ClassPad 330 plus ylioppilaskirjoituksissa apuna

Suomessa sallittiin CAS (Computer Algebra System) –laskimien käyttö keväästä 2012 alkaen ylioppilaskirjoituksissa. Norjassa ja Ruotsissa vastaava kehitys on edennyt jo aiemmin. Tässä on muutamia ratkaisumalleja kevään 2012 lyhyen matematiikan ylioppilaskirjoitusten tehtäviin Casion ClassPad 330 plus –laskimella.

Laskinta voi käyttää monipuolisesti havainnollistamaan funktioiden kuvaajia, ratkaisemaan yhtälöitä ja yhtälöryhmiä, selvittämään lausekkeiden tarkkoja arvoja ja likiarvoja, sieventämään lausekkeita ja tutkimaan geometrisia kuvioita. Vaikeatkin lausekkeet voi kirjoittaa juuri tehtävän muodossa laskimeen. Nämä malliratkaisut ja tarkistustavat on tehtävissä useilla eri laskimen sovelluksilla ja useilla eri tavoilla laskijan tottumuksista ja ajattelutavasta riippuen.

Kommentteja ja vaihtoehtoisia ratkaisutapoja otetaan mielellään vastaan tämän tukimateriaalin kehittämisessä ja opettajien pedagogisten menetelmien tukemisen parantamiseksi.

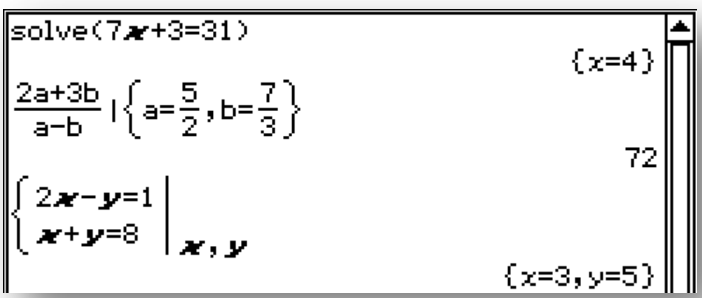
1. **a)** Ratkaise yhtälö $7x+3=31$.

b) Laske lausekkeen $\frac{2a+3b}{a-b}$ arvo, kun $a=\frac{5}{2}$ ja $b=\frac{7}{3}$.

c) Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+y=8. \end{cases}$$

Ratkaisu: Laskimesta vastaukset kaikkiin kohtiin.

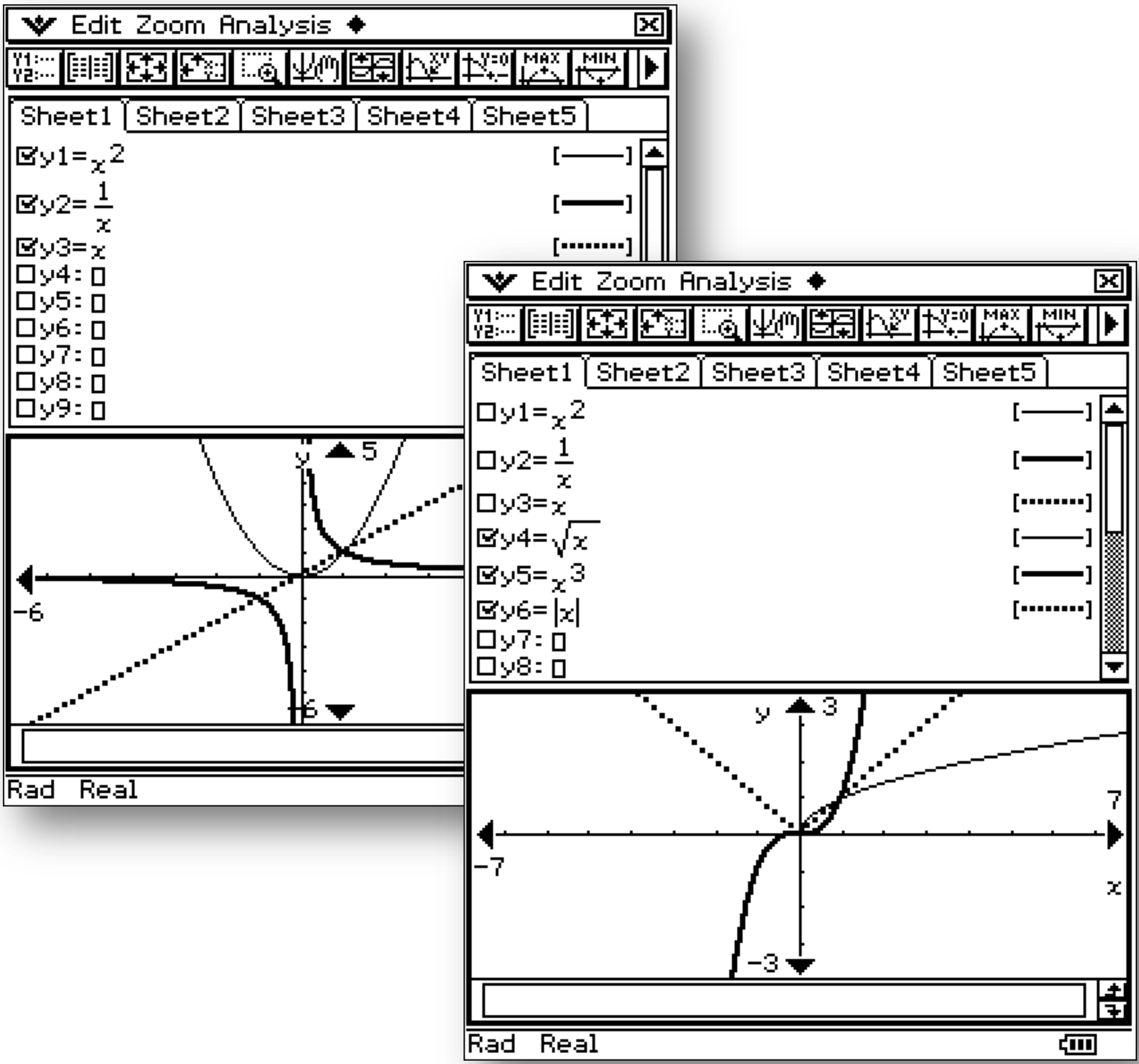


Kysymyksiä? pepe.palovaara@casio.fi

2. Kuvissa 1–6 on oheisessa taulukossa mainittujen funktioiden $y = f(x)$ kuvaajat. Kopioi taulukko vastauspaperiisi ja merkitse siihen, mikä kuvaaja esittää annettua funktiota.

$f(x)$	x^2	$\frac{1}{x}$	x	$\sqrt{x}$	x^3	$\lvert x\rvert$
Kuva						

Ratkaisu: Laskimesta



Kuvaajista päätelty oikea rivi 2, 4, 1, 6, 5, 3.

3. a) Ratkaise yhtälö $\dfrac{7x+\frac{1}{2}}{3} - \dfrac{3x-\frac{1}{3}}{2} = 2.$

b) Ratkaise yhtälö $27^{x-2} = 9^{\frac{x}{2}}.$

Ratkaisu: Laskimesta

$$\text{solve}\left(\frac{7x+\frac{1}{2}}{3}-\frac{3x-\frac{1}{3}}{2}=2\right)$$

$$\{x=2\}$$

$$\text{solve}\left(27^{x-2}=9^{\frac{x}{2}}\right)$$

$$\{x=3\}$$

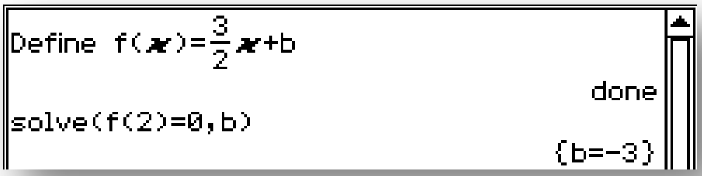
Tiesithän, että ohjelmistoni on saatavissa myös tietokoneelle! Voit käyttää projektoria tai älytaulua yhdessä ohjelmiston kanssa luokkahuoneessa havainnollistamaan laskuja opiskelijoille. Lataa kokeiluversio ilmaiseksi osoitteesta http://edu.casio.com

4. a) Funktion $f(x)=\frac{3}{2}x+b$ nollakohta on 2. Määritä vakion b arvo.

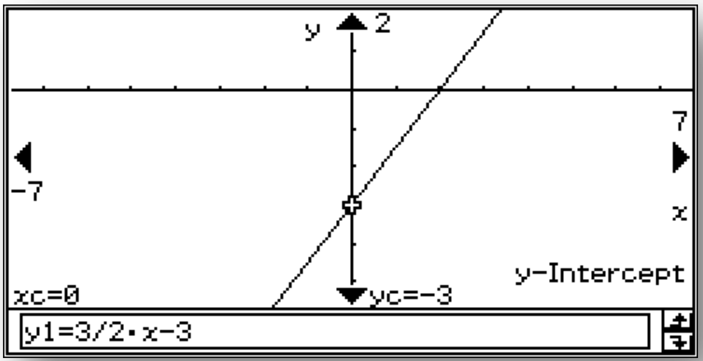
b) Missä pisteessä a-kohdan funktion kuvaaja leikkaa y-akselin?

c) Kuinka suuren terävän kulman a-kohdan funktion kuvaaja muodostaa x-akselin kanssa? Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

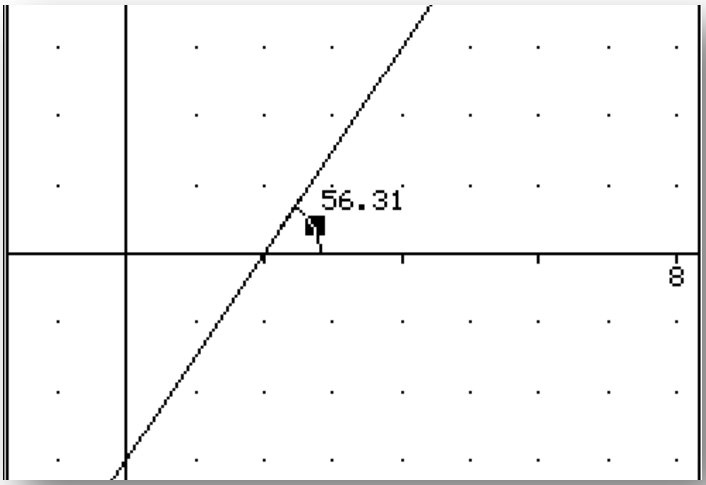
Ratkaisu: Laskimesta a-kohdan vastaukseksi b = -3.



Edelleen, laskimen kuvaajan avulla b- kohdan vastaukseksi (0, -3)



ja esim. geometria-sovelluksen avulla kulman likiarvoksi $56{,}1^0$.



5. Tarkastellaan funktiota $f(x)=(x+3)(x^2-4)$.

a) Laske funktion $f(x)$ nollakohdat.

b) Määritä derivaatta $f'(x)$.

c) Laske derivaatan nollakohdat.

Ratkaisu: Laskimesta

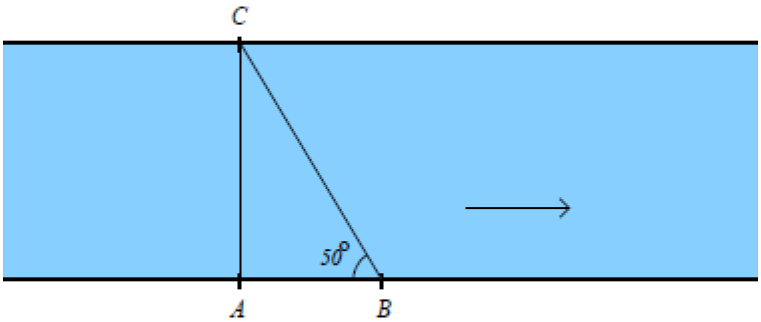
$$\text{Define } f(x)=(x+3)(x^2-4) \qquad \text{done}$$

$$\text{solve}(f(x)=0) \qquad \{x=-3,x=-2,x=2\}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)) \qquad 3\cdot x^2+6\cdot x-4$$

$$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(f(x))=0\right) \qquad \left\{x=\frac{-\sqrt{21}}{3}-1,\ x=\frac{\sqrt{21}}{3}-1\right\}$$

6. Biologi haluaa arvioida joen leveyttä, jotta hän voi asettaa kalojen liikkumista mittaavia laitteita jokeen. Hän katsoo joen rannalla olevasta pisteestä A kohtisuoraan vastarannalla olevaa pistettä C. Pisteestä A hän kävelee 30 metriä alavirtaan pisteeseen B, josta katsottuna vastarannan piste C näkyy 50 asteen kulmassa alla olevan kuvan mukaisesti. Laske joen leveys AC metrin tarkkuudella.



Ratkaisu: Merkitään AC = x, jonka jälkeen laskimella saadaan joen leveydeksi likimäärin 36 metriä (laskimen kulmanyksikkönä laskuissa on aste).

$$\text{solve}\left(\tan(50)=\frac{x}{30}\right) \qquad \{x=35.75260778\}$$

7. Henkilö lähettää sähköpostin kahdelle ystävälleen. Kumpikin näistä lähettää saman viestin 10 minuutin kuluttua edelleen kahdelle uudelle henkilölle, jotka toimivat samoin. Tilanne toistuu kunkin saajan kohdalla aina samalla tavalla, eikä kukaan saa kyseistä sähköpostia toista kertaa. Kuinka kauan kestää, että 20 000 henkilöä on saanut sähköpostin? Anna vastaus 10 minuutin tarkkuudella.

Ratkaisu: Päätellään jonon muodoksi $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots$, jonka jälkeen laskimella n. 10 minuutin jakson jälkeen viestin saaneiden määrä ylittää 20000 kun

$$\text{solve}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\left(2^k\right)>20000,n\right)$$

$$\{n>12.28785664\}$$

Tästä saadan vastaukseksi kymmenen minuutin tarkkuudella 13*10 = 130 minuuttia = 2h 10 min.

8. Naisten hiusten leikkaus maksaa nyt 45 euroa. Kuinka paljon se maksaa kymmenen vuoden kuluttua, jos hintaa korotetaan vuoden välein 2,5 %?

Ratkaisu: Laskimella vastaukseksi 57,60 euroa.

$$1.025^{10}\times 45$$

$$57.60380449$$

Lisätietoa, ohjelmistopäivityksiä ja ohjeita löydät Casion opetussivustolta http://edu.casio.com

9. Farao Djoser (hallitsi 2667–2648 eaa.) suunnitteli porraspyramidia, jossa on päällekkäin 100 suorakulmaista neliöpohjaista särmiötä niin, että kaikilla on sama korkeus ja jokaisen pohjasärmä on 10 % lyhyempi kuin alla olevan pohjasärmä. Alimmaisen särmiön tilavuus on 10 000 m^3. Määritä tällaisen porraspyramidin tilavuus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

Porraspyramidi
<http://fi.wikipedia.org/wiki/Djoser>. Luettu 29.3.2011.

Ratkaisu: Merkitään alimmaisen pohjaneliön sivua x ja korkeutta y. Toiseksi alimmaisen kerroksen pohjaneliön sivu on tällöin 0,9x ja laskimella saadaan tilavuuksien suhteeksi $\frac{81}{100}$.

$$x^2 y \quad\to\quad x^2 \cdot y$$

$$(0.9x)^2 y \quad\to\quad \frac{81 \cdot x^2 \cdot y}{100}$$

$$\frac{81 \cdot x^2 \cdot y}{100} / (x^2 \cdot y) \quad\to\quad \frac{81}{100}$$

Tilavuudet muodostavat geometrisen jonon suhdelukuna $\frac{81}{100}$. Tällöin geometrisen summan kaavaan sijoittamalla 100 särmiön yhteistilavuudeksi saadaan laskimella n. 52600 m^3.

$$\frac{10000\left(1-\left(\frac{81}{100}\right)^{100}\right)}{1-\frac{81}{100}} \quad\to\quad 52631.57891$$

10. Maanjäristyksen voimakkuus M lasketaan kaavalla

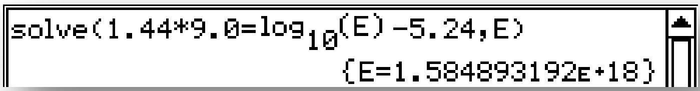
$$1{,}44M = \log_{10} E - 5{,}24,$$

jossa E on järistyksessä vapautuva energia.

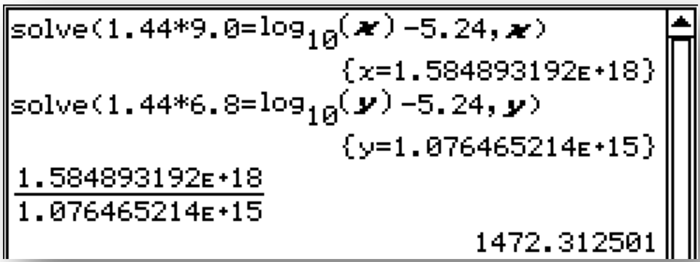
a) Sendain lähellä vuonna 2011 sattuneen järistyksen voimakkuus oli $9{,}0$. Laske järistyksessä vapautunut energia kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

b) Kobessa vuonna 1995 sattuneen järistyksen voimakkuus oli $6{,}8$. Kuinka moninkertainen oli Sendain järistyksessä vapautunut energia Koben järistykseen verrattuna?

Ratkaisu: Laskimella a-kohdan vastaus on $1{,}6 \cdot 10^{18}$.



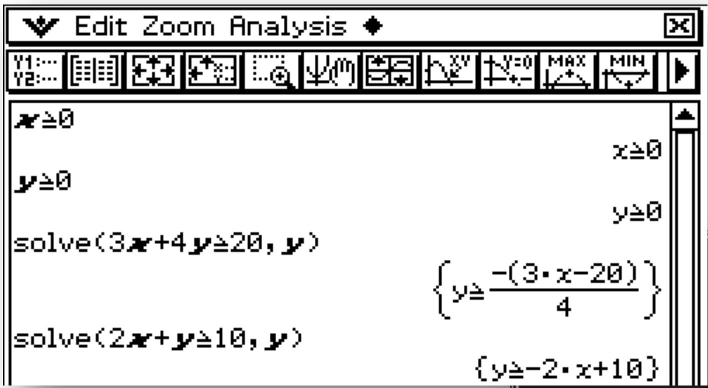
Merkitään vapautuneita energioita Sendaissa = x ja Kobessa = y, jolloin laskimella

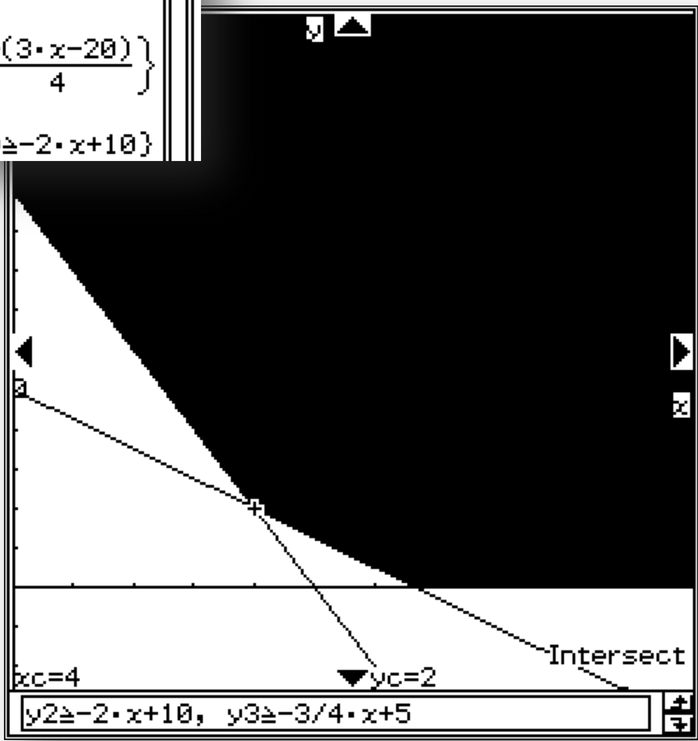


josta pyöristetään vastaukseksi n. 1500-kertainen.

11. Levitoimiseen tarvittavassa taikajuomassa on oltava vähintään 20 hyppysellistä jauhettua lepakon siipeä ja vähintään 10 hyppysellistä hämähäkin seittiä. Taikajuomapuodissa on kahta valmissekoitetta Ascensus ja Sursum. Pikarillinen Ascensusta maksaa kaksi kultarahaa, ja siinä on kolme hyppysellistä lepakon siipeä ja kaksi hyppysellistä hämähäkin seittiä. Pikarillinen Sursumia maksaa kolme kultarahaa. Siinä puolestaan on neljä hyppysellistä lepakon siipeä ja yksi hyppysellinen hämähäkin seittiä. Kuinka paljon kumpaakin sekoitetta kannattaa levitoijakokelaan ostaa, jotta hän saisi taikajuoman mahdollisimman edullisesti?

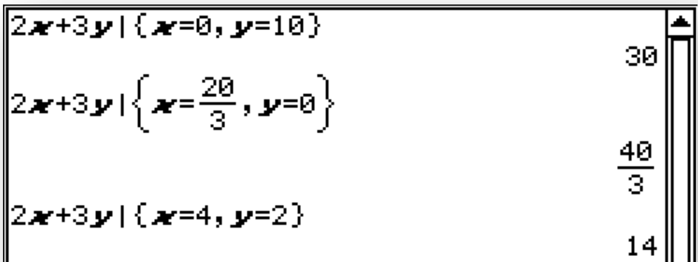
Ratkaisu: Merkitään Ascenuksen määrää = x ja Sursumin määrää = y. Muodostetaan lepakon siipeä ja hämähäkin seittiä vastaavat määrät eri sekoituksissa ja piirretään ehtoja vastaavat suorat laskimella.





Leikkauspisteet suorien kesken ja suorien ja akseleiden kesken saadaan laskimesta, esim. viereisessä kuvassa suorien leikkauspiste on (4, 2).

Sijoittamalla alueen reunan leikkauspisteen koordinaatit (4, 2), ($\frac{20}{3}$, 0) ja (0, 10) hinnan lausekkeeseen 2x + 3y saadaan arvoiksi laskimella



Edullisin hinta on siis $\frac{40}{3}$ kultarahaa ja se saavutetaan hankkimalla ainoastaan $\frac{20}{3}$ pikarillista Ascenusta eikä lainkaan Sursumia.

12. Leonardo Pisano (1170–1250), kutsumanimeltään Fibonacci, määritteli noin vuonna 1210 lukujonon (f_n) kaavoilla

$$f_1 = f_2 = 1,\quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n,\quad n = 1, 2, \ldots$$

a) Määritä luvut $f_3, f_4, \ldots, f_{10}$.

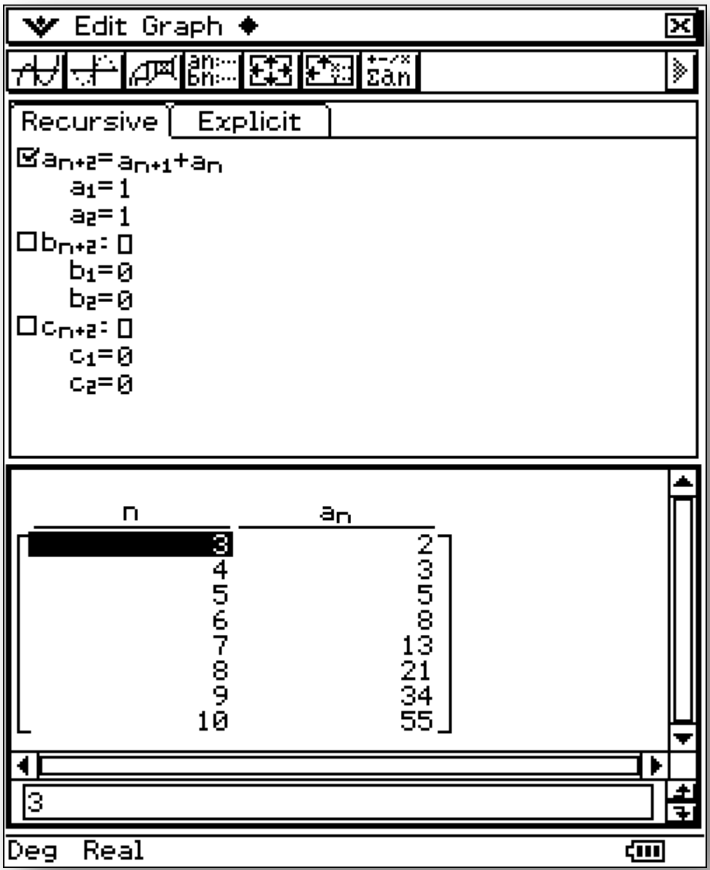
b) Kreikkalaiset kutsuivat lukua $\varphi = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) \approx 1{,}618034$ kultaiseksi leikkaukseksi. Sen avulla saadaan Fibonaccin luvuille kaava

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}\right),\quad n = 1, 2, \ldots$$

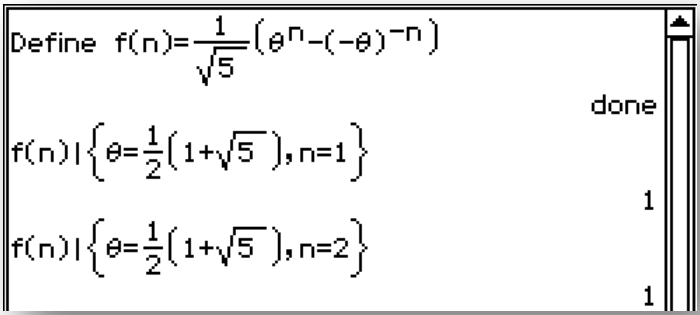
Näytä, että kaava on oikea, kun $n = 1$ ja $n = 2$.

c) Näytä, että yhtälön $x^2 - x - 1 = 0$ juuret ovat φ ja $-\frac{1}{\varphi}$.

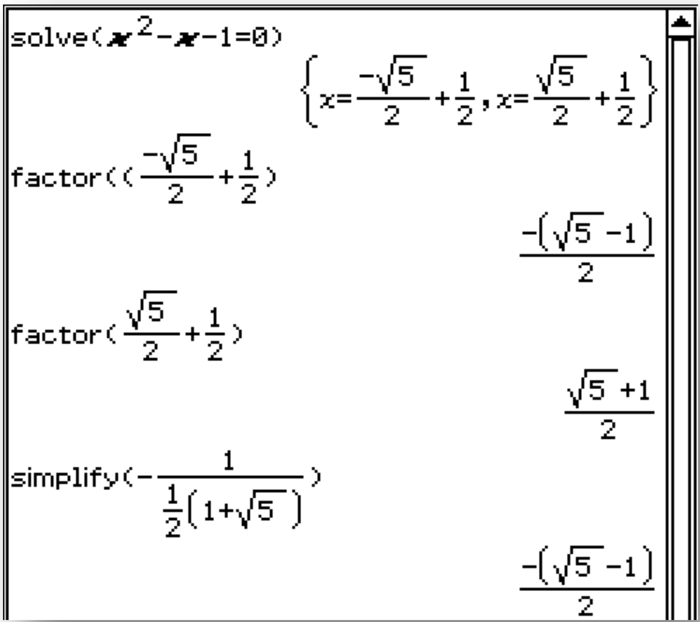
Ratkaisu: Laskimen lukujonojen avulla a-kohtaan saadaan kysytyt lukujonon jäsenet ovat 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 ja 55.



b-kohta ratkeaa laskimella



C-kohdan ratkaisu laskimella



13. Simeoni osti Saapasnahkatornin 12 000 eurolla ja teetti siihen myöhemmin 4 000 euron peruskorjauksen. Yksitoista vuotta myöhemmin hän myi sen Juhanille 42 000 eurolla. Voitosta on maksettava 30 % pääomatuloveroa. Verottaja tulkitsee voitoksi summan, joka saadaan, kun myyntihinnasta vähennetään ostohinta ja peruskorjauskulut. Toisaalta Simeoni voi myös halutessaan käyttää ns. hankintameno-olettamaa. Tällöin myyntihinnasta vähennetään 20 %, jos on omistanut tornin alle 10 vuotta, ja 40 %, jos on omistanut yli 10 vuotta. Mitään muita vähennyksiä ei saa tehdä. Jäljelle jääneestä summasta maksetaan 30 % pääomatuloveroa.

a) Paljonko Simeonille jää myyntihinnasta verotuksen jälkeen, kun hän valitsee edullisemman vaihtoehdon?

b) Mikä olisi sellainen myyntihinta, että Simeoni maksaisi kummassakin verotusvaihtoehdossa yhtä suuren veron?

Ratkaisu: Laskimella

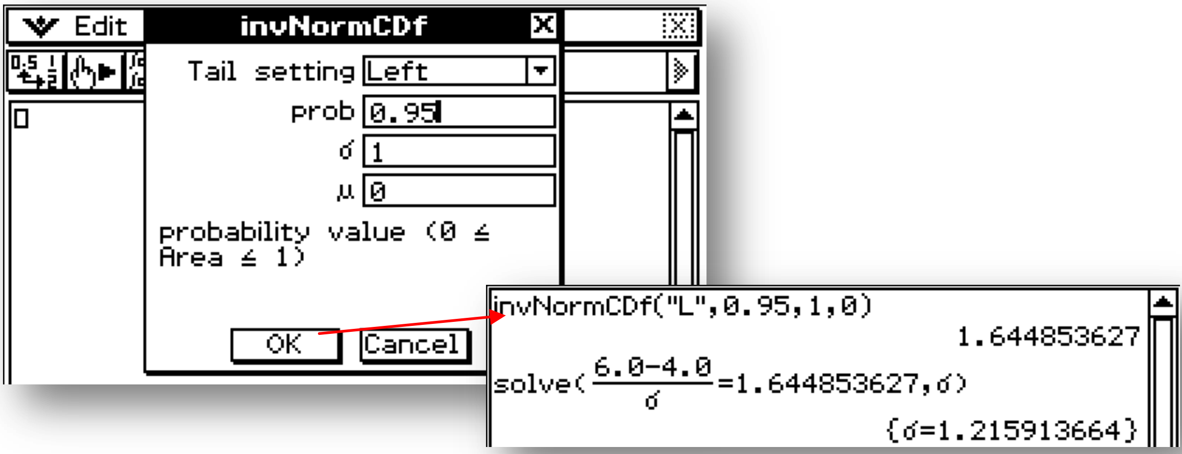
```
42000-(42000-12000-4000)*0.3
                                 34200
42000-42000*0.6*0.3
                                 34440
```

Kannattaa siis käyttää hankintameno-olettamaa, jolloin Simeonille jää 34440 euroa. B-kohdassa ratkaistaan yhtälö laskimella ja saadaan myyntihinnaksi 40000 euroa.

```
solve(x-(x-12000-4000)*0.3=x-x*0.6*0.3)
                                {x=40000}
```

14. Vuorokauden keskilämpötila maaliskuussa on eräällä paikkakunnalla normaalijakautunut niin, että odotusarvo on 4,0 °C ja 90 % vuorokautisista keskilämpötiloista on 2,0 °C – 6,0 °C. Laske keskilämpötilan keskihajonta.

Ratkaisu: Nyt ylärajan 6,0 alle jää 95% lämpötiloista, joten normitetuksi ylärajaksi saadaan laskimella 1,644853627. Normituskaavasta voidaan laskimella ratkaista keskihajonnaksi n. 1,2.



15. a) Määritä yhtälön

$$\sin(2x+4^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ratkaisut välillä $x\in[0^\circ,90^\circ]$.

b) Määritä a-kohdan yhtälön kaikki ratkaisut.

Ratkaisu: Laskimella a-kohtaan 28^0 ja 58^0 ja b-kohtaan $28^0 + n\cdot180^0$ tai $58^0 + n\cdot180^0$.