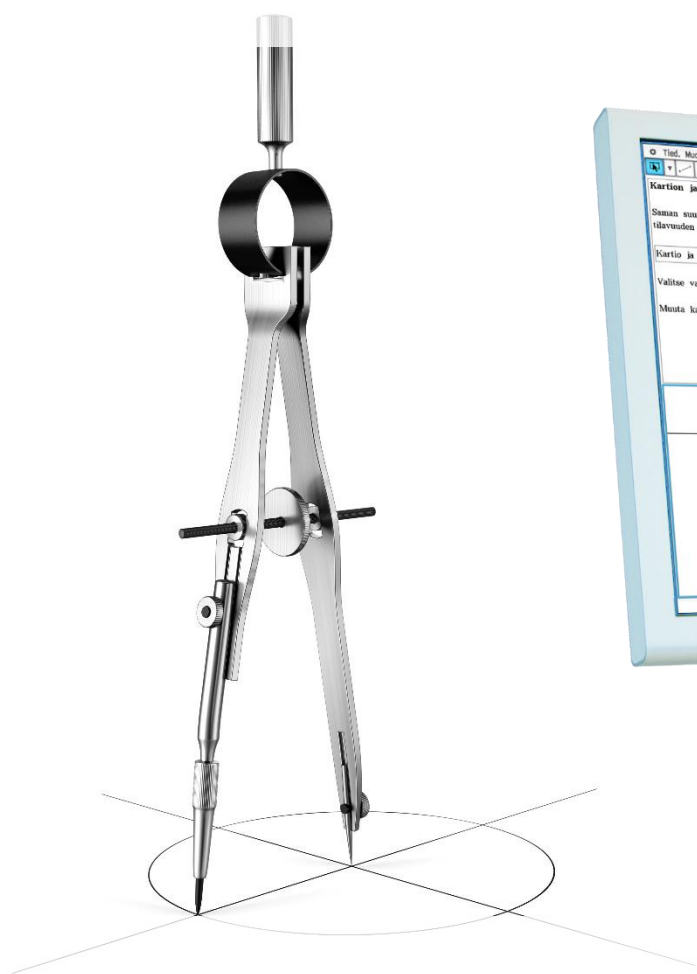


# Laske Laudatur Casion avulla

Pitkä matematiikka,  
kevät 2025



## Sisältö

Kevään 2025 matematiikan yo-kokeiden ratkaisut työasemalle ladattavan ja Abitista löytyvän ClassPad Managerin avulla laskettuina.

Pepe Palovaara

**CASIO**®

*Integrity*

## FI – Matematiikka, pitkä oppimäärä

19.3.2025

Koe koostuu 13 tehtävästä, joista vastataan kymmeneen. Tehtävät on jaettu kolmeen osaan. A-osassa on kuusi tehtävää, joista vastataan viiteen. B1-osassa on neljä tehtävää, joista vastataan kolmeen. B2-osassa on kolme tehtävää, joista vastataan kahteen. Kaikki tehtävät arvostellaan pistein 0–12, joten kokeen maksimipistemäärä on 120.

A-osassa saat käyttää koejärjestelmän taulukkokirjoja ja perusohjelmia. A-osa palautetaan tehtävän 6 jälkeen olevalla painikkeella. Tämän jälkeen A-osan vastauksia ei voi enää muokata. A-osan palauttamisen jälkeen kaikki koejärjestelmän ohjelmat ovat käytettävissäsi. Voit vastata B-osien tehtäviin myös ennen A-osan palauttamista.

Halutessasi voit tuottaa vastausten tueksi piirroksia, kaavioita tai taulukoita ja liittää niistä kuvakaappauksen mihin tahansa tekstivastaukseen.

Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

## A-osa

**i** Vastaa viiteen tehtävään.

## 1. Perustehtäviä 12 p.

Anna tässä tehtävässä pelkkä vastaus ilman perusteluja. Vastauskenttään voi kirjoittaa vain yhden kokonaisluvun.

1.1 Ratkaise yhtälö  $5x - 17 = 43$ . 2 p.

$$x = \boxed{12}$$

1.2 Ratkaise potenssiyhtälö  $2x^3 - 128 = 0$ . 2 p.

$$x = \boxed{4}$$

1.3 Ratkaise yhtälö  $\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ , kun  $0^\circ < x < 90^\circ$ . 2 p.

$$x = \boxed{60} \text{ astetta}$$

1.4 Määritä  $f'(2)$ , kun  $f(x) = x^4 + 100$ . 2 p.

$$f'(2) = \boxed{32}$$

1.5 Määritä integraalin  $A = \int_1^4 3x^2 dx$  arvo. 2 p.

$$A = \boxed{26}$$

1.6 Määritä kolmaskymmenes termi  $a_{30}$  aritmeettisessa lukujonossa  $(a_1, a_2, a_3, \dots) = (1, 8, 15, \dots)$ . 2 p.

$$a_{30} = \boxed{204}$$

## 2. Sievennyksiä 12 p.

1. Sievennä lauseke  $\frac{(y^2 - 4)(y + 1)}{y - 2}$ , kun  $y \neq 2$ . (6 p.)

2. Sievennä lauseke  $\sqrt{(z - 1)^2 + 2(z - 1) + 1}$ . (6 p.)

1.  $\frac{(y^2 - 4)(y + 1)}{y - 2} = \frac{(y - 2)(y + 2)(y + 1)}{y - 2} = y^2 + 3y + 2$
2.  $\sqrt{(z - 1)^2 + 2(z - 1) + 1} = \sqrt{z^2 - 2z + 1 + 2z - 2 + 1} = \sqrt{z^2} = |z|$

## 3. Suorakulmaiset kolmiot 12 p.

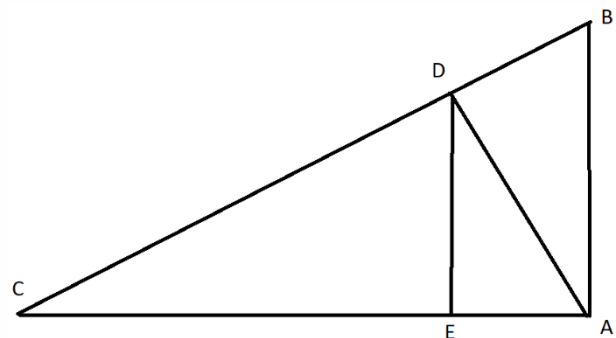
### Aineisto

3.A Kuva: Hahmotelma kolmioista

Suorakulmaisen kolmion  $ABC$  sivujen pituudet ovat  $|AB| = 3$ ,  $|AC| = 4$  ja  $|BC| = 5$ . Suorasta kulmasta  $A$  piirretään korkeusjana kohtisuoraan hypotenuusalle pisteeseen  $D$ . Pisteestä  $D$  piirretään edelleen kohtisuora jana kateetille  $AC$  pisteeseen  $E$ . Lopputulos on hahmoteltu kuvassa 3.A.

### 3.A Kuva: Hahmotelma kolmioista

Määritä suorakulmaisen kolmion  $ADE$  kateettien pituudet.



Lähde: YTL.

Merkitään suorakulmaisen kolmion  $ABC$  pinta-ala kahdella eri tapaa sen korkeusjanan  $|AD|$  laskemiseksi:

$$\frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \Leftrightarrow |AD| = \frac{12}{5}$$

Suorakulmaisesta kolmiosta  $ADB$  tiedetään nyt toinen kateetti ja hypotenuusa, joten Pythagoraan lauseella saadaan

$$|DB| = \sqrt{3^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{25}} = \frac{9}{5} \text{ ja edelleen } |CD| = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5}.$$

Suorakulmaisen kolmion  $ADC$  pinta-alan avulla saadaan ratkaistua  $|ED|$ :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{12}{5} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot |ED| \Leftrightarrow \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{5} = |ED| \Leftrightarrow |ED| = \frac{48}{25}.$$

Nyt suorakulmaisesta kolmiosta  $AED$  on ratkaisematta vain kateetti  $AE$ , joka saadaan Pythagoraan lauseella.

$$|AE| = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 - \left(\frac{48}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{25} - \frac{2304}{625}} = \sqrt{\frac{3600 - 2304}{625}} = \frac{\sqrt{1296}}{\sqrt{625}} = \frac{36}{25}.$$

Kysytyt kateetit ovat siis  $|AE| = \frac{36}{25}$  ja  $|ED| = \frac{48}{25}$ .

#### 4. EKP:n korkopäätös 12 p.

Euroopan keskuspankki (EKP) on päättämässä eräästä ohjauskorosta, jonka nykyinen taso on 4,25 %. Ryhmä taloustieteilijöitä ennustaa, että 0,25 prosenttiyksikön korotukselle on 50 %:n todennäköisyys ja ohjauskoron pitämiselle muuttumattomana on 50 %:n todennäköisyys. Kun uusi tieto inflaatiosta vuotaa julkisuuteen, taloustieteilijät korjaavat ennustettaan 0,25 prosenttiyksikön korotuksen todennäköisyydestä 65 %:iin, jolloin koron todennäköisyys pysyä muuttumattomana on siis 35 %.

Kuinka monta prosenttiyksikköä ohjauskoron odotusarvo kasvaa uuden tiedon seurauksena?

Ohjauskoron odotusarvo prosentteina ensimmäisellä arviolla on  $0,5 \cdot 4,25 + 0,5 \cdot 4,5 = 4,375$  ja uudella arviolla  $0,25 \cdot 4,25 + 0,65 \cdot 4,5 = 4,4125$ . Näiden erotuksena saadaan  $4,4125 - 4,375 = 0,0375$  prosenttiyksikköä.

#### 5. Suurin arvo 12 p.

Määritä funktion  $f(x) = x^{2025}e^{-x}$  suurin arvo, kun  $x \geq 0$ .

Funktion  $f(x) = x^{2025}e^{-x}$ ,  $x \geq 0$ , derivaatta on tulon derivointisäännöllä  $f'(x) = 2025x^{2024}e^{-x} + x^{2025} \cdot (-1)e^{-x}$ .

Lasketaan derivaatan nollakohdat:  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} \cdot (2025x^{2024} - x^{2025}) = 0 \Leftrightarrow 2025x^{2024} - x^{2025} = 0$

$\Leftrightarrow x^{2024} \cdot (2025 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2025$ . Tutkitaan derivaatan merkki:  $f'(1) = \frac{2024}{e} > 0$  ja

$f'(3000) = \frac{2025 \cdot 3000^{2024} - 3000^{2025}}{e^{3000}} = \frac{-975 \cdot 3000^{2024}}{e^{3000}} < 0$ , joten funktio on kasvava välillä  $0 \leq x \leq 2025$  ja

vähenevä, kun  $x \geq 2025$ . Funktion suurin arvo on  $f(2025) = 2025^{2025}e^{-2025} = \frac{2025^{2025}}{e^{2025}}$ .

#### 6. Eukleideen algoritmi 12 p.

Määritä Eukleideen algoritmilla lukujen 5322 ja 342 suurin yhteinen tekijä.

Sovelletaan Eukleideen algoritmia.

$$5322 = 15 \cdot 342 + 192$$

$$342 = 1 \cdot 192 + 150$$

$$192 = 1 \cdot 150 + 42$$

$$150 = 3 \cdot 42 + 24$$

$$42 = 1 \cdot 24 + 18$$

$$24 = 1 \cdot 18 + 6$$

$$18 = 3 \cdot 6 + 0$$

Viimeinen nollasta eroava jakojäännös on suurin yhteinen tekijä:  $\text{syt}(5322, 342) = 6$ .

# B1-osa

**i** Vastaa kolmeen tehtävään.

## 7. Merkki- ja kulkukaaviot 12 p.

### Aineisto

7.A Kuva: Merkki- ja kulkukaaviot

Valitse osatehtävissä 7.1–7.6 funktiolle oikea merkkikaavio tai kulkukaavio kuvan 7.A vaihtoehtoista A–H. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p. Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluakaan jättää tehtävää arvosteltavaksi, poista vastauksesi valitsemalla pudotusvalikosta tyhjä rivi.

7.1  $f(x) = x^2 + 2x - 8$  (2 p.)

**B** ☒ Ylöspäin avautuva paraabeli, nollakohdat -4 ja 2

7.2  $f(x) = 3x + 6$  (2 p.)

**D** ☒ Nouseva suora, nollakohta -2

7.3  $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$  (2 p.)

**A** ☒ Ylöspäin avautuva paraabeli, nollakohdat -3 ja 1

7.4  $f(x) = 4 - x - x^3$  (2 p.)

**F** ☒ Laskeva käyrä, ei derivaatan nollakohtia

7.5  $f(x) = 3x^2 + 9x + 6$  (2 p.)

**H** ☒ Derivaatta nouseva suora nollakohtana -1,5

7.6  $f(x) = 2x - 5$  (2 p.)

**E** ☒ Nouseva suora, nollakohta 2,5

### 7.A Kuva: Merkki- ja kulkukaaviot

|   |        |    |   |   |  |
|---|--------|----|---|---|--|
|   |        | -3 |   | 1 |  |
| A | $f(x)$ | +  | - | + |  |

|   |        |    |   |   |  |
|---|--------|----|---|---|--|
|   |        | -4 |   | 2 |  |
| B | $f(x)$ | +  | - | + |  |

|   |        |    |   |    |  |
|---|--------|----|---|----|--|
|   |        | -2 |   | -1 |  |
| C | $f(x)$ | -  | + | -  |  |

|   |        |    |   |  |  |
|---|--------|----|---|--|--|
|   |        | -2 |   |  |  |
| D | $f(x)$ | -  | + |  |  |

|   |        |     |   |  |  |
|---|--------|-----|---|--|--|
|   |        | 2,5 |   |  |  |
| E | $f(x)$ | -   | + |  |  |

|   |         |   |  |  |  |
|---|---------|---|--|--|--|
|   | $f'(x)$ | - |  |  |  |
| F | $f(x)$  |   |  |  |  |

|   |         |   |  |   |  |
|---|---------|---|--|---|--|
|   | $f'(x)$ | - |  | + |  |
| G | $f(x)$  |   |  |   |  |

|   |         |   |  |   |  |
|---|---------|---|--|---|--|
|   | $f'(x)$ | - |  | + |  |
| H | $f(x)$  |   |  |   |  |

### 8. Janojen pituudet 12 p.

Tasossa on pisteet  $A = (-6, -1)$ ,  $B = (-1, 11)$  ja  $C = (8, -1)$ . Valitaan piste  $X$  janalta  $AB$ , piste  $Y$  janalta  $BC$  ja piste  $Z$  janalta  $AC$  niin, että  $|AX| = |AZ| = a$ ,  $|BX| = |BY| = b$  ja  $|CZ| = |CY| = c$ .

Muodosta yhtälöryhmä luvuille  $a$ ,  $b$  ja  $c$ , ja ratkaise se.

Kolmion sivujen pituudet ovat  $AB=a+b$ ,  $AC=a+c$  ja  $BC=b+c$ . Toisaalta sivujen pituudet saadaan laskettua annettujen pisteiden koordinaattien avulla. Ratkaistaan näiden kolmen yhtälön yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} a+b=\sqrt{(-1-(-6))^2+(11-(-1))^2} \\ a+c=\sqrt{(8-(-6))^2+(-1-(-1))^2} \\ b+c=\sqrt{(8-(-1))^2+(-1-11)^2} \end{cases} \quad a, b, c$$

$$\{a=6, b=7, c=8\}$$

Katso aiempien yo-kokeiden ratkaisut ja muut matematiikan tukimateriaalit osoitteesta

[www.casio-laskimet.fi](http://www.casio-laskimet.fi)



## 9. Afrikan tähti 12 p.

Afrikan tähti -pelissä on 30 pahvikiekkoa: 12 tyhjää, 5 hevosenkenkää, 3 rosvoa, 4 keltaista topaasia, 3 vihreää smaragdia, 2 punaista rubiinia ja 1 Afrikan tähti -timantti. Pelin alussa kiekot sekoitetaan ja asetetaan nurin päin pelilaudalle, jolloin kaikki kiekot näyttävät samanlaisilta. Kun pelaaja kääntää kiekon, se poistetaan pelistä. Pelinappuloita liikutetaan pelilaudalla noppaa heittämällä; pelinappulan sijainti määrää, minkä kiekon voi kääntää.

### 9.1 Valitse oikea vaihtoehto. 4 p.

Näitä vastauksia ei tarvitse perustella. Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluakaan jättää tehtävää arvosteltavaksi, merkitse jokaiseen osatehtävään vastausvaihtoehto "En vastaa.". Oikea vastaus 1 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

#### 9.1.1 Ensimmäinen kääntämäsi pahvikiekko on tyhjä ja toinen rubiini. 1 p.

- ☒ Tapahtumat ovat toisistaan riippuvia.
- ☐ Tapahtumat ovat toisistaan riippumattomia.
- ☐ En vastaa.

Rubiinin saamisen tn:een vaikuttaa ensimmäisen kiekon sisältö

#### 9.1.2 Kääntämäsi pahvikiekko osoittautuu topaasiksi, ja saat seuraavalla heitolla silmäluvun 4. 1 p.

- ☐ Tapahtumat ovat toisistaan riippuvia.
- ☒ Tapahtumat ovat toisistaan riippumattomia.
- ☐ En vastaa.

Heiton silmäluku on riippumaton käännetystä pahvikiekosta

#### 9.1.3 Saat heittovuorollasi nopan silmäluvuksi 6 ja vastapelaaja vuorollaan nopan silmäluvuksi 4. 1 p.

- ☐ Tapahtumat ovat toisistaan riippuvia.
- ☒ Tapahtumat ovat toisistaan riippumattomia.
- ☐ En vastaa.

Noppien jokaisen heiton silmäluvun todennäköisyys on 1/6

#### 9.1.4 Saat pahvikiekosta rosvon, ja vastapelaaja saa pahvikiekostaan smaragdin. 1 p.

- ☒ Tapahtumat ovat toisistaan riippuvia.
- ☐ Tapahtumat ovat toisistaan riippumattomia.
- ☐ En vastaa.

Smaragdin saamisen tn:een vaikuttaa ensimmäisen kiekon sisältö

9.2 Vastaa osatehtävien 9.2.1–9.2.2 kysymyksiin normaalisti perustellen. **8 p.**

1. Millä todennäköisyydellä saat kahdella heitolla noppien silmälukujen summaksi vähintään 10? (4 p.)
2. Tähän mennessä pelissä on käännetty seitsemän tyhjää, yksi topaasi, yksi rubiini ja yksi rosvo. Millä todennäköisyydellä seuraavan käännetyn pahvikiekon takana on joko Afrikan tähti tai hevosenkenkä? (4 p.)

1. Kuvataan kahden nopan heittoa 6x6-ruudukon avulla, jossa molempien noppien silmälukujen summat ovat. Lasketaan suotuisten alkeistapauksien määrä eli summa on 10, 11 tai 12 ja jaetaan se kaikkien alkeistapausten määrällä 36. Todennäköisyys on  $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ .

|         |         |   |   |    |    |    |
|---------|---------|---|---|----|----|----|
| Noppa 2 | 7       | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|         | 6       | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 |
|         | 5       | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
|         | 4       | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  |
|         | 3       | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  |
|         | 2       | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  |
|         | Noppa 1 |   |   |    |    |    |

2. 10 käännetyn kiekon jälkeen jäljellä on 20, joista 5 on tyhjää, 3 topaasia, 1 rubiini, 2 rosvoa, 5 hevosenkenkää, 3 smaragdia ja 1 Afrikan tähti. Todennäköisyys saada Afrikan tähti tai hevosenkä on  $\frac{1}{20} + \frac{5}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ .

## 10. Eksponenttijakauma **12 p.**

Eksponenttijakaumaa voi käyttää esimerkiksi hiukkassäteilyn tai asiakasvirtojen mallintamiseen. Jakauman tiheysfunktio (vakiolla  $\lambda > 0$ ) on

$$f_{\lambda}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{kun } x \geq 0, \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Satunnaismuuttuja  $X$  noudattaa tätä jakaumaa. Määritä todennäköisyys  $P(X \geq 7)$ , joka riippuu vakiosta  $\lambda$ .

Todennäköisyys saadaan integroimalla tiheysfunktioita.  $P(x \geq 7) = 1 - P(x < 7)$ . Koska tiheysfunktio on nolla kaikille  $x < 0$ , todennäköisyys alkaa kertyä vasta kohdasta  $x=0$  eteenpäin. Kysytty todennäköisyys on

$$1 - \int_0^7 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$e^{-7 \cdot \lambda}$$

## B2-osa

**i** Vastaa kahteen tehtävään.

## 11. Oikein vai väärin? 12 p.

1. Olivia derivoi funktion  $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{10}$  seuraavasti:

$$f'(x) = \frac{10D(x^3 - 2x + 1) - (D10)(x^3 - 2x + 1)}{10^2} = \frac{10D(x^3 - 2x + 1)}{10^2} = \frac{3x^2 - 2}{10}.$$

Onko päättely oikein vai väärin? Korjaa mahdolliset virheet. Johda lopputulos myös jollakin yksinkertaisemmalla tavalla. (4 p.)

2. Leo selvittää seuraavasti, kuinka moneen nollaan luku  $2000! - 10^{300}$  päättyy:

Kertomassa kerrotaan peräkkäisiä lukuja ykkösestä alkaen, joten luvun perään saadaan nolla aina, kun tulee vastaan kymmenen. Kymmenellä jaollisia lukuja on tulossa  $\frac{2000}{10} = 200$ . Lisäksi nolla tulee luvun perään, jos tulon tekijöinä on kahdella jaollinen luku ja viidellä jaollinen luku. Kahdella jaollisia lukuja on niin tiheässä, että riittää tarkastella viidellä jaollisia. Niitä on  $\frac{2000}{5} = 400$ . Yhteensä ensimmäisessä luvussa on siis  $200 + 400 = 600$  nollaa. Toisessa luvussa on 300 nollaa. Erotuksessa on siten  $600 - 300 = 300$  nollaa.

Tämän jälkeen Leo tarkisti laskimella, ja laskin antoi tulokseksi 5736-numeroisen luvun, joka päättyi 300 nollaan. Tästä hän totesi päätelleensä oikein.

Onko päättely oikein vai väärin? Korjaa mahdolliset virheet. (8 p.)

1. Olivian lasku on aivan oikein, mutta laskettu osamäärän derivointikaavalla. Kyseessä ei kuitenkaan ole rationaalifunktio, joten helpompaa on laskea derivaatta suoraan potenssifunktion derivointisäännöllä:

$$f'(x) = \frac{1}{10} (3x^2 - 2) = \frac{3x^2 - 2}{10}.$$

2. Leon perustelu on monin osin virheellinen. Esimerkiksi

- a) Nollien lukumäärää ei voi päätellä vähentämällä luvut toisistaan. Pitää tutkia kummassa luvussa on vähemmän nollia.
- b) Numeerinen vastaus laskimella ei oikeuta johtopäätöksiä.
- c) Kaikki kymmenellä jaolliset luvut ovat jaollisia myös kahdella ja viidellä, joten ne tulevat laskettua jo tarkasteltujen viidellä jaollisten lukujen mukana.
- d) Viiden monikerrat tulevat lasketuksi kahdesti.
- e) Kahdella jaollisia lukuja ei voi rajata tutkimuksen ulkopuolelle.

Virheiden korjaus: Jälkimmäisessä luvussa on 300 nollaa. Ensimmäisessä luvussa on viidellä jaollisia tulontekijöitä  $\frac{2000}{5}=400$ , joista kymmenellä jaollisia on  $\frac{2000}{10}=200$ . Siis viidellä, mutta ei kymmenellä, jaollisia tulontekijöitä on 199. Kahdella jaollisia lukuja on joka toinen.

Jos tulontekijä on sekä kahdella että viidellä jaollinen, mutta ei sisällä kymmenen monikertaa, niin niiden tulo on kymmenellä jaollinen ja lisää yhden nollan luvun perään. Tällaisia lukupareja ovat esimerkiksi  $2*5$ ,  $4*5$ ,  $6*5$ ,  $8*5$ ,  $12*5$ ,  $14*5$ , ...,  $2*15$ ,  $4*15$ ,  $6*15$ ,  $8*15$ ,  $12*15$ ,  $14*15$ , ...,  $2*25$ ,  $4*25$ ,  $6*25$ , ...

$2000!$  on paljon yli 400 nollaa. Erotuksen nollien määrä on vähemmän nollia sisältävän luvun nollien määrä eli 300.

## 12. Arvioitava integraali 12 p.

Olkoon  $n \geq 0$  kokonaisluku. Todista epäyhtälö

$$\int_0^1 \sin(\pi x) (x(1+x)(1-x))^n dx \leq \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{2}{3\sqrt{3}} \right)^n.$$

Vihje: Jos  $f(x) \leq g(x)$  välillä  $[0, 1]$ , niin  $\int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 g(x) dx$ .

Tutkitaan arvioitavaa integraalia osissa.

$$\int_0^1 \sin(\pi x) dx$$

$$\frac{2}{\pi}$$

Etsitään funktion  $x(1+x)(1-x)$  suurin arvo integroimisvälillä

$$f_{\max}(x(1+x)(1-x), x) \mid 0 \leq x \leq 1$$

$$\left\{ \text{MaxValue} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{9}, x = \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

Funktio  $x(1+x)(1-x)$  saa siis integroimisvälillä aina korkeintaan arvon  $\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{9}$ . Voidaan arvioida

$$\int_0^1 \sin(\pi x) (x(1+x)(1-x))^n dx \leq \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{9} \right)^n = \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{2 \cdot 3}{9 \sqrt{3}} \right)^n = \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{2}{3 \sqrt{3}} \right)^n.$$

**13. Vektorien ristitulo** 12 p.

Vektorien  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$  ja  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  ristitulo määritellään lausekkeella

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}.$$

Todista tätä lauseketta käyttäen seuraavat ristitulovektorin tunnetut ominaisuudet:

1. Se on kohtisuorassa vektoria  $\vec{a}$  vastaan. (3 p.)
2. Sen pituus on sama kuin vektorien  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$  virittämän suunnikkaan ala. (9 p.)

1. Vektori on kohtisuorassa toista vektoria vastaan, jos ja vain jos niiden pistetulo on 0. Merkitään komponentteja  $a_x = a(x)$ ,  $a_y = a(y)$ , jne. Vektoreiden  $a$  ja  $b$  ristitulovektori on

$$\text{crossp} \left( \begin{bmatrix} a(x) \\ a(y) \\ a(z) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b(x) \\ b(y) \\ b(z) \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} a(y) \cdot b(z) - a(z) \cdot b(y) \\ -a(x) \cdot b(z) + a(z) \cdot b(x) \\ a(x) \cdot b(y) - a(y) \cdot b(x) \end{bmatrix}$$

Ristitulovektorin pistetulo vektorin  $a$  kanssa on

$$\text{simplify}(\text{dotp} \left( \begin{bmatrix} a(y) \cdot b(z) - a(z) \cdot b(y) \\ -a(x) \cdot b(z) + a(z) \cdot b(x) \\ a(x) \cdot b(y) - a(y) \cdot b(x) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a(x) \\ a(y) \\ a(z) \end{bmatrix} \right))$$

0

Ristitulovektori on siis kohtisuorassa vektoria  $a$  vastaan.

2. Vektorin pituuden kaavassa on neliöjuuri, joten laskujen yksinkertaistamiseksi tutkitaan sen toista potenssia. Nyt ristitulovektorin pituuden neliö pitää siis olla suunnikkaan pinta-alan neliö (sekä pituus että pinta-ala ovat epänegatiivisia lukuja, joten toiseenkorotus ei ole ongelma). Ristitulovektorin pituuden neliö on

$$\begin{aligned} & ((a(x) \cdot b(z) - a(z) \cdot b(x)))^2 + ((a(x) \cdot b(y) - a(y) \cdot b(x)))^2 + ((a(y) \cdot b(z) - a(z) \cdot b(y)))^2 \\ & \quad (a(x) \cdot b(y) - a(y) \cdot b(x))^2 + (a(x) \cdot b(z) - a(z) \cdot b(x))^2 + (a(y) \cdot b(z) - a(z) \cdot b(y))^2 \\ & \text{expand(ans)} \\ & (a(x))^2 \cdot (b(y))^2 + (a(x))^2 \cdot (b(z))^2 + (a(y))^2 \cdot (b(x))^2 + (a(y))^2 \cdot (b(z))^2 + (a(z))^2 \cdot \end{aligned}$$

Siirretään vastaus useammalle riville selkeyden vuoksi (1)

$$\begin{aligned} & (a(x))^2 \cdot (b(y))^2 + (a(x))^2 \cdot (b(z))^2 + (a(y))^2 \cdot (b(x))^2 \\ & + (a(y))^2 \cdot (b(z))^2 + (a(z))^2 \cdot (b(x))^2 + (a(z))^2 \cdot (b(y))^2 \\ & - 2 \cdot a(x) \cdot a(y) \cdot b(x) \cdot b(y) - 2 \cdot a(x) \cdot a(z) \cdot b(x) \cdot b(z) - 2 \cdot a(y) \cdot a(z) \cdot b(y) \cdot b(z) \end{aligned}$$

Toisaalta suunnikkaan pinta-alan neliö saadaan laskemalla

$A(\text{suunnikas})^2 = |a|^2 |b|^2 \sin^2(a, b) = |a|^2 |b|^2 (1 - \cos^2(a, b))$ , missä  $\cos(a, b)$  on vektorien  $a$  ja  $b$  välinen kulma. Vektorien väliselle kulmalle on myös toinen esitys pistetulon ja vektorien pituuksien avulla, joten suunnikkaan pinta-alan neliölle saadaan esitys

$$\begin{aligned} A(\text{suunnikas})^2 &= |a|^2 |b|^2 \left( 1 - \left( \frac{a \cdot b}{|a| |b|} \right)^2 \right) = |a|^2 |b|^2 - \frac{|a|^2 |b|^2 (a \cdot b)^2}{|a|^2 |b|^2} \\ &= |a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2 = (a \cdot a)(b \cdot b) - (a \cdot b)^2 = \\ & \text{dotp} \left( \begin{bmatrix} a(x) \\ a(y) \\ a(z) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a(x) \\ a(y) \\ a(z) \end{bmatrix} \right) * \text{dotp} \left( \begin{bmatrix} b(x) \\ b(y) \\ b(z) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b(x) \\ b(y) \\ b(z) \end{bmatrix} \right) - \left( \text{dotp} \left( \begin{bmatrix} a(x) \\ a(y) \\ a(z) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b(x) \\ b(y) \\ b(z) \end{bmatrix} \right) \right)^2 \\ &= (a(x) \cdot b(x) + a(y) \cdot b(y) + a(z) \cdot b(z))^2 - ((a(x))^2 + (a(y))^2 + (a(z))^2) \cdot ((b(x))^2 + (b(y))^2 + (b(z))^2) \\ & \text{expand(ans)} \\ & (a(x))^2 \cdot (b(y))^2 + (a(x))^2 \cdot (b(z))^2 + (a(y))^2 \cdot (b(x))^2 + (a(y))^2 \cdot (b(z))^2 + (a(z))^2 \cdot \end{aligned}$$

Siirretään vastaus useammalle riville selkeyden vuoksi (2)

$$\begin{aligned} & (a(x))^2 \cdot (b(y))^2 + (a(x))^2 \cdot (b(z))^2 + (a(y))^2 \cdot (b(x))^2 \\ & + (a(y))^2 \cdot (b(z))^2 + (a(z))^2 \cdot (b(x))^2 + (a(z))^2 \cdot (b(y))^2 \\ & - 2 \cdot a(x) \cdot a(y) \cdot b(x) \cdot b(y) - 2 \cdot a(x) \cdot a(z) \cdot b(x) \cdot b(z) - 2 \cdot a(y) \cdot a(z) \cdot b(y) \cdot b(z) \end{aligned}$$

Vertaamalla näitä kahta esitystä (1) ja (2) huomataan, että ne ovat identtiset. Ottamalla neliöjuuri molemmista esityksistä saadaan väite eli ristitulovektorin pituus on suunnikkaan pinta-ala.