

Laske Laudatur Casion avulla

Lyhyt matematiikka,
kevät 2025



Sisältö

Kevään 2025 matematiikan yo-kokeiden ratkaisut työasemalle ladattavan ja Abitista löytyvän ClassPad Managerin avulla laskettuina.

Pepe Palovaara

CASIO®

Fintegrity

FI – Matematiikka, lyhyt oppimäärä

19.3.2025

Koe koostuu 11 tehtävästä, joista vastataan yhdeksään. Tehtävät on jaettu kahteen osaan. A-osassa on kuusi tehtävää, joista vastataan viiteen. B-osassa on viisi tehtävää, joista vastataan neljään. Tehtävät 1–9 arvostellaan pistein 0–12, ja tehtävät 10 ja 11 pistein 0–18. Kokeen maksimipistemäärä on 120 ja sen voi saavuttaa vain, jos vastaa tehtäviin 10 ja 11.

A-osassa saat käyttää koejärjestelmän taulukkokirjoja ja perusohjelmia. A-osa palautetaan tehtävän 6 jälkeen olevalla painikkeella. Tämän jälkeen A-osan vastauksia ei voi enää muokata. A-osan palauttamisen jälkeen kaikki koejärjestelmän ohjelmat ovat käytettävissäsi. Voit vastata B-osan tehtäviin myös ennen A-osan palauttamista.

Halutessasi voit tuottaa vastausten tueksi piirroksia, kaavioita tai taulukoita ja liittää niistä kuvakaappauksen mihin tahansa tekstivastaukseen.

Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

A-osa

 Vastaa viiteen tehtävään.

1. Lyhyitä tehtäviä 12 p.

Anna tässä tehtävässä pelkkä vastaus ilman perusteluja. Vastauslaatikkoon voi kirjoittaa vain yhden kokonaisluvun.

1.1 Ratkaise yhtälö $5x - 17 = 43$. 2 p.

$x =$

1.2 Mikä on lausekkeen $-7x^2 + 2x(4x - 1)$ arvo kohdassa $x = 2$? 2 p.

1.3 Mikä on pisteiden $(-2, -2)$ ja $(1, 4)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin? 2 p.

1.4 Mikä on edellisen osatehtävän suoran vakiotermi? 2 p.

Suoran yhtälö on
 $y - 4 = [(4 - (-2)) / (1 - (-2))] * (x - 1)$
eli ratkaistussa muodossa
 $y = 2x + 2$

1.5 Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat koordinaatiston pisteissä $(1, 1)$ ja $(5, 1)$. Mikä on huippukulman x -koordinaatti? 2 p.

1.6 Mikä luku saadaan, kun ensimmäiset 50 positiivista paritonta kokonaislukua lasketaan yhteen, eli kuinka paljon on $1 + 3 + \dots + 97 + 99$? 2 p.

2. Yhtälö ja lukujono 12 p.

1. Ratkaise yhtälö $(x + 3)(2x - 1) = 4$. (6 p.)

2. Aritmeettisen lukujonon ensimmäinen jäsen on 2025 ja viides jäsen on 1973. Mikä on lukujonon sadas jäsen? (6 p.)

$$1. \quad 2x^2 + 5x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{4} = \frac{-5 \pm 9}{4} = \begin{cases} 1 \\ -7 \end{cases}$$

$$2. \quad a_5 = (5 - 1) \cdot d + a_1 \Leftrightarrow 1973 = 4 \cdot d + 2025 \Leftrightarrow d = -13, \text{ jolloin } a_{100} = (100 - 1) \cdot (-13) + 2025 = 738$$

3. Kokouspalkkio 12 p.

Järjestön luottamushenkilöiden kokouspalkkioita on korotettu viimeksi vuonna 2009. Vuonna 2023 järjestö päättää korottaa kokouspalkkiotaan 30 eurosta 40 euroon. Ansiotasoindeksi oli 2 717 vuonna 2009 ja 3 667 vuonna 2023. Ylittääkö luottamushenkilöiden ansiokehitys tämän jälkeen yleisen ansiokehityksen? Kuinka suuri uuden kokouspalkkion pitäisi olla, jotta korotus noudattaisi yleistä ansiokehitystä?

Lasketaan, kuinka suuri kokouspalkkion pitäisi olla yleisen seuratakseen yleistä ansiokehitystasoa:

$$\frac{3667}{2717} \cdot 30 \approx 40,49\text{€} \text{ Siispä korotus 40 euroon ei ylitä yleistä ansiokehitystä.}$$

4. Yhtälötyyppejä 12 p.

Lukiomatematiikassa on tärkeää osata erottaa *potenssiyhtälöt* ja *eksponenttiyhtälöt* toisistaan. Yksinkertaistettu potenssiyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $x^n = t$ ja yksinkertaistettu eksponenttiyhtälö muodossa $a^x = b$. Molemmissa esimerkkiyhtälöissä tuntematon muuttuja on x .

1. Anna esimerkki yksinkertaistettua muotoa olevasta potenssiyhtälöstä, jossa $n \geq 2$ ja $t \neq 0$ ja jolla on vain yksi ratkaisu. Ratkaise myös yhtälösi. (6 p.)

2. Anna esimerkki yksinkertaistettua muotoa olevasta eksponenttiyhtälöstä, jossa $a > 1$ ja $b > 0$. Ratkaise myös yhtälösi. (6 p.)

$$1. \quad x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ toteuttaa annetut ehdot, sillä } n = 3 \geq 2 \text{ ja } t = 1 \neq 0 \text{ ja yhtälöllä on vain yksi ratkaisu } x = 1.$$

$$2. \quad 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ toteuttaa annetut ehdot, sillä } a = 2 > 1 \text{ ja } b = 1 > 0 \text{ ja yhtälön ainoa juuri on } x = 0.$$

5. Pickin lause 12 p.

Aineisto

5.A Kuva: Tasokuvio A

5.B Kuva: Tasokuvio B

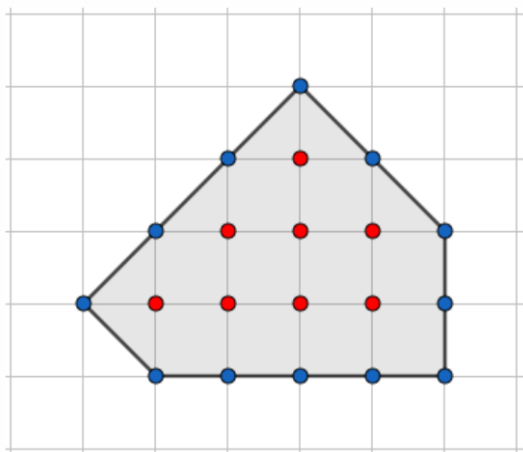
Pickin lause vuodelta 1899 liittyy tasogeometriaan ja monikulmioiden pinta-aloihin. Monikulmio on piirretty ruudukkoon niin, että sen kaikki kärkipisteet sijaitsevat viivojen risteyskohdissa eli hilapisteissä. Lauseen mukaan tietyntyyppisten monikulmioiden pinta-ala voidaan tällöin laskea kaavalla

$$(*) \quad A = S + \frac{R}{2} - 1,$$

jossa A on monikulmion pinta-ala ruutuina, S on monikulmion sisälle jäävien hilapisteiden lukumäärä ja R on monikulmion reunalla olevien hilapisteiden lukumäärä.

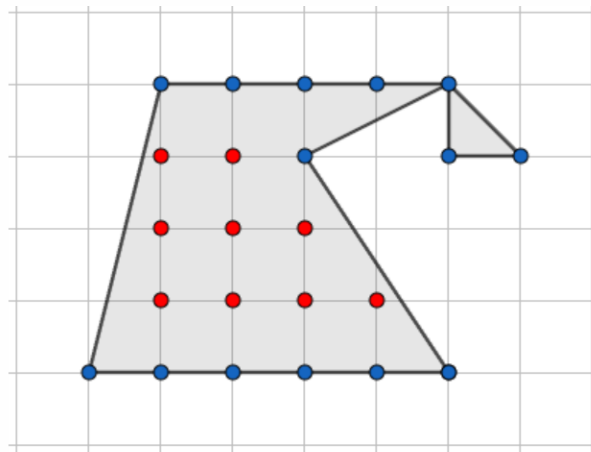
Laske kuvioiden pinta-alat ja osoita, että kaava $(*)$ pitää paikkansa tasokuvion 5.A tapauksessa, mutta ei pidä paikkaansa tasokuvion 5.B tapauksessa.

5.A Kuva: Tasokuvio A



Lähde: YTL.

5.B Kuva: Tasokuvio B



Lähde: YTL.

Sovelletaan Pickin lausetta molempiin tasokuvioihin, jolloin niiden pinta-aloiksi saadaan

A: $S + \frac{R}{2} - 1 = 8 + \frac{12}{2} - 1 = 13$ ruutua ja B: $S + \frac{R}{2} - 1 = 9 + \frac{14}{2} - 1 = 15$ ruutua.

Jaetaan tasokuvio A kolmeen osaan (vasen kolmio, yläosan kolmio ja suorakulmio), jolloin sen pinta-alaksi saadaan laskettua

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 13 \text{ ruutua. Pickin lause tuotti saman tuloksen.}$$

Jaetaan tasokuvio B viiteen osaan (vasen ja oikea kolmio, yläosan kolmio, erillinen kolmio ja suorakulmio). Pinta-ala on

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 14\frac{1}{2} \text{ ruutua, mikä ei vastaa Pickin lauseen tulosta.}$$

6. Klassikko 12 p.

Määritä esimerkiksi derivaatan avulla polynomifunktion $p(x) = x^3 - x^2 + x$ suurin ja pienin arvo, kun $1 \leq x \leq 2$.

Polynomifunktiona $p(x)$ on kaikkialla jatkuva ja derivoituva ja se saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetulla välillä joko välin päätepisteissä tai välille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa. Lasketaan derivaatta ja sen nollakohdat:

$$p'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{6}$$
 ei ratkea, sillä diskriminantti on negatiivinen. Derivaatalla ei siis ole

nollakohtia lainkaan. Koska derivaatan kuvaaja on ylöspäin avautuva paraabeli eikä sillä ole nollakohtia, on derivaatta koko ajan positiivinen ja itse funktio aidosti kasvava. Niinpä pienin arvo löytyy välin alkupisteestä ja suurin arvo loppupisteestä:

$$p(1) = 1^3 - 1^2 + 1 = 1 \text{ (pienin arvo)} \text{ ja } p(2) = 2^3 - 2^2 + 2 = 6 \text{ (suurin arvo).}$$

B-osa

 Vastaa neljään tehtävään.

7. Verrannollisuuksia 12 p.

Täydennä virkkeet. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 1–2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p. Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluakaan jättää tehtävää arvosteltavaksi, poista vastauksesi valitsemalla pudotusvalikosta tyhjä rivi.

7.1 Täydennä virkkeet. 3 p.

Nopeus ^{1p.} aikaan, kun matka on vakio. Jos auto kulkee tietyn matkan 2 tunnissa nopeudella 75 km/h, niin se kulkee saman matkan 1,5 tunnissa nopeudella ^{2p.} km/h.

7.2 Täydennä virkkeet. 3 p.

Tasasivuisen kolmion sivun pituus ^{1p.} sen pinta-alaan. Erään kolmion korkeus on 3 cm ja pinta-ala 8 cm². Sen kanssa yhdenmuotoisen kolmion korkeus on 9 cm ja pinta-ala ^{2p.} cm².

7.3 Täydennä virkkeet. 3 p.

Tuotteen hinta ^{1p.} siitä maksettavaan arvonlisäveroon. Jos 180 euroa maksavasta tuotteesta maksetaan 22,11 euroa arvonlisäveroa, niin ^{2p.} euroa maksavasta tuotteesta maksetaan 29,48 euroa arvonlisäveroa.

7.4 Täydennä virkkeet. 3 p.

Muuttujien X ja Y tulo XY on vakio, joten muuttujat X ja Y ^{1p.}. Tiedetään, että kun $X = 5$, niin $Y = 7$. Tällöin $X = 10$, kun $Y =$ ^{2p.}.

8. Superkuu 12 p.

Kun Kuu on täydenkuun aikaan lähellä kiertorataansa Maata lähimpänä olevaa kohtaa (perigeum), sitä kutsutaan superkuuksi. Tämän vuosisadan suurin superkuu nähdään 6.12.2052, jolloin Kuun keskipisteen etäisyys Maan pinnalta on noin 350 000 kilometriä. Vastaava etäisyys Kuun kiertoradan kauimpana olevaan kohtaan (apogeum) on noin 401 000 kilometriä. Kuinka monta prosenttia suuremmassa kulmassa Kuu näkyy 6.12.2052 verrattuna pienimpään mahdolliseen kulmaan? Kuun säde on 1 737 kilometriä.

Katselu perigeumin aikana on asteina

$$2\alpha = 2 \tan^{-1} \left(\frac{1737}{350000} \right)$$

$$2 \cdot \alpha = 0.5686968683$$

ja apogeumin aikana

$$2\beta = 2 \tan^{-1} \left(\frac{1737}{401000} \right)$$

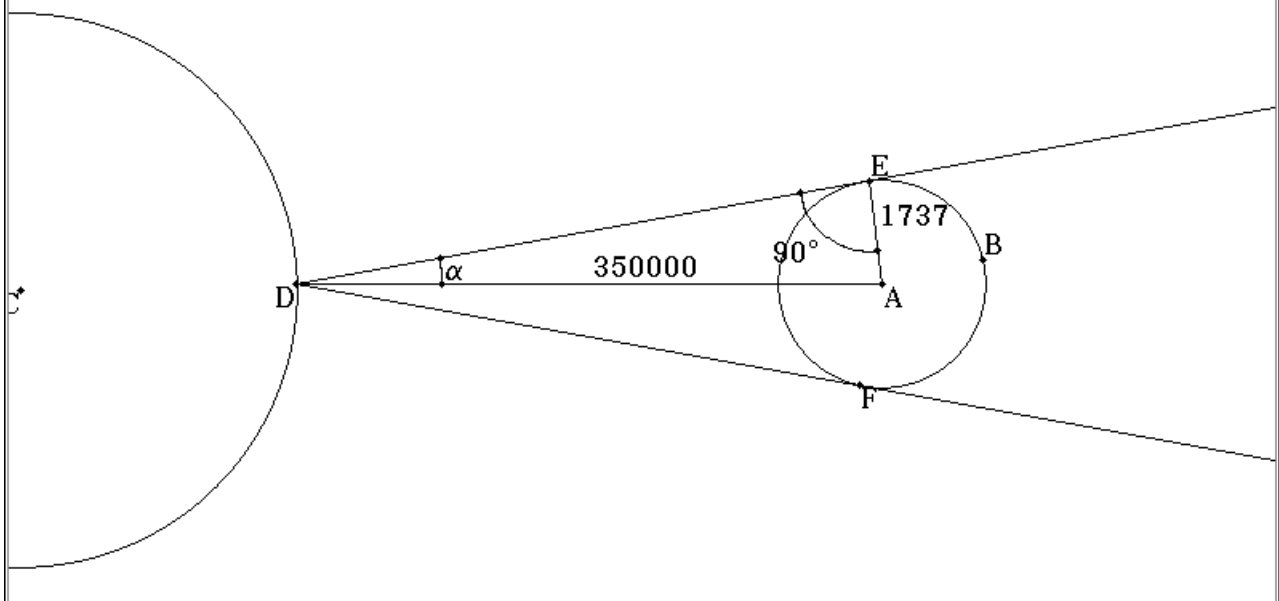
$$2 \cdot \beta = 0.4963698083$$

Lasketaan, kuinka moninkertainen suurempi kulma on pienempään verrattuna:

$$\frac{2 \tan^{-1} \left(\frac{1737}{350000} \right)}{2 \tan^{-1} \left(\frac{1737}{401000} \right)}$$

$$1.145712045$$

Superkuun aikana kuu näkyy n. 14,7% suuremmassa kulmassa maasta katsottuna.



9. Sähkösopimukset 12 p.

Aineisto

9.A Taulukko: Sähkönkulutus ja pörssisähkön hinta

Viima on hankkimassa uutta sähkösopimusta. Eräs sähköyhtiö tarjoaa seuraavia sopimuksia:

A. kiinteähintainen: 9,80 snt/kWh + 5,99 e/kk

B. kiinteähintainen, jossa huomioidaan käyttövaikutus: 8,99 snt/kWh + käyttövaikutus + 3,99 e/kk.

Sähkösopimuksessa B esiintyvä käyttövaikutus (yksikkönä snt/kWh) lasketaan kuukausittain kaavalla $\frac{X}{Y} - Z$. Tässä X lasketaan kuukauden ajalta tuntikohtaisten sähkönkulutusten s_k ja tuntikohtaisten pörssisähkön hintojen h_k avulla kaavalla

$$X = s_1 h_1 + s_2 h_2 + \dots + s_{720} h_{720}.$$

Nimittäjä Y on kuukauden kokonaissähkönkulutus ja Z on tuntikohtaisten pörssisähkön hintojen h_k keskiarvo kuukauden ajalta. Käyttövaikutus voi olla myös negatiivinen.

Viima tarkastelee päätöksensä tueksi syyskuun sähkönkulutustaan. Taulukossa 9.A on esitetty syyskuun sähkönkulutus tunneittain sekä tunteja vastaavat pörssisähkön hinnat. Taulukossa otsikkoa seuraavalla rivillä esiintyvät siis muuttujien s_1 ja h_1 arvot, sitä seuraavalla s_2 ja h_2 ja niin edelleen.

Kummalla sopimuksella Viiman syyskuun sähkölasku olisi ollut pienempi?

Lasketaan kiinteää sopimusta varten perusmaksu + 0,098€/kWh*kulutus päivittäin, jolloin kiinteän sopimuksen hinnaksi syyskuulta saadaan n. 57,48€. Laskut näkyvät korostetun solun osalta ruudunkaappauksen alareunan laskurivillä.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Tunnit	Sähkönkulutus k ...	Pörssisähkön ...	Tulo	Kiinteä	Käyttövaikutuksellinen		
2	1	0.65	11.66344	7.58124	57.4831	X	2502.01	
3	2	0.65	2.50356	1.62731		Y	525.44	
4	3	0.42	2.45272	1.03014		Z	4.08453	
5	4	0.33	2.35228	0.77625		Vaikutus	0.67722	
6	5	0.43	2.34112	1.00668		Hinta	54.7854	
7	6	0.39	3.40628	1.32845				
8	7	0.46	9.30744	4.28142				
9	8	0.6	13.89916	8.33950				
10	9	0.84	18.95464	15.9219				
11	10	0.63	24.7938	15.6201				
12	11	0.31	19.94168	6.18192				
13	12	0.29	21.1854	6.14377				
14	13	0.45	14.88	6.696				
15	14	0.42	11.41048	4.79240				
16	15	0.7	11.0236	7.71652				
=5.99+0.098*sum(B2:B721)								

Lasketaan käyttövaikutussopimusta varten jokaista tuntia ja kulutusta vastaava pörssisähkön hinta sarakkeeseen D:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Tunnit	Sähkönkulutus k ...	Pörssisähkön ...	Tulo	Kiinteä	Käyttövaikutuksellinen		
2	1	0.65	11.66344	7.58124	57.4831	X	2502.01	
3	2	0.65	2.50356	1.62731		Y	525.44	
4	3	0.42	2.45272	1.03014		Z	4.08453	
5	4	0.33	2.35228	0.77625		Vaikutus	0.67722	
6	5	0.43	2.34112	1.00668		Hinta	54.7854	
7	6	0.39	3.40628	1.32845				
8	7	0.46	9.30744	4.28142				
9	8	0.6	13.89916	8.33950				
10	9	0.84	18.95464	15.9219				
11	10	0.63	24.7938	15.6201				
12	11	0.31	19.94168	6.18192				
13	12	0.29	21.1854	6.14377				
14	13	0.45	14.88	6.696				
15	14	0.42	11.41048	4.79240				
16	15	0.7	11.0236	7.71652				

=B2•C2

Seuraavaksi lasketaan käyttövaikutuksen laskemiseen tarvittavat X (yllä D-sarakkeeseen laskettujen kulujen summa komennolla "sum")

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Tunnit	Sähkönkulutus k ...	Pörssisähkön ...	Tulo	Kiinteä	Käyttövaikutuksellinen		
2	1	0.65	11.66344	7.58124	57.4831	X	2502.01	
3	2	0.65	2.50356	1.62731		Y	525.44	
4	3	0.42	2.45272	1.03014		Z	4.08453	
5	4	0.33	2.35228	0.77625		Vaikutus	0.67722	
6	5	0.43	2.34112	1.00668		Hinta	54.7854	
7	6	0.39	3.40628	1.32845				
8	7	0.46	9.30744	4.28142				
9	8	0.6	13.89916	8.33950				
10	9	0.84	18.95464	15.9219				
11	10	0.63	24.7938	15.6201				
12	11	0.31	19.94168	6.18192				
13	12	0.29	21.1854	6.14377				
14	13	0.45	14.88	6.696				
15	14	0.42	11.41048	4.79240				
16	15	0.7	11.0236	7.71652				

=sum(D2:D721)

Y (sähkönkulutus kaikkiaan komennolla "sum"),

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Tunnit	Sähkönkulutus k ...	Pörssisähkön ...	Tulo	Kiinteä	Käyttövaikutuksellinen		
2	1	0.65	11.66344	7.58124	57.4831	X	2502.01	
3	2	0.65	2.50356	1.62731		Y	525.44	
4	3	0.42	2.45272	1.03014		Z	4.08453	
5	4	0.33	2.35228	0.77625		Vaikutus	0.67722	
6	5	0.43	2.34112	1.00668		Hinta	54.7854	
7	6	0.39	3.40628	1.32845				
8	7	0.46	9.30744	4.28142				
9	8	0.6	13.89916	8.33950				
10	9	0.84	18.95464	15.9219				
11	10	0.63	24.7938	15.6201				
12	11	0.31	19.94168	6.18192				
13	12	0.29	21.1854	6.14377				
14	13	0.45	14.88	6.696				
15	14	0.42	11.41048	4.79240				
16	15	0.7	11.0236	7.71652				
=sum(B2:B721)								

ja Z (pörssisähkön keskituntihinta komennolla "mean").

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Tunnit	Sähkönkulutus k ...	Pörssisähkön ...	Tulo	Kiinteä	Käyttövaikutuksellinen		
2	1	0.65	11.66344	7.58124	57.4831	X	2502.01	
3	2	0.65	2.50356	1.62731		Y	525.44	
4	3	0.42	2.45272	1.03014		Z	4.08453	
5	4	0.33	2.35228	0.77625		Vaikutus	0.67722	
6	5	0.43	2.34112	1.00668		Hinta	54.7854	
7	6	0.39	3.40628	1.32845				
8	7	0.46	9.30744	4.28142				
9	8	0.6	13.89916	8.33950				
10	9	0.84	18.95464	15.9219				
11	10	0.63	24.7938	15.6201				
12	11	0.31	19.94168	6.18192				
13	12	0.29	21.1854	6.14377				
14	13	0.45	14.88	6.696				
15	14	0.42	11.41048	4.79240				
16	15	0.7	11.0236	7.71652				
=mean(C2:C721)								

Sovelletaan saatuja lukuja käyttövaikutuksen kaavaan ja lasketaan se soluun G5

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Tunnit	Sähkönkulutus k ...	Pörssisähkön ...	Tulo	Kiinteä	Käyttövaikutuksellinen		
2	1	0.65	11.66344	7.58124	57.4831	X	2502.01	
3	2	0.65	2.50356	1.62731		Y	525.44	
4	3	0.42	2.45272	1.03014		Z	4.08453	
5	4	0.33	2.35228	0.77625		Vaikutus	0.67722	
6	5	0.43	2.34112	1.00668		Hinta	54.7854	
7	6	0.39	3.40628	1.32845				
8	7	0.46	9.30744	4.28142				
9	8	0.6	13.89916	8.33950				
10	9	0.84	18.95464	15.9219				
11	10	0.63	24.7938	15.6201				
12	11	0.31	19.94168	6.18192				
13	12	0.29	21.1854	6.14377				
14	13	0.45	14.88	6.696				
15	14	0.42	11.41048	4.79240				
16	15	0.7	11.0236	7.71652				
=G2/G3-G4								

Käyttövaikutussopimuksen hinta saadaan perusmaksu + (0,0899€/kWh+käyttövaikutus) * kulutus, jolloin sen hinnaksi syyskuulta saadaan n. 54,79€.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Tunnit	Sähkönkulutus k ...	Pörssisähkön ...	Tulo	Kiinteä	Käyttövaikutuksellinen		
2	1	0.65	11.66344	7.58124	57.4831	X	2502.01	
3	2	0.65	2.50356	1.62731		Y	525.44	
4	3	0.42	2.45272	1.03014		Z	4.08453	
5	4	0.33	2.35228	0.77625		Vaikutus	0.67722	
6	5	0.43	2.34112	1.00668		Hinta	54.7854	
7	6	0.39	3.40628	1.32845				
8	7	0.46	9.30744	4.28142				
9	8	0.6	13.89916	8.33950				
10	9	0.84	18.95464	15.9219				
11	10	0.63	24.7938	15.6201				
12	11	0.31	19.94168	6.18192				
13	12	0.29	21.1854	6.14377				
14	13	0.45	14.88	6.696				
15	14	0.42	11.41048	4.79240				
16	15	0.7	11.0236	7.71652				
=3.99+G3*(0.0899+G5/100)								

Viiman syyskuun sähkölasku olisit ollut 2,69€ pienempi käyttövaikutuksen huomioivalla sopimuksella.

10. Koulutus 18 p.

Aineisto

10.A Kuva: Koulutettujen ihmisten osuus

Yksi kestävän kehityksen tavoitteista (SDG Tavoite 4.1, lyhenne sanoista Sustainable Development Goal) on tarjota riittävä koulutus mahdollisimman monille ihmisille. Eräs tapa arvioida tämän tavoitteen toteutumista on tarkastella niiden 25–29-vuotiaiden ihmisten prosenttiosuutta $p(t)$, jotka ovat opiskelleet vähintään 12 vuotta. Prosenttiosuuden $p(t)$ kehitys on esitetty kuvassa 10.A, jossa aika t on vuosiluku.

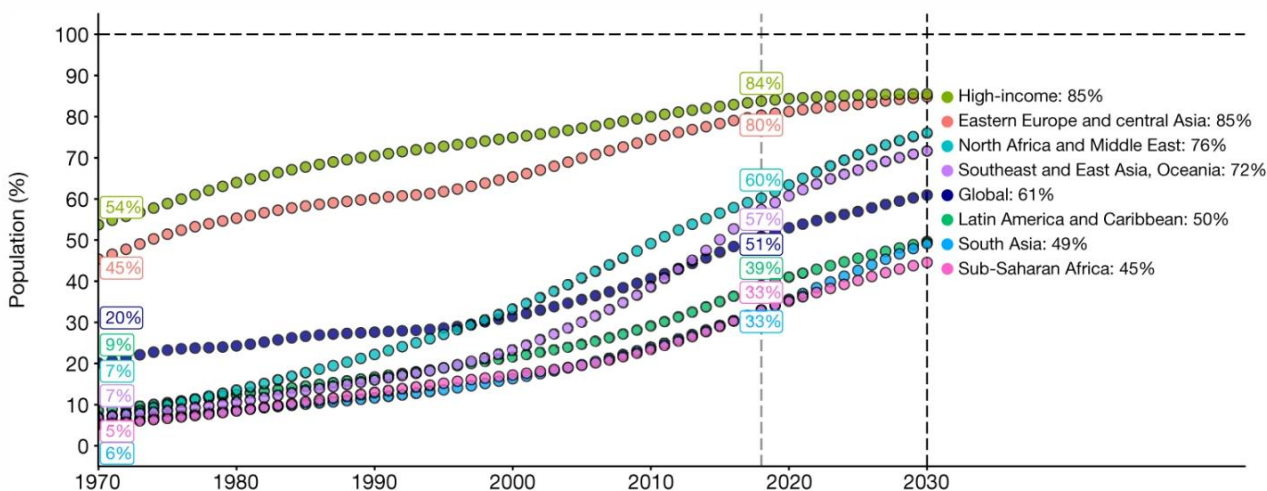
Logistinen malli on eräs tapa ennustaa funktion $p(t)$ arvoja. Sen mukaan

$$p(t_2) = p(t_1) + c p(t_1)(100 - p(t_1))(t_2 - t_1),$$

kun c on malliin liittyvä vakio.

1. Mallinnetaan ensin korkean tulotason maiden koulutettujen osuutta. Määritä vakion c arvo niin, että alkuarvolla $p(1970) = 54$ logistinen malli antaa tulokseksi $p(2018) = 84$. Nämä luvut on poimittu kuvan 10.A käyrästä, jonka otsikko on "High-income". (4 p.)
2. Koko maailman tapauksessa saadaan aikaväliä 1970–2018 käyttämällä vakion arvoksi $c = 0,000404$. Kuvassa 10.A tämä vastaa käyrää, jonka otsikko on "Global". Laske logistisen mallin mukainen vuoden 2030 prosenttiosuuden ennuste käyttämällä vain yhtä aikaväliä 2018–2030 ja kuvasta 10.A poimittua alkuarvoa. Miten hyvin tulos vastaa kuvan 10.A mukaista ennustetta vuodelle 2030? (6 p.)
3. Minä vuonna osatehtävän 10.2 logistisen mallin mukaan koko maailman koulutettujen osuus $p(t)$ saavuttaa 75 %:n rajan? Tutki tilannetta taulukoimalla prosenttiosuuden kehitystä vuoden välein alkaen vuodesta 2018. (8 p.)

10.A Kuva: Koulutettujen ihmisten osuus



1. Ratkaistaan mallista c :

$$\text{solve}(p(t_2)=p(t_1)+c \cdot p(t_1) \cdot (100-p(t_1)) \cdot (t_2-t_1), c)$$

$$\left\{ c = \frac{-(p(t_1)-p(t_2))}{(t_1-t_2) \cdot (p(t_1))^2 - 100 \cdot p(t_1)} \right\}$$

Sijoitetaan tehtävän mallin arvot ensin paikoilleen:

$$c = \frac{-(p(t_1)-p(t_2))}{(t_1-t_2) \cdot (p(t_1))^2 - 100 \cdot p(t_1)} \mid p(t_2)=84 \text{ and } p(t_1)=54$$

$$c = \frac{-5}{414 \cdot (t_1-t_2)}$$

Sijoitetaan seuraavaksi aikavälin vuosiluvut:

$$c = \frac{-5}{414 \cdot (t_1-t_2)} \mid t_1=1970 \text{ and } t_2=2018$$

$$c = 0.000251610$$

2. Kuvaajasta luettuna arvo "Global" on $p(2018)=51\%$. Hyödynnetään laskukaavaa

$$p(2030)=p(2018)+0.000404 \cdot p(2018) \cdot (100-p(2018)) \cdot (2030-2018), \text{ jolloin}$$

$$p(2030)=51+0.000404 \cdot 51 \cdot (100-51) \cdot (2030-2018)$$

$$p(2030) = \frac{3944697}{62500}$$

$$\frac{3944697}{62500}$$

$$63.11515200$$

Saadaan siis $p(2030) \approx 63\%$, joka on n. 2 prosenttiyksikön päässä taulukossa ennustetusta arvosta 61% ja suhteellinen virhe on noin 3,5%. Laskettu luku on melko tarkka.

$$(63.11515200-61)/61 \cdot 100$$

$$3.467462295$$

3. Lasketaan vuotuista muutosta koulutettujen osalta mittaavan funktion

$$p(t+1)=p(t)+0.000404 \cdot p(t) \cdot (100-p(t)) \text{ arvoja lukujonon avulla. Lukujonon}$$

mallinnuksesta nähdään, että 75% raja saavutetaan 27. vuotena aloituksen eli vuoden 2018 jälkeen. Tällöin on vuosi 2045.

Recursive Explicit

☒ $a_{n+1}=a_n+4.04E-4 \cdot a_n \cdot (100-a_n)$

$a_1=51$

☐ $b_{n+1}:$ $\square$

$b_1=0$

☐ $c_{n+1}:$ $\square$

$c_1=0$

n	a_n
15.0000	64.7347
16.0000	65.6570
17.0000	66.5679
18.0000	67.4670
19.0000	68.3538
20.0000	69.2277
21.0000	70.0883
22.0000	70.9353
23.0000	71.7682
24.0000	72.5868
25.0000	73.3907
26.0000	74.1796
27.0000	74.9534
28.0000	75.7119
29.0000	76.4548
30.0000	77.1821

Katso aiempien yo-kokeiden ratkaisut ja muut matematiikan tukimateriaalit osoitteesta

www.casio-laskimet.fi



11. Avaruyslentoja, tekstiviestejä ja muuta mielenkiintoista 18 p.

Aineisto

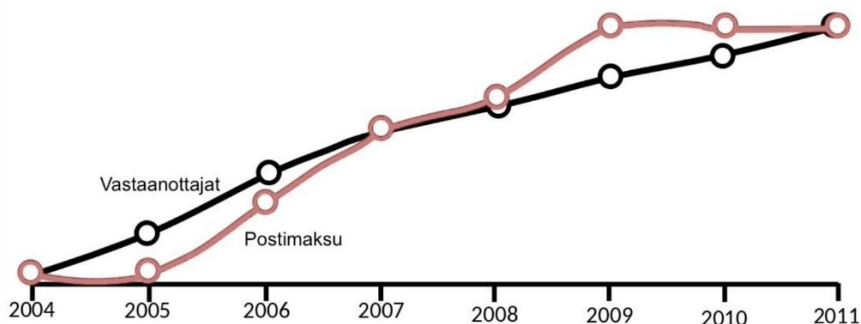
11.A Kuva: Tekstiviestien vastaanottajien lukumäärät ja kirjeiden postimaksut

11.B Kuva: Avaruuslentojen ja sosiologian tohtorintutkintojen lukumäärät

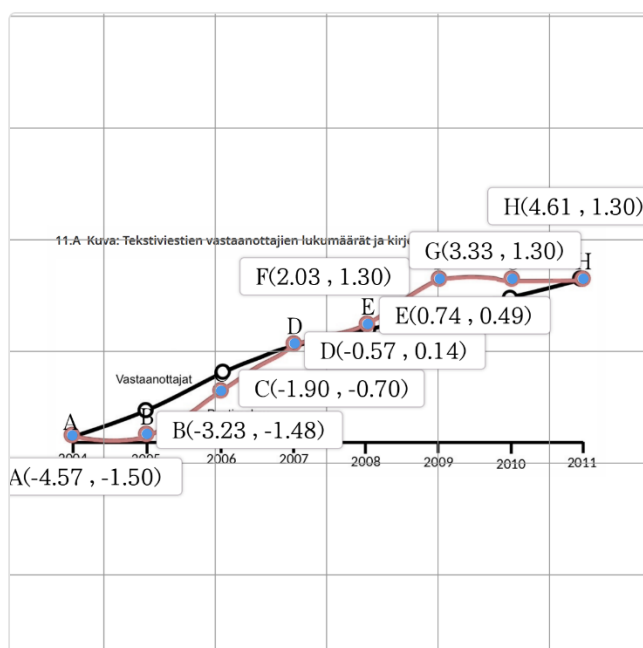
Kuvassa 11.A verrataan kirjeen postimaksua ja tekstiviestin vastaanottamiseen kykenevien yhdysvaltalaisien lukumäärää. Kuvassa 11.B verrataan kaupallisten avaruuslentojen ja sosiologian alan tohtorintutkintojen lukumäärää. Vastaa näiden aineistojen perusteella seuraaviin kysymyksiin. Tarvittaessa voit mitata kuvista lukuarvoja sopivassa ohjelmistossa.

1. Minkä kahden peräkkäisen vuoden välillä kirjeen postimaksu muuttui eniten? (4 p.)
2. Minä vuonna kaupallisten avaruuslentojen lukumäärä on ollut lähimpänä vuosien 1997–2009 keskiarvoa? (8 p.)
3. Miten kuvissa 11.A ja 11.B näkyy muuttujien välinen korrelaatio? Kummassa tapauksessa on perustellumpaa arvioida, että ilmiöiden välillä on syy-seuraussuhde? (6 p.)

11.A Kuva: Tekstiviestien vastaanottajien lukumäärät ja kirjeiden postimaksut



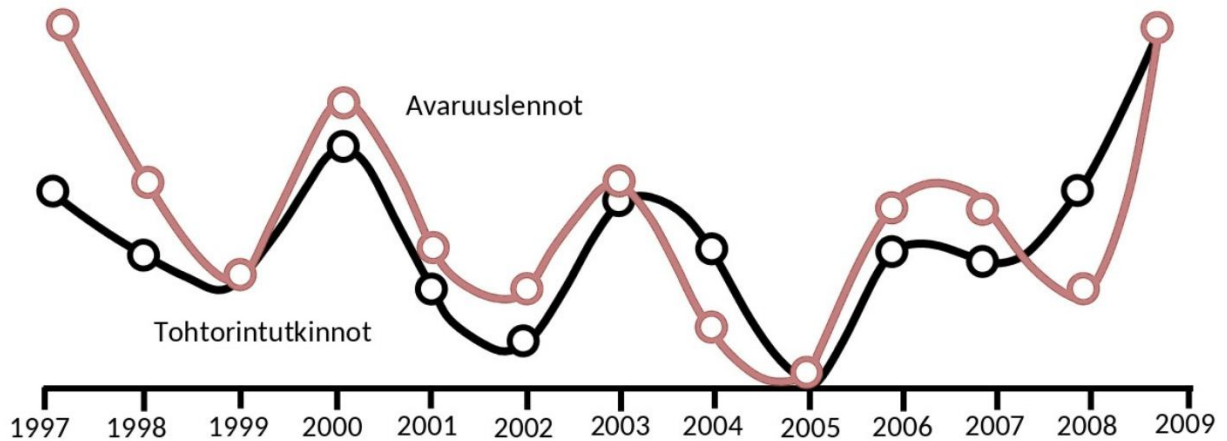
1. Sijoitetaan kuva geometria-sovellukseen ja merkitään mitta-arvoja vastaavat pisteet. Aineisto on tasavälinen, joten riittää tutkia, minkä pisteiden välillä y-akselin suuntainen muutos on suurin.



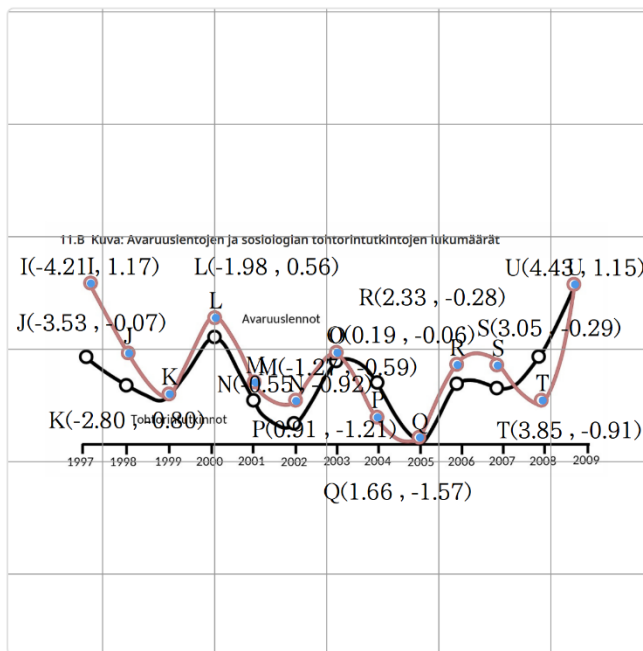
Coordinates	
A	(-4.57 , -1.50)
B	(-3.23 , -1.48)
C	(-1.90 , -0.70)
D	(-0.57 , 0.14)
E	(0.74 , 0.49)
F	(2.03 , 1.30)
G	(3.33 , 1.30)
H	(4.61 , 1.30)

Suurin muutos kirjeiden postimaksuissa näyttää tapahtuneen pisteiden C ja D osoittamien vuosien 2006–2007 aikana.

11.B Kuva: Avaruuslentojen ja sosiologian tohtorintutkintojen lukumäärät

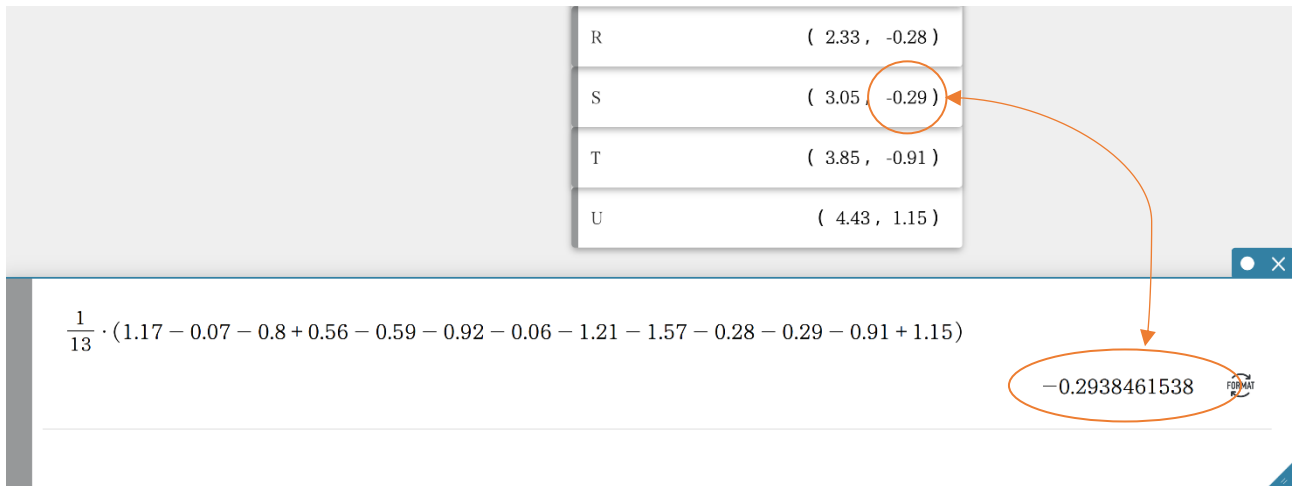


1. Toimitaan kuten kohdassa 1. ja lasketaan tilastoon piirrettyjen pisteiden y-koordinaattien keskiarvo, jota verrataan eri vuosien pisteiden y-koordinaattien arvoihin.



Coordinates

I	(-4.21 , 1.17)
J	(-3.53 , -0.07)
K	(-2.80 , -0.80)
L	(-1.98 , 0.56)
M	(-1.27 , -0.59)
N	(-0.55 , -0.92)
O	(0.19 , -0.06)
P	(0.91 , -1.21)
Q	(1.66 , -1.57)
R	(2.33 , -0.28)
S	(3.05 , -0.29)
T	(3.85 , -0.91)
U	(4.43 , 1.15)



Lähimmäksi keskiarvoa on pisteen S y-koordinaatti. Tämä vastaa vuotta 2007.

Molemmissa kuvaajissa korrelaatio ilmenee siten, että ne muistuttavat toisiaan ja nousevat ja laskevat samaan aikaan ja suunnilleen yhtä paljon.

Syy-seuraussuhde on perustellumpaa tekstiviestien vastaanottajien ja kirjeiden postimaksujen välisessä aineistossa. On hyvinkin mahdollista, että postimaksut nousevat kun kirjeiden määrä tekstiviestien yleistyessä vähenee. Tai kun postimaksut nousevat, niin ihmiset lähettävät enemmän tekstiviestejä.

Mitään riippuvuussuhdetta selittävää tekijää avaruuslentojen ja sosiologian tohtorintutkintojen määrän välillä on sen sijaan hyvin vaikea keksiä.