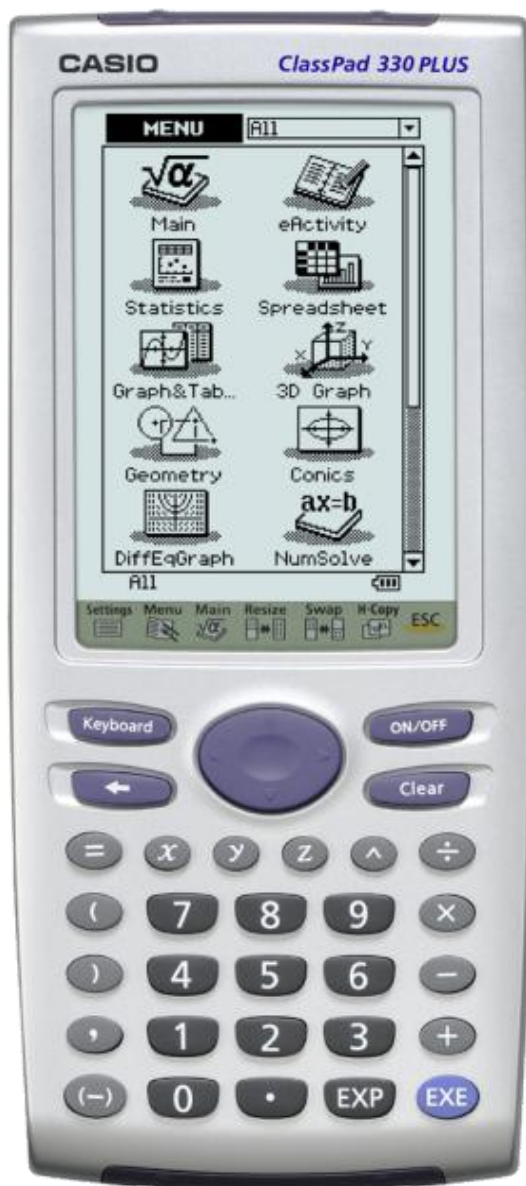


*ClassPad 330 Plus studentexamen
Hösten 2012 lång matematik*



***Mer tid för matematik och
mindre tid för att lära sig
räknaren.***

Kära läsare!

Användningen av CAS-beräkningar i studentexamen är ännu i ett tidigt stadium i Finland. Svårigheten är att veta hur man ska poängsätta svaren, vilka beräkningssteg som måste vara synliga vid examen. Lärarna behöver utbildning och läroplanen förändringar. Även studentexamen kommer kanske att behövas göras om genom andra typer av uppgifter.

I detta häfte har man löst ett prov i lång matematik med hjälp av Casios ClassPad 330 Plus-räknare. Detta är det andra provet där det var tillåtet att använda symboliska räknare.

I vissa lösningar har man svaret angett direkt utan att visa mellanliggande steg och i andra uppgifter med dess olika delsteg. I lösningarna finns även kortfattade förklaringar om hur man kan och bör mata in olika uppgifter i räknaren.

Principen med att använda ClassPad 330 Plus är att uttryck och ekvationer matas in som de är. Därefter kan man markera ett uttryck eller en ekvation och sedan välja rätt åtgärd i Interactive-menyn. Uttryck kan kopieras genom att dra med pennan eller använda **Edit->Copy** mellan olika program.

I det här fallet behöver inte användaren veta syntaxen i räknaren och därmed undviker man misstag i beräkningarna. De erfarna användarna kan använda **Action** –menyn för att använda räknaren vid olika kommandon. För nybörjare eller studenter är det mycket roligare att börja räkna uppgifter utan att behöva lära sig mer om räknaren tack vare **Interactive**-menyn.

Jag tar gärna emot frågor och kommentarer. Kontaktuppgifter finns på baksidan. Ha så roligt med matematiken och med detta lösningshäfte!

Kempele 2.10.2012

Pepe

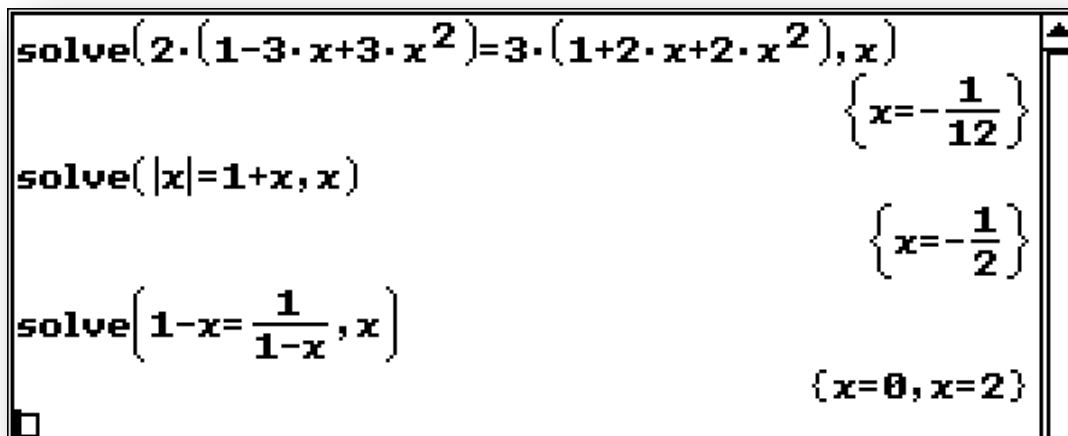
1. Lös ekvationerna

a) $2(1-3x+3x^2) = 3(1+2x+2x^2)$

b) $|x| = 1+x$

c) $1-x = \frac{1}{1-x}$

Lösning: I ClassPad 330 Plus kan man skriva ekvationerna som de är och efter markering väljer man **Interactive -> Solve** och man får då lösningen.



```
solve(2*(1-3*x+3*x^2)=3*(1+2*x+2*x^2),x)
{x=-1/12}

solve(|x|=1+x,x)
{x=-1/2}

solve(1-x=1/(1-x),x)
{x=0,x=2}
```

Om man vill visa flera delsteg i uträkningarna, kan du öppna upp parenteserna och sedan kombinera polynomen i fråga a. Detta kan göras genom att skriva uttrycket och sedan markera det. Därefter använd kommandona **expand** och **collect** från **Interactive -> Transformation**.

I uppgift C kan man flytta om ekvationerna så att de är på samma sida och sedan kombineras genom att följa **Interactive -> Transformation -> combine..**

Även nollor i nämnare och täljare kan undersökas separat för att hitta eventuella begränsningar inom området

```

expand(2*(1-3*x+3*x^2))
6*x^2-6*x+2
expand(3*(1+2*x+2*x^2))
6*x^2+6*x+3
collect(6*x^2-6*x+2-(6*x^2+6*x+3),x)
-12*x-1
solve(-12*x-1,x)
{x=-1/12}
combine(1-x-(1/(1-x)))
-(x^2-2*x)/(x-1)
solve(x-1,x)
{x=1}
solve(-(x^2-2*x),x)
{x=0,x=2}

```

2. Förenkla uttrycken

a) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$

b) $\frac{x^2 - 9}{x + 3}$

c) $\ln \frac{x}{2} + \ln \frac{e^x}{x} + \ln 2$

Lösning: Skriv ekvationerna och markera dem. Välj **Interactive** ->

Transformation och välj sedan kommandona **expand** och **simplify** och man får svaret utan delsteg.

```

expand((x+1/x)^2 - (x-1/x)^2)
simplify(x^2-9)
ln(x/2)+ln(e^x/x)+ln(2)

```

4
x-3
x

Skriv ekvationerna och markera dem. Välj **Interactive** -> **Transformation** och kommandona **expand** och **combine** och man får svaret med alla delsteg.

```

expand((x+1/x)^2)
expand((x-1/x)^2)
combine(x^2+1/x^2+2-(x^2+1/x^2-2))

```

$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$
 $x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$
4

I uppgift B kan man först faktorisera täljaren genom välja **Interactive** -> **Transformation** och sedan kommandot **factor**. Därefter kan man förenkla uttrycket med kommandot **simplify**:

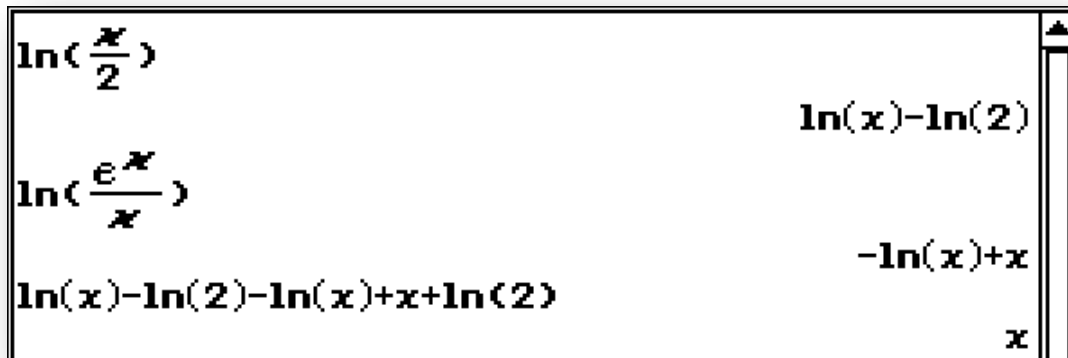
```

factor(x^2-9)
simplify((x+3)*(x-3)/(x+3))

```

$(x+3) \cdot (x-3)$
x-3

I uppgift C hittar du knappen/tecknet för "ln" på tangentbordet. Lägg in varje logaritm för sig och tryck på **exe**-tangents efter varje gång. ClassPad 330 Plus förenklar svaret automatiskt med **exe**-tangents. På så sätt får man även alla delstegen och därefter kan man dra uttrycken med pennan till en ny rad för att göra den slutgiltiga beräkningen.



3. a) Bestäm värdet av derivatan av funktionen

$$f(x) = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$$

för $x = 0$.

b) Beräkna det exakta värdet av integralen

$$\int_0^{\pi} \left(1 + \sin \frac{x}{3}\right) dx.$$

Lösning: Räkaren räknar direkt ut derivatans värde i en viss punkt samt ger en integrals värde. När man lägger in ekvationerna och sedan markerar dem, kan man lätt derivera dem genom att välja **Interactive -> Calculation** och kommandot **diff** och **integraltecknet**. Derivatans bestäms genom **Derivative at value** där man lägger in värdet 0 och för integralen väljer man **Definite** och där lägger man in övre och nedre gränsvärde.

diff(1/2 · e^x · (sin(x) + cos(x)), x, 1, 0)

$$\int_0^{\pi} 1 + \sin\left(\frac{x}{3}\right) dx$$

1

$\pi + \frac{3}{2}$

I lösningen med fler delsteg, har deriveringen markerats som ett av stegen. Efter att ha skrivit uttrycket och markerat det, är det lättaste sättet för derivering att välja **Interactive** -> **Calculation** -> **diff**." Man kan alltid hänvisa till tidigare svar med kommandot **ans**, precis som vi har gjort här. Genom **keyboard 2D** eller **mth** och undermenyn **OPTN** hittar man tecknet |."

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \cdot e^x \cdot (\sin(x) + \cos(x)) \right)$$

ans | x=0

$\cos(x) \cdot e^x$

1

Du vet väl att även finns programvara för PC? Du kan använda projektor eller Smartboard tillsammans med programvaran för att visa eleverna dina uträkningar: Ladda hem en gratis testversion: <http://edu.casio.com>

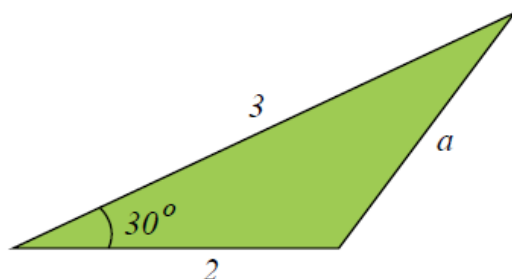
I uppgift B visas delstegen genom att räkna integralen som i föregående uppgift men utan ange gränsvärden. Här presenteras även ett nytt alternativ: placera funktionen i funktionsminnet. Välj **Define** – kommandot som går att hitta via (**keyboard** -> **cat**) eller under **Action** -> **Command**. Detta kan även göras i olika delsteg under **Interactive** -> **Define**. Nu kan den övre och nedre gränsen undersökas separat och man kan med dessa värden beräkna integralens värde.

The screenshot shows a calculator interface with the following elements:

- At the top, the integral $\int_0^{\pi} 1 + \sin\left(\frac{x}{3}\right) dx$ is displayed.
- Below it, a second integral $\int_0^{\pi} 1 + \sin\left(\frac{x}{3}\right) dx$ is shown with empty boxes for the limits.
- The function **Define F(x) = x - 3 · cos($\frac{x}{3}$)** is entered into the memory.
- Below the definition, the values **F(π)**, **F(0)**, and **F(π) - F(0)** are calculated.
- On the right side, a vertical scroll bar is visible with labels: $\pi + \frac{3}{2}$, $x - 3 \cdot \cos\left(\frac{x}{3}\right)$, **done**, $\pi - \frac{3}{2}$, **-3**, and $\pi + \frac{3}{2}$.

4. a) Låt $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right]$ vara en sådan vinkel att $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$. Bestäm de exakta värdena av $\sin \alpha$ och $\tan \alpha$.

b) Betrakta triangeln i figuren nedan. Beräkna längden av sidan a exakt. Ge även ett närmevärde med två decimaler.



Lösning: I uppgift A har man först bestämt ekvationerna med avseende på α .

Här måste man först skriva ekvationen, markera den och sedan välja

Interactive -> **Advanced solve**-kommandot. Sedan lägger man in

begränsningsvärdena i kommandot `rangeAppoint` som finns under **Interactive** -> **Calculation**.

För att få de exakta värdena av sinus och cosinus, lägg in den lösta vinkeln i funktionerna. Du kan spara tid genom att använda kommandot **ans** eller enbart dra svaret in i funktionen – man behöver inte skriva vinkeln igen.

```

solve(cos(α) = -1/3, α)
{α = cos⁻¹(1/3) + 2·π·constn(1) - π, α = -cos⁻¹(1/3) + 2·π·constn(2) + π}
rangeAppoint(ans, π, 3π/2)
sin(ans)
tan(cos⁻¹(1/3) + π)
{α = cos⁻¹(1/3) + π}
{sin(α) = -2·√2/3}
2·√2

```

I uppgift B utnyttjar man cosinussatsen som finns i formelsamlingen. Oavsett om man använder radianer eller grader som vinkelenhet kan man beräkna uppgiften och få svaret i grader genom att lägga till gradtecknet efter vinkeln. Eftersom triangelns sida, a , är positiv så används inte den negativa roten.


The screenshot shows a calculator interface with the following text:

$$\text{solve}(a^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos(30^\circ), a)$$

$$\{a = -\sqrt{-6 \cdot \sqrt{3} + 13}, a = \sqrt{-6 \cdot \sqrt{3} + 13}\}$$

$$\{a = -\sqrt{-6 \cdot \sqrt{3} + 13}, a = \sqrt{-6 \cdot \sqrt{3} + 13}\}$$

$$\{a = -1.614835953, a = 1.614835953\}$$

Om man vill avrunda svaret till 2 decimaler med hjälp av räknaren, välj  och sedan **Basic Format** -> **Number Format** -> **Fix 2**.

The screenshot shows a calculator interface with the following text:

$$\sqrt{-6\sqrt{3} + 13}$$

1.61

5. Bestäm det största och det minsta värdet av polynomet $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$ i intervallet $[2, 6]$.

Lösning: I lösningen har man lagt in funktionsuttrycket och sedan markerat den med pennan. Därefter har man hämtat funktionen för derivering i **Interactive** -> **Calculation** -> **diff**. För att få derivatans nollpunkter använd kommandot **ans** – och därefter **Interactive** -> **Advanced** -> **solve** och **Interactive** -> **Calculation** -> **rangeAppoint**.

```

d/dx(x^3-6*x^2-15*x+2)
solve(ans,x)
rangeApoint(ans,2,6)

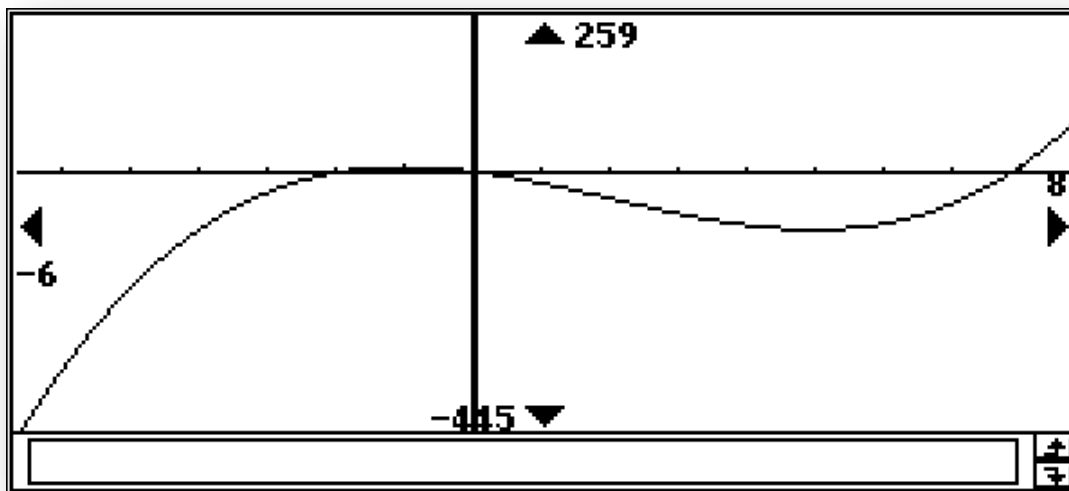
```

$$3 \cdot x^2 - 12 \cdot x - 15$$

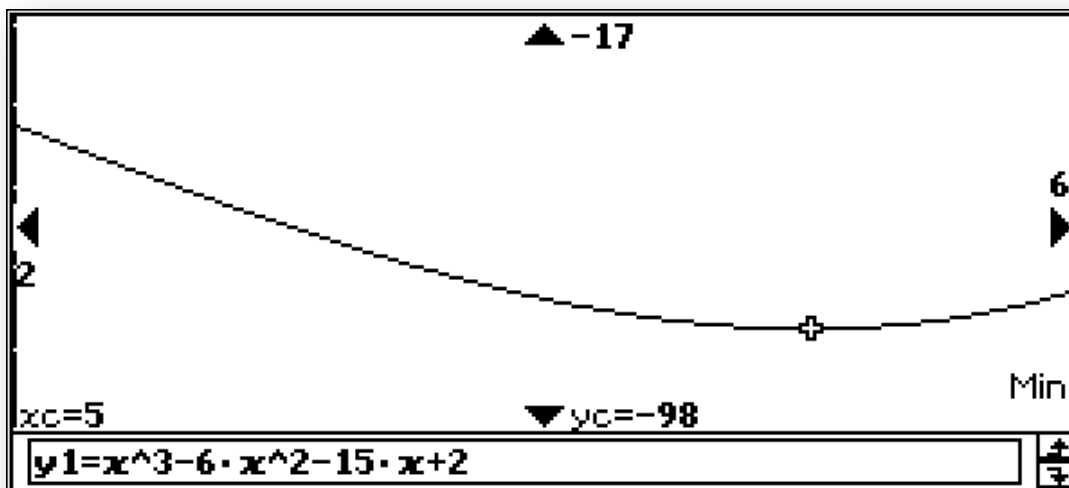
$$\{x=-1, x=5\}$$

$$\{x=5\}$$



Bild av funktionen i större skala...



..och för att zooma in ett givet intervall trycka på $\left[\frac{\square}{\square} \right]$ i Main-programmet och dra och släpp funktionen ovanpå koordinaterna. Med $\left[\frac{\square}{\square} \right]$ kan du justera värdena för axlarna



Eftersom funktionen är kontinuerlig i hela det slutna intervallet, räcker det med att undersöka intervallets gränsvärden och funktionsvärden i ändpunkterna. Detta lyckas man med genom att välja **Analysis -> G-Solve -> y-Cal**, där man kan lägga in värdena 2, 5 och 6 som x-koordinater. De motsvarande funktionsvärdena är -44, -98 och -88, varav det minsta värdet är -98 och det största -44.

Notera: Funktionsuttrycket kan man även kopiera in i grafprogrammet och då får man ett diagram. För att göra detta markera funktionsuttrycket och kopiera det genom **Edit -> Copy**. Sedan väljer man följande bild  och där klistrar man in funktionen i grafprogrammet genom **Edit -> Paste**. Välj  och då får man nedanstående diagram där man kan dra motsvarande slutsatser.

$y1 = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$					
x	2		5		6
$f'(x)$	-27	-	0	+	21
$f''(x)$	0	+	18	+	24
$f(x)$	-44	↳	-98	↕	-88

Casio Scandinavia AS, Finland Filial

Keilaranta 4

02150 Espoo

info@casio.fi

tilaus@casio.fi

Pepe Palovaara

Skolkoordinator Finland

Telefonnummer: +358 (0)44 72 75 776

E-postadress: pepe.palovaara@casio.fi