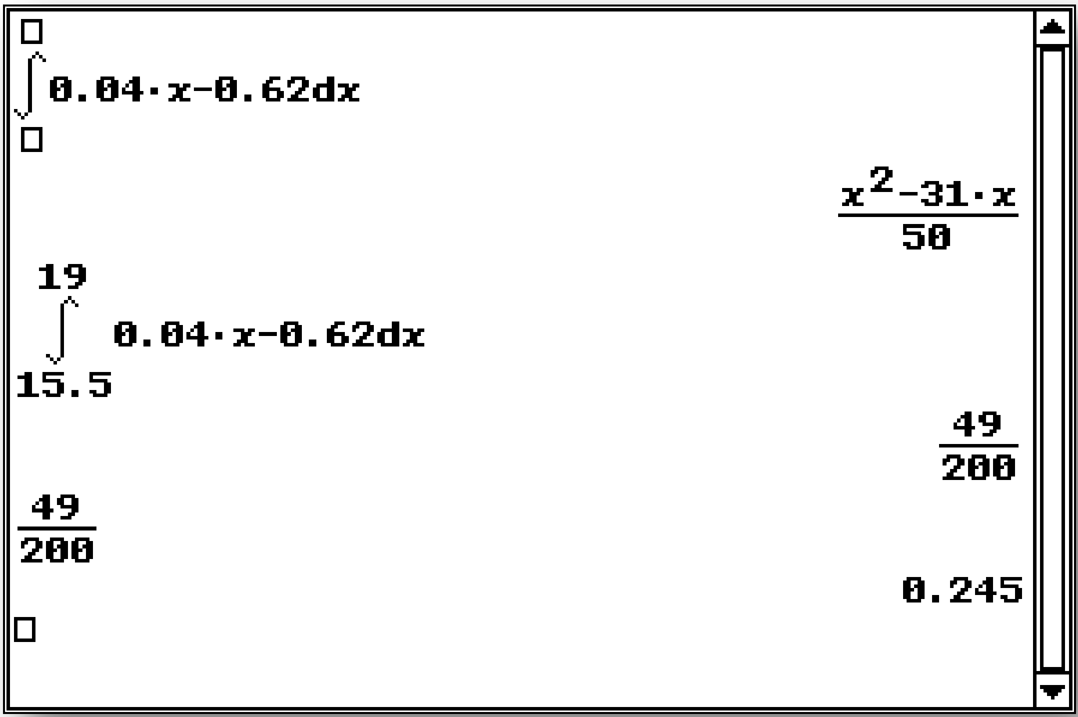



Valitsemalla nyt jana koskemalla sitä kynällä nähdään janan kautta kulkevan suoran yhtälö. Poistetaan valinta koskemalla tyhjää aluetta ja toistetaan toiselle janalle.

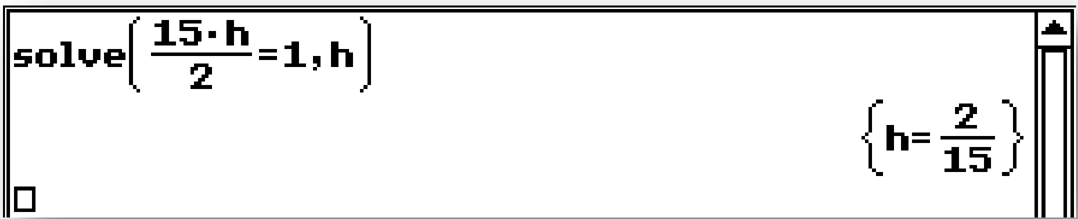



Tiheysfunktion lauseke on siis $f(x) = \begin{cases} 0, kun\ x \leq 15{,}5 \\ 0{,}04x - 0{,}62, kun\ 15{,}5 < x \leq 20{,}5 \\ -0{,}04x + 1{,}02, kun\ 20{,}5 < x \leq 25{,}5 \\ 0, kun\ x > 25{,}5 \end{cases}$

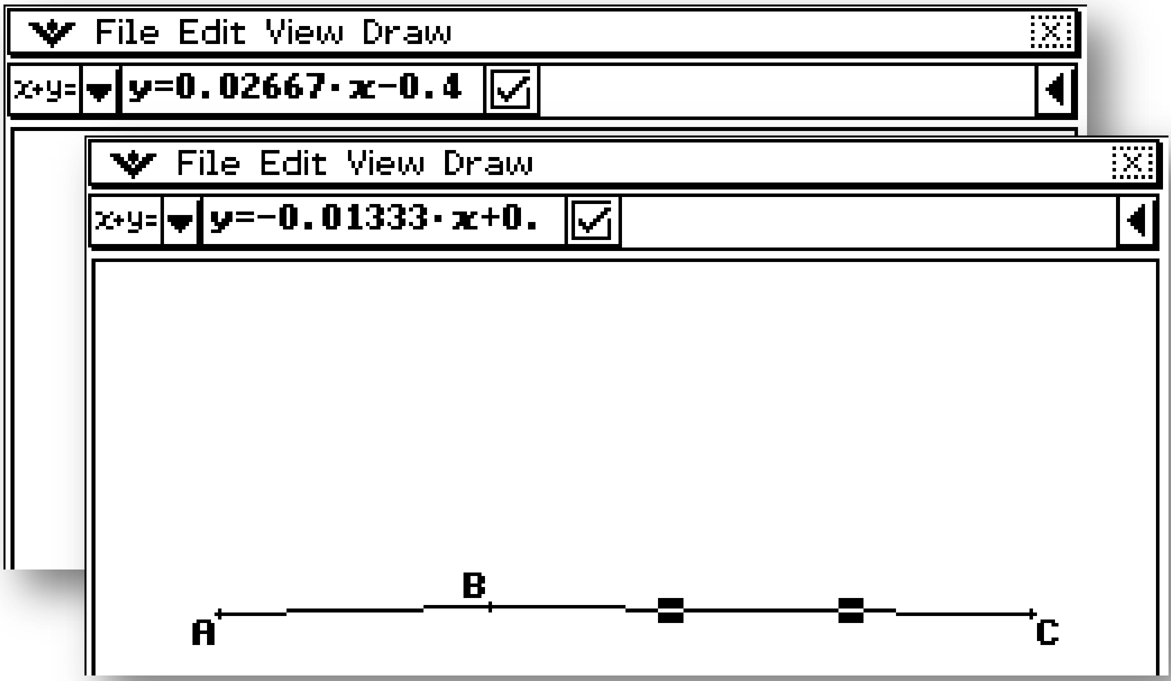
B-kohdassa voidaan suoraan integroida nousevan suoran lauseketta, koska 19 euroa jää maksimipisteen vasemmalle puolelle. Valitaan edellä **Geometria** –sovelluksessa saatu funktion lauseke ja kopioidaan se valikon **Edit -> Copy** avulla **Main** –sovellukseen. Maalataan lauseke ja valitaan valikosta **Interactive -> Calculation** integraalimerkki. Määräämätön integraali antaa integraalifunktio ja määrätty integraali kysytyn todennäköisyyden




C-kohdassa uuden tiheysfunktion rajaaman kolmion korkeudeksi saadaan



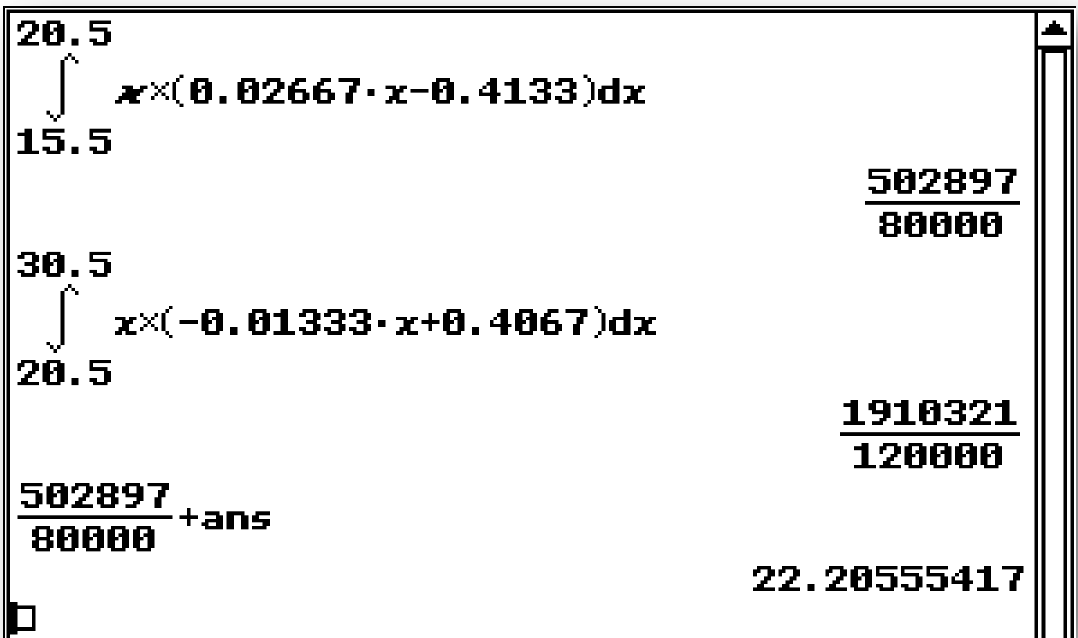

Palataan Geometria –sovellukseen ja siirretään piste C kohtaan $(30{,}5;\,0)$ ja piste B kohtaan $\left(20{,}5;\frac{2}{15}\right)$. Katsotaan janojen kautta kulkevien suorien yhtälöt kuten edellä




Uuden tiheysfunktion lausekkeeksi saadaan

$$f_b(x) \approx \begin{cases} 0, kun\ x \leq 15{,}5 \\ 0.02667x - 0.4133, kun\ 15{,}5 < x \leq 20{,}5 \\ -0.01333x + 0.4067, kun\ 20{,}5 < x \leq 30{,}5 \\ 0, kun\ x > 30{,}5 \end{cases}$$

Odotusarvo on kahdessa osassa laskettuna



***15.** Suora ympyrälieriö on pallon sisällä niin, että sen molempien pohjien reunat sivuavat pallon pintaa. Pallon pinta-alan suhdetta lieriön koko pinta-alaan merkitään symbolilla $t$. Lieriön koko pinta-alalla tarkoitetaan sen vaipan ja pohjien yhteenlaskettuja pinta-aloja.

**a)** Määritä lieriön korkeuden suhde lieriön pohjan säteeseen parametrin $t$ avulla lausuttuna. (2 p.)

Millä parametrin $t$ arvoilla

**b)** tällaista lieriötä ei ole olemassa (2 p.)

**c)** on täsmälleen yksi tällainen lieriö (3 p.)

**d)** on kaksi tällaista lieriötä? (2 p.)

Ratkaisu: Merkitään pallon sädettä r, lieriön pohjan sädettä p ja korkeutta h. Muodostetaan pallon ja lieriön alojen suhde ja sievennetään se valikosta **Interactive -> Transformation** löytyväll komennolla **simplify**. Asetetaan yhtälö, jossa suhdeluku on t ja sievennetään sitä vaiheittain a-kohtaa varten.

**Huomautus**: ClassPad 330 Plus –laskimessa voi asettaa yhtälön tai epäyhtälön ja hyväksyä sen **exe** –painikkeella. Tämän jälkeen sitä voi viedä eteenpäin välivaiheittain kirjoittamalla tehtävän laskutoimituksen ja painamalla **exe**.

$$\mathrm{simplify}\left(\frac{4\pi r^2}{2\pi p^2+2\pi p h}\right)$$

$$\frac{2\cdot r^2}{p\cdot(h+p)}$$

$$\frac{2\cdot r^2}{p\cdot(h+p)}=t$$

$$\frac{2\cdot r^2}{p\cdot(h+p)}=t$$

$$\mathrm{ans}\times p\cdot(h+p)$$

$$2\cdot r^2=p\cdot t\cdot(h+p)$$

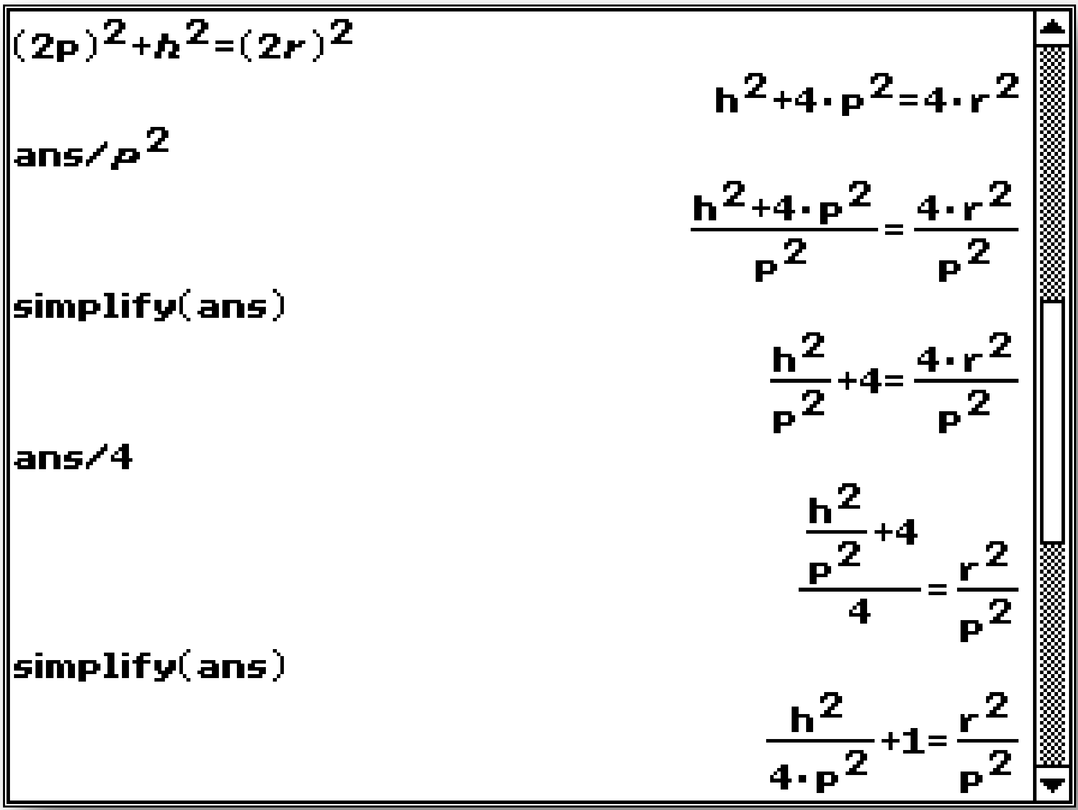
$$\mathrm{ans}/p^2$$

$$\frac{2\cdot r^2}{p^2}=\frac{t\cdot(h+p)}{p}$$

$$\mathrm{simplify(ans)}$$

$$\frac{2\cdot r^2}{p^2}=\frac{h\cdot t}{p}+t$$

Koska kaikki mittaluvut ovat positiivisia, myös t on positiivinen reaaliluku. Ratkaistaan Pythagoraan lauseen avulla yhteys muuttujien välille ja ratkaistaan tästä lausekkeesta jokin edellä tavattu muoto, esim. $\frac{r^2}{p^2}$




Sijoitetaan saatu lauseke aiemmin saatuun parametrin t arvoon. Tässä kannattaa käyttää kynällä raahaamista tai kopioi-liitä –menetelmää, jolloin lausekkeita ei tarvitse kirjoittaa uudelleen ja virheen mahdollisuus vähenee.

$$2\times\left(\frac{h^2}{4\cdot p^2}+1\right)=\frac{h\cdot t}{p}+t$$

$$2\cdot\left(\frac{h^2}{4\cdot p^2}+1\right)=\frac{h\cdot t}{p}+t$$

simplify(ans)

$$\frac{h^2}{2\cdot p^2}+2=\frac{h\cdot t}{p}+t$$

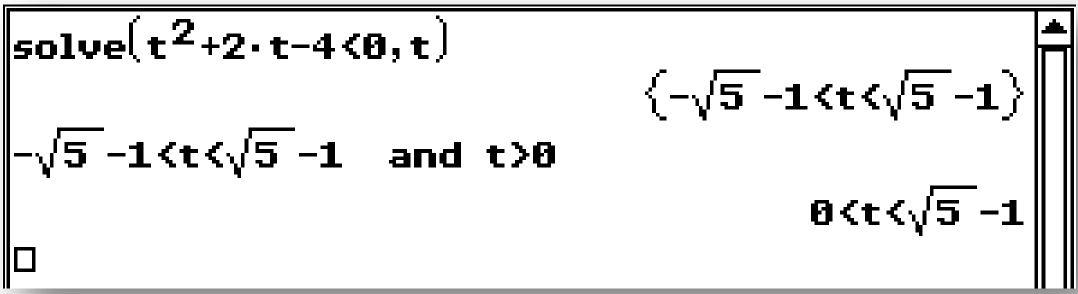
Tämä on toisen asteen yhtälö muuttujan $\frac{h}{p}$ suhteen. Suoritetaan muuttujan vaihto $\frac{h}{p}=x$ laskun helpottamiseksi. Yhtälö saadaan uuteen muotoon ja se voidaan ratkaista valikosta **Interactive -> Advanced** löytyvällä **solve** – komennolla

$$\text{solve}\left(\frac{1}{2}\cdot x^2+2=x\cdot t+t,x\right)$$

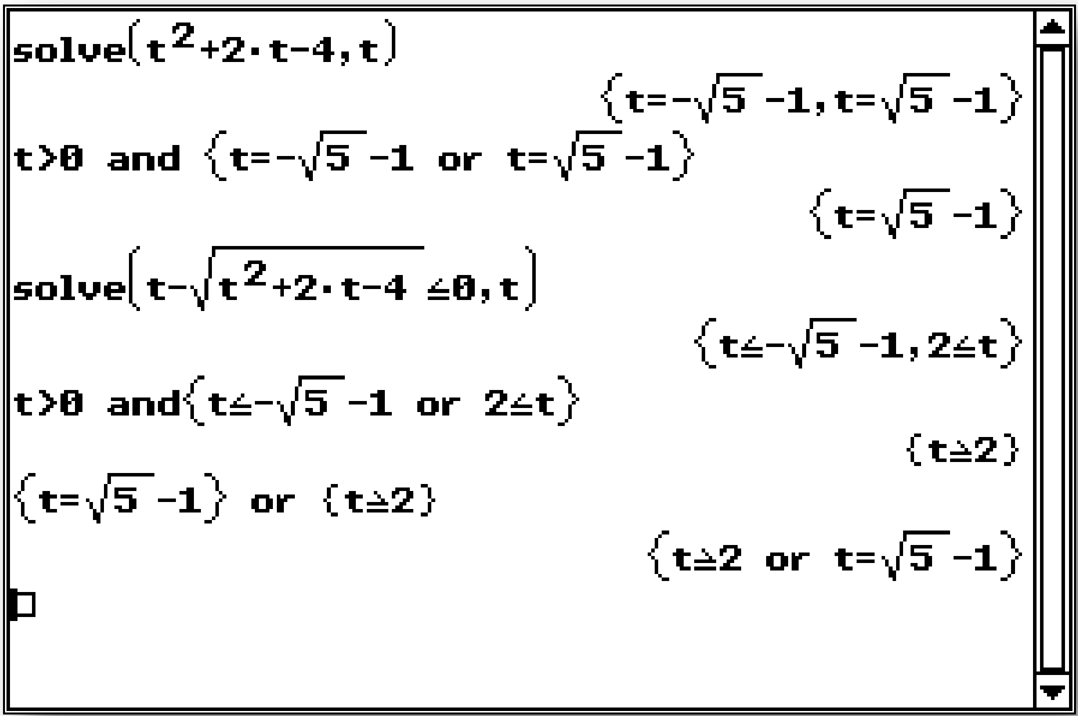
$$\left\{x=t-\sqrt{t^2+2\cdot t-4},x=t+\sqrt{t^2+2\cdot t-4}\right\}$$

Jos positiivista parametria t ei voi lainkaan määrittää eli neliöjuuren reaalisuusehto ei toteudu, myöskään tilanteen kaltaista lieriötä ei voi hahmottaa pallon sisälle. B-kohtaan saadaan siis kaksi ehtoa, jotka voidaan ratkaista laskimella.

Lauseke kannattaa maalata ja kopioida uudelle laskuriville, jonka jälkeen valikosta **Interactive -> Advanced** löytyvällä komennolla **solve** epäyhtälö ratkeaa. Kannattaa huomioida, että muuttujana on nyt t. Valikosta **Action -> Equation/Inequality** löytyy komento **and**, jolla voi selvittää ehtojen yhteisen vaikutusalueen.




C-kohdassa lieriöitä syntyy täsmälleen yksi, kun positiivisen parametrin t arvo on yksikäsitteinen. Nyt saadan kaksi eri vaihtoehtoa: joko neliöjuurilauseke on nolla tai pienempi parametrin t arvoista on korkeintaan nolla. Ratkaistaan nämä laskimella kuten edellä ja yhdistetään ehdot (tai) komennolla **or**




C-kohdassa kaksi lieriötä syntyy, kun pienempikin parametrin t arvoista on positiivinen ja neliöjuuren reaalisuusehto täyttyy. Kuten edellä

$$\mathrm{solve}(t^2+2\cdot t-4>0,t)$$

$$\{t<-\sqrt{5}-1,\ \sqrt{5}-1<t\}$$

$$t>0 \text{ and } \{t<-\sqrt{5}-1 \text{ or } \sqrt{5}-1<t\}$$

$$\{t>\sqrt{5}-1\}$$

$$\mathrm{solve}\left(t-\sqrt{t^2+2\cdot t-4}>0,t\right)$$

$$\{\sqrt{5}-1\le t<2\}$$

$$t>0 \text{ and } \{\sqrt{5}-1\le t<2\}$$

$$\{\sqrt{5}-1\le t<2\}$$

Casio Scandinavia AS, Finland Filial

Keilaranta 4

02150 Espoo

info@casio.fi

tilaus@casio.fi

---

Pepe Palovaara

School Coordinator Finland

Puhelin: +358 (0)44 72 75 776

E-Mail: pepe.palovaara@casio.fi