Casion fx-CG20 ylioppilaskirjoituksissa apuna

Grafiikkalaskin on oivallinen apuväline ongelmien ratkaisun tukena. Sen avulla voi piirtää kuvaajat, ratkaista yhtälöt ja yhtälöryhmät, suorittaa funktioanalyysin ja ratkoa esim. vektoreihin liittyviä laskuja. Tässä ohjeessa on ratkaistu ne tehtävät, joissa graafisesta laskimesta on suuri hyöty.

Natural Textbook Display tarkoittaa sitä, että voit syöttää lausekkeet juuri sen näköisinä kuin ne esiintyvät oppikirjoissa ja kokeissa.

Kommentteja ja vaihtoehtoisia ratkaisutapoja otetaan mielellään vastaan tämän tukimateriaalin kehittämiseksi ja opettajien tukemiseksi! Tätä materiaalia saa hyödyntää omassa opetuksessa ja opiskelijoiden tukemisessa matematiikan opinnoissa.

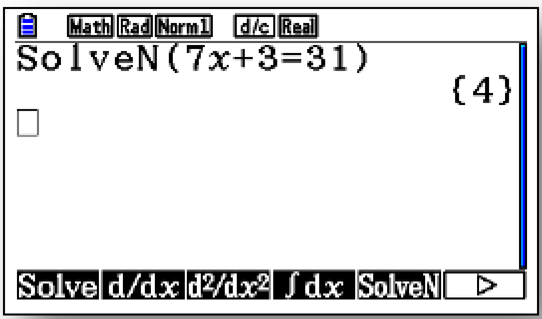
1. a) Ratkaise yhtälö $7x+3=31$.

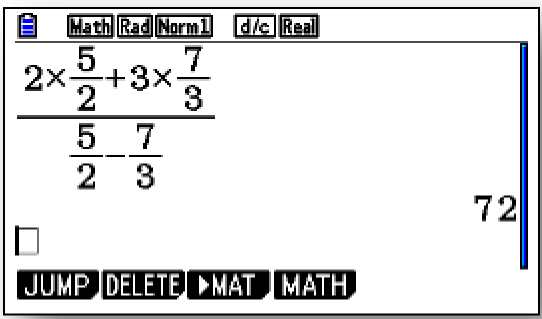
   b) Laske lausekkeen $\dfrac{2a+3b}{a-b}$ arvo, kun $a=\dfrac{5}{2}$ ja $b=\dfrac{7}{3}$.

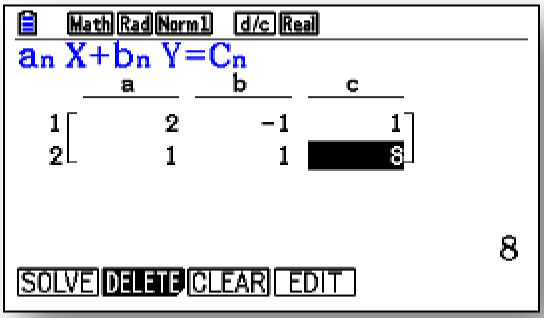
   c) Ratkaise yhtälöpari

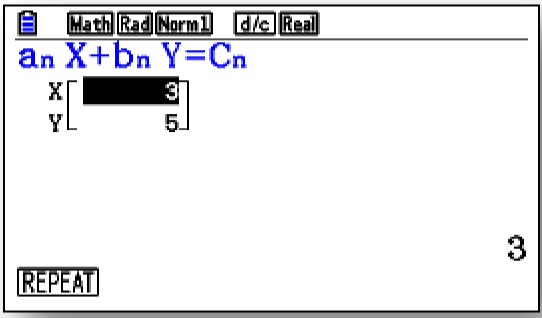
$$\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+y=8. \end{cases}$$

Ratkaisu: Laskimesta vastaukset kaikkiin kohtiin.









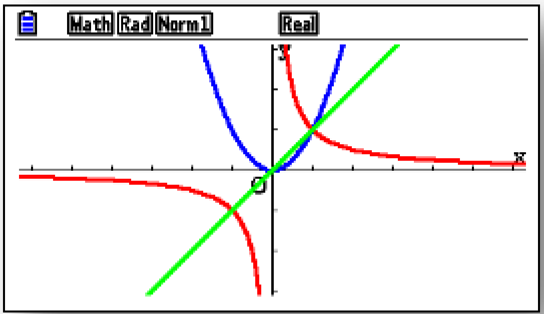
Vastaukset alakohdittain ovat siis

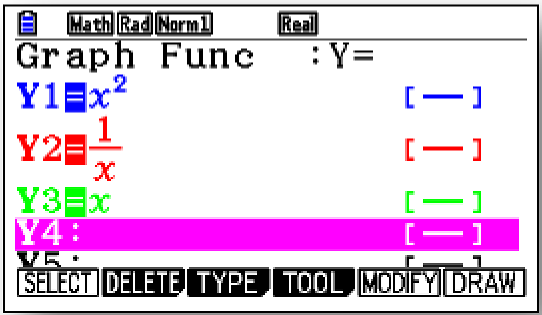
a) $x = 4$ b) 72 c) $x = 3\ ja\ y = 5$

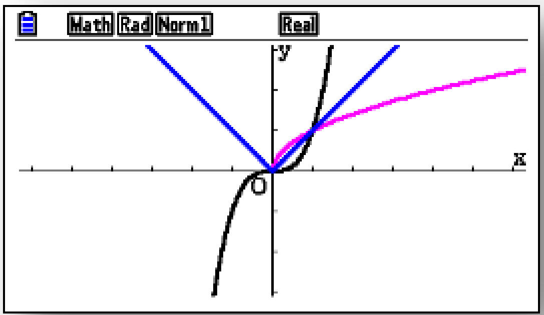
2. Kuvissa 1–6 on oheisessa taulukossa mainittujen funktioiden $y = f(x)$ kuvaajat. Kopioi taulukko vastauspaperiisi ja merkitse siihen, mikä kuvaaja esittää annettua funktiota.

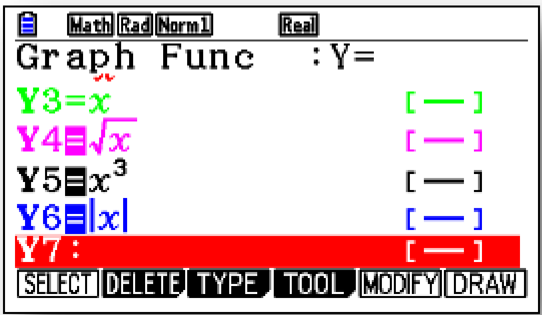
$f(x)$	x^2	$\frac{1}{x}$	x	$\sqrt{x}$	x^3	$\lvert x \rvert$
Kuva						

Ratkaisu: Laskimen grafiikka –sovelluksella voidaan piirtää kaikki kuvaajat. Tässä on piirretty erilaisilla väreillä kuvaajat kolmen ryhmissä ja päätelty oikea rivi 2, 4, 1, 6, 5, 3.





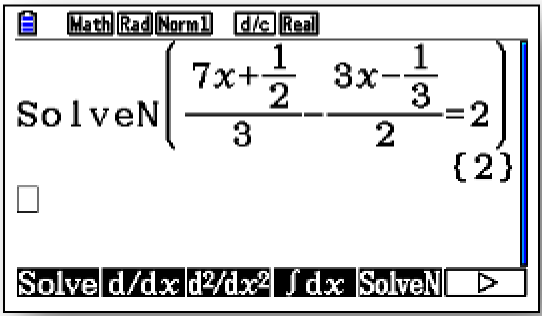


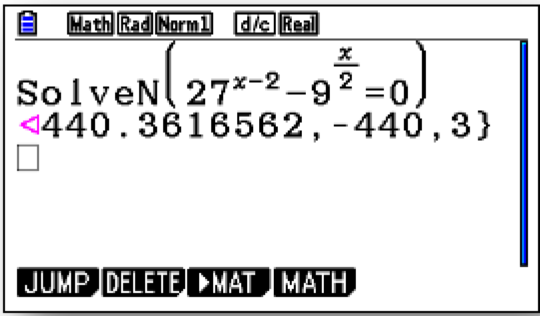


3. **a)** Ratkaise yhtälö $\dfrac{7x+\frac{1}{2}}{3}-\dfrac{3x-\frac{1}{3}}{2}=2.$

b) Ratkaise yhtälö $27^{x-2}=9^{\frac{x}{2}}.$

Ratkaisu: Laskimen SolveN –komento ratkaisee yhtälöt:





Jälkimmäiseen yhtälöön laskin tarjoaa useampaa ratkaisua. Tämä johtuu siitä, että laskentatarkkuuden loppuessa esim. $x=-440$ toteuttaa virheellisesti yhtälön. Oikea ratkaisu b) –kohtaan on kuitenkin $x=3$, mikä selviää sijoittamalla juuri alkuperäiseen yhtälöön. Ratkaisut ovat siis

a) $x=2$ b) $x=3$

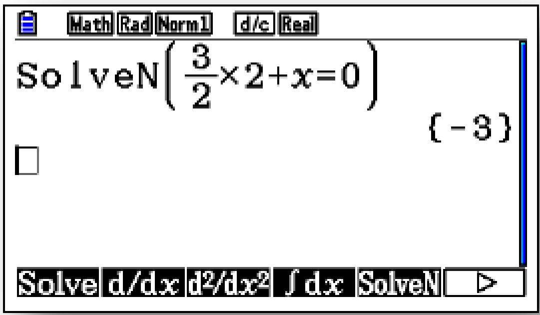
Tiesithän, että ohjelmisto on saatavissa myös tietokoneelle! Voit käyttää projektoria tai älytaulua yhdessä ohjelmiston kanssa luokkahuoneessa havainnollistamaan laskuja opiskelijoille. Lataa kokeiluversio ilmaiseksi osoitteesta http://edu.casio.com

4. **a)** Funktion $f(x)=\frac{3}{2}x+b$ nollakohta on 2. Määritä vakion b arvo.

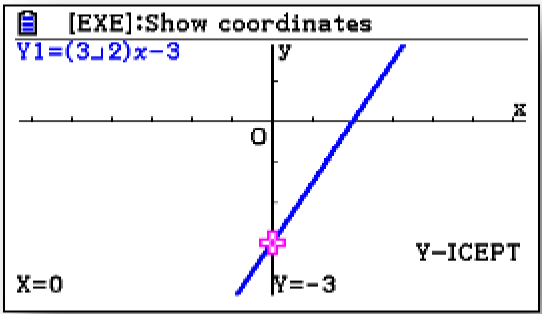
b) Missä pisteessä a-kohdan funktion kuvaaja leikkaa y-akselin?

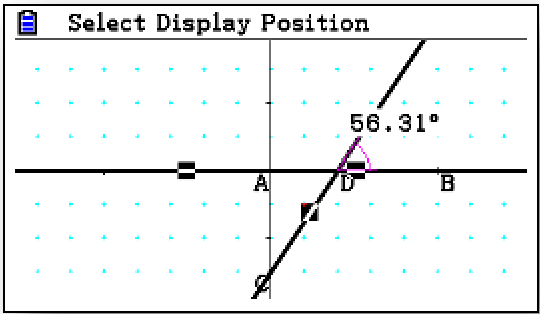
c) Kuinka suuren terävän kulman a-kohdan funktion kuvaaja muodostaa x-akselin kanssa? Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

Ratkaisu: a) –kohtaan voi ratkaisun hakea käsin laskemalla, esim. $f(2)=\frac{3}{2}\cdot 2+b=0$, josta saadaan $b=-3$. Tämän voisi myös laittaa laskimeen käyttämällä muuttujaa x ja yhtälönratkaisinta, mutta se saattaisi aiheuttaa sekaannusta muuttujan x ja parametrin b kesken.



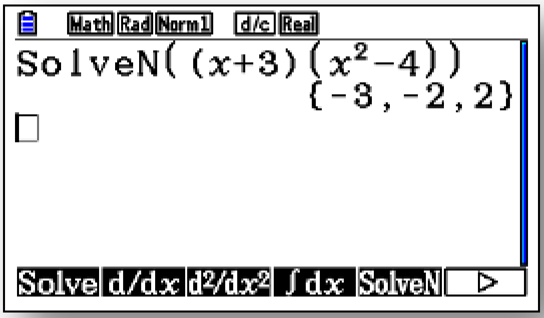
Kuvaajan voi piirtää grafiikka-sovellukseen tai geometria-sovellukseen b) – ja c) –kohtien ratkaisemiseksi. Valmiista ratkaisuvaihtoehdoista löytyy G-Solv -> Y-ICEPT, joka ratkaisee y-akselin ja käyrän leikkauspisteeksi (0, -3). Kulman likiarvoksi 56,3^{o} saa ratkaistua esimerkiksi geometriasovelluksen avulla:



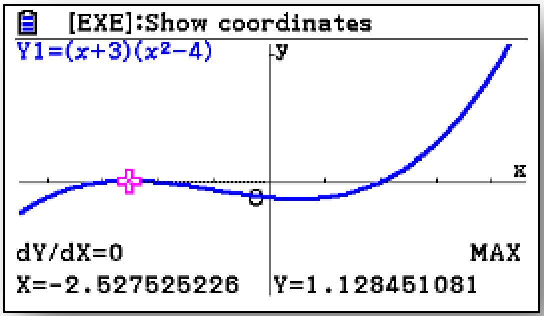


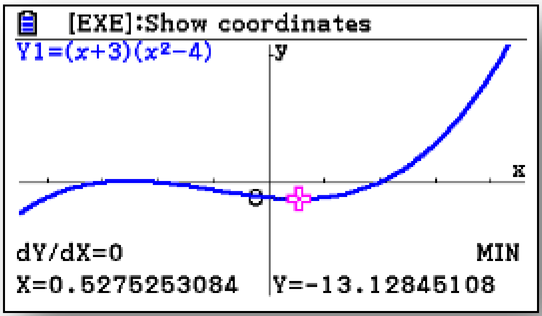
5. Tarkastellaan funktiota $f(x)=(x+3)(x^2-4)$.
   a) Laske funktion $f(x)$ nollakohdat.
   b) Määritä derivaatta $f'(x)$.
   c) Laske derivaatan nollakohdat.

Ratkaisu: Keskimmäinen alakohdista vaatii symbolista laskentaa ja onnistuu esim. Casion FX2.0 Algebra tai ClassPad 330 Plus –laskimilla. Graafinen laskin ilman CAS –ominaisuutta ei pysty tähän laskusuoritukseen. Sen sijaan funktion nollakohdat löytyvät ratkaisimella



Jos laskija tietää, että kolmannen asteen polynomifunktiolla on derivaattafunktiona toisen asteen polynomi ja derivaatan nollakohdat ilmenevät kuvaajassa minimikohtina, maksimikohtina tai terasspisteinä, niin likiarvot derivaatan nollakohdille voi katsoa grafiikka-sovelluksen paikallisista ääriarvokohdista:

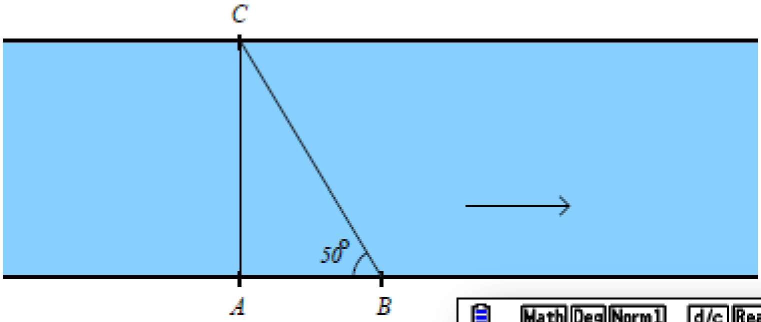




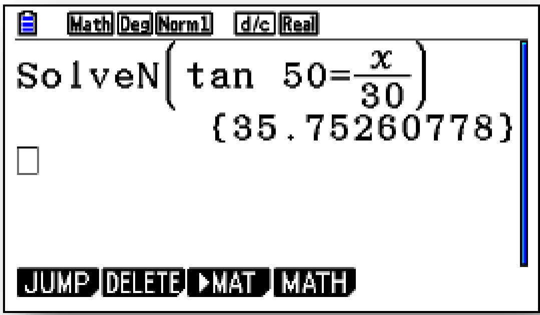
ja saada $x \approx -2{,}53 \; tai \; x \approx 0{,}53$.

pepe.palovaara@casio.fi

6. Biologi haluaa arvioida joen leveyttä, jotta hän voi asettaa kalojen liikkumista mittaavia laitteita jokeen. Hän katsoo joen rannalla olevasta pisteestä A kohtisuoraan vastarannalla olevaa pistettä C. Pisteestä A hän kävelee 30 metriä alavirtaan pisteeseen B, josta katsottuna vastarannan piste C näkyy 50 asteen kulmassa alla olevan kuvan mukaisesti. Laske joen leveys AC metrin tarkkuudella.

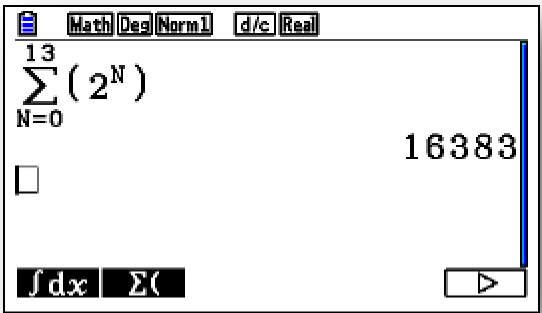


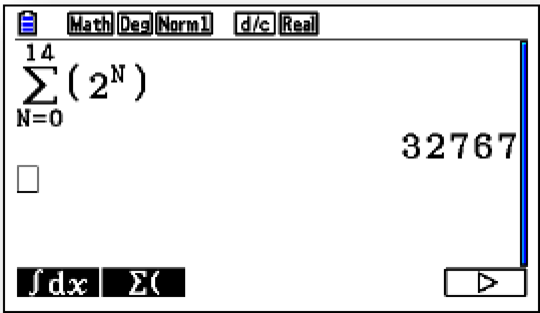
Ratkaisu: Merkitään AC = x, jonka jälkeen laskimella saadaan joen leveydeksi likimäärin 36 metriä (laskimen kulmanyksikkönä laskuissa on aste).



7. Henkilö lähettää sähköpostin kahdelle ystävälleen. Kumpikin näistä lähettää saman viestin 10 minuutin kuluttua edelleen kahdelle uudelle henkilölle, jotka toimivat samoin. Tilanne toistuu kunkin saajan kohdalla aina samalla tavalla, eikä kukaan saa kyseistä sähköpostia toista kertaa. Kuinka kauan kestää, että 20 000 henkilöä on saanut sähköpostin? Anna vastaus 10 minuutin tarkkuudella.

Ratkaisu: Päätellään jonon muodoksi $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots$, missä 5. jäsenen kohdalla on aikaa kulunut (5-2)*10 minuuttia ja n. jäsenen kohdalla (n-2)*10 minuuttia. Laskimen summan avulla saadaan

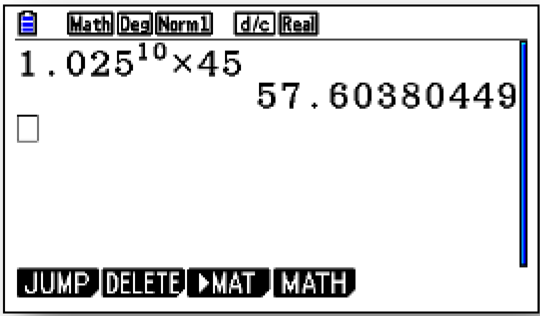




Täten summassa on 15 jäsentä ja vastaukseksi kymmenen minuutin tarkkuudella saadaan (15-2)*10 minuuttia = 130 minuuttia = 2h 10 min.

8. Naisten hiusten leikkaus maksaa nyt 45 euroa. Kuinka paljon se maksaa kymmenen vuoden kuluttua, jos hintaa korotetaan vuoden välein 2,5 %?

Ratkaisu: Laskimella vastaukseksi saadaan 57,60 euroa.



Lisätietoa, ohjelmistopäivityksiä ja ohjeita löydät Casion opetussivustolta http://edu.casio.com Uusi suomenkielinen sivusto on tekeillä ja valmistuu syksyyn 2012 mennessä. Seuraa ilmoittelua Dimensiossa ja verkkosivuilla!

pepe.palovaara@casio.fi

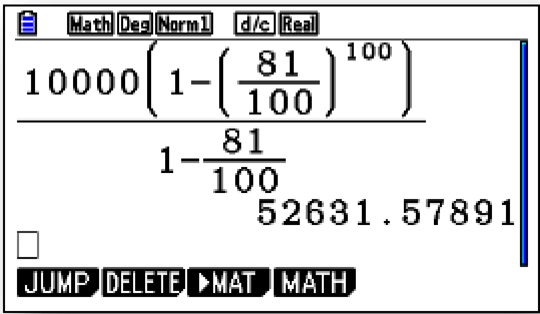
9. Farao Djoser (hallitsi 2667–2648 eaa.) suunnitteli porraspyramidia, jossa on päällekkäin 100 suorakulmaista neliöpohjaista särmiötä niin, että kaikilla on sama korkeus ja jokaisen pohjasärmä on 10 % lyhyempi kuin alla olevan pohjasärmä. Alimmaisen särmiön tilavuus on 10 000 m^3. Määritä tällaisen porraspyramidin tilavuus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

Porraspyramidi

<http://fi.wikipedia.org/wiki/Djoser>. Luettu 29.3.2011.

Ratkaisu: Merkitään alimmaisen pohjaneliön sivua x ja korkeutta y. Toiseksi alimmaisen kerroksen pohjaneliön sivu on tällöin 0,9-kertainen ja tällöin pinta-alojen suhde on mittakaavan neliönä $\frac{81}{100}$.

Tilavuudet muodostavat geometrisen jonon suhdelukuna $\frac{81}{100}$. Tällöin geometrisen summan kaavaan sijoittamalla 100 särmiön yhteistilavuudeksi saadaan laskimella n. 52600 m^3.



10. Maanjäristyksen voimakkuus M lasketaan kaavalla

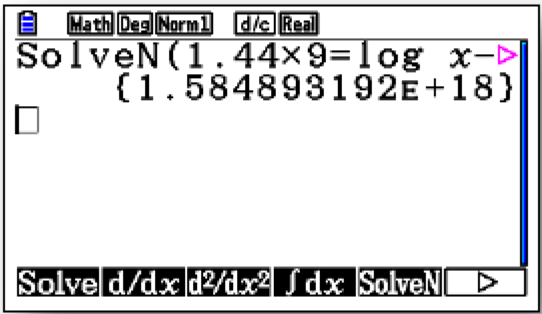
$$1{,}44M = \log_{10} E - 5{,}24,$$

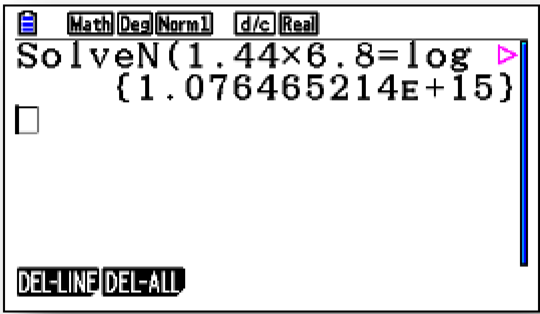
jossa E on järistyksessä vapautuva energia.

a) Sendain lähellä vuonna 2011 sattuneen järistyksen voimakkuus oli $9{,}0$. Laske järistyksessä vapautunut energia kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

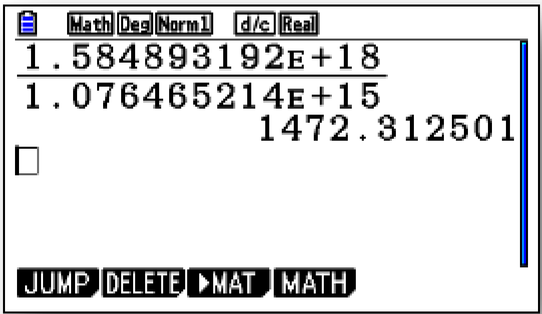
b) Kobessa vuonna 1995 sattuneen järistyksen voimakkuus oli $6{,}8$. Kuinka moninkertainen oli Sendain järistyksessä vapautunut energia Koben järistykseen verrattuna?

Ratkaisu: Ratkaistaan järistyksissä vapautuneiden energioiden määrät:





ja verrataan näitä keskenään:



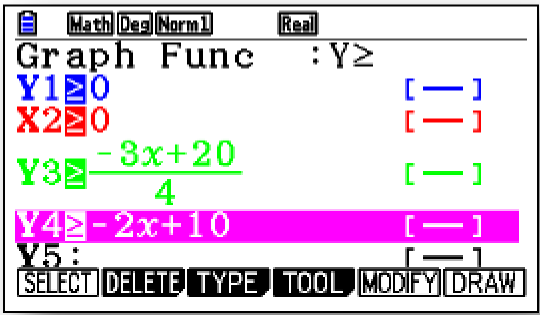
Vastaukset tehtävän alakohtiin ovat:

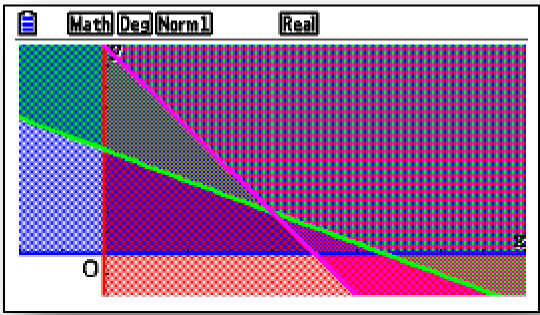
a) $1{,}6 * 10^{18}$.
b) N. 1500-kertainen.

pepe.palovaara@casio.fi

11. Levitoimiseen tarvittavassa taikajuomassa on oltava vähintään 20 hyppysellistä jauhettua lepakon siipeä ja vähintään 10 hyppysellistä hämähäkin seittiä. Taikajuomapuodissa on kahta valmissekoitetta Ascensus ja Sursum. Pikarillinen Ascensusta maksaa kaksi kultarahaa, ja siinä on kolme hyppysellistä lepakon siipeä ja kaksi hyppysellistä hämähäkin seittiä. Pikarillinen Sursumia maksaa kolme kultarahaa. Siinä puolestaan on neljä hyppysellistä lepakon siipeä ja yksi hyppysellinen hämähäkin seittiä. Kuinka paljon kumpaakin sekoitetta kannattaa levitoijakokelaan ostaa, jotta hän saisi taikajuoman mahdollisimman edullisesti?

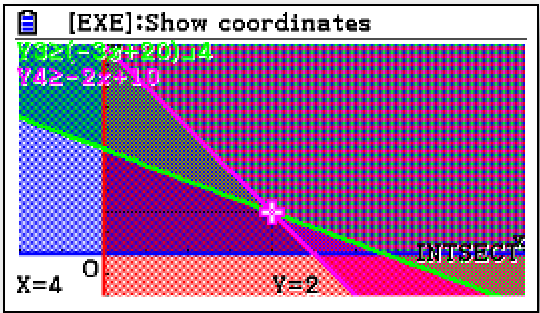
Ratkaisu: Merkitään Ascenuksen määrää = x ja Sursumin määrää = y. Muodostetaan lepakon siipeä ja hämähäkin seittiä vastaavat määrät eri sekoituksissa ja piirretään ehtoja vastaavat suorat laskimella.

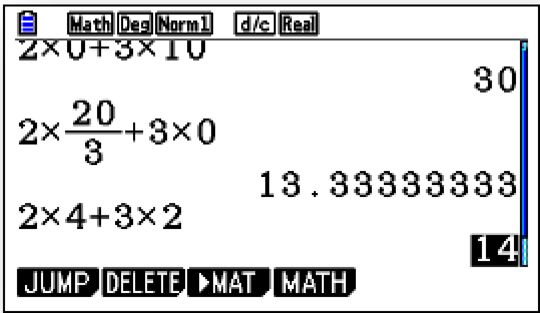




Leikkauspisteet suorien kesken ja suorien ja akseleiden kesken saadaan laskimesta, esim. viereisessä kuvassa suorien leikkauspiste on (4, 2).

Sijoittamalla alueen reunan leikkauspisteen koordinaatit (4, 2), ($\frac{20}{3}$, 0) ja (0, 10) hinnan lausekkeeseen 2x + 3y saadaan arvoiksi laskimella





Edullisin hinta on siis $\frac{40}{3}$ kultarahaa ja se saavutetaan hankkimalla ainoastaan $\frac{20}{3}$ pikarillista Ascenusta eikä lainkaan Sursumia.

12. Leonardo Pisano (1170–1250), kutsumanimeltään Fibonacci, määritteli noin vuonna 1210 lukujonon (f_n) kaavoilla

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

a) Määritä luvut $f_3, f_4, \ldots, f_{10}$.

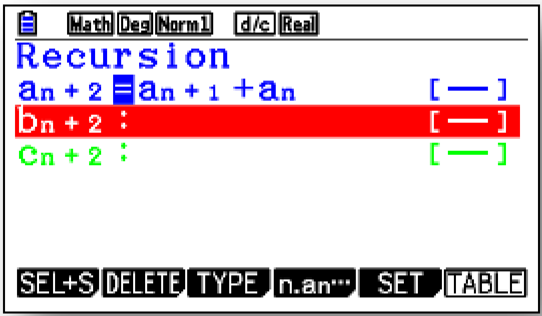
b) Kreikkalaiset kutsuivat lukua $\varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1{,}618034$ kultaiseksi leikkaukseksi. Sen avulla saadaan Fibonaccin luvuille kaava

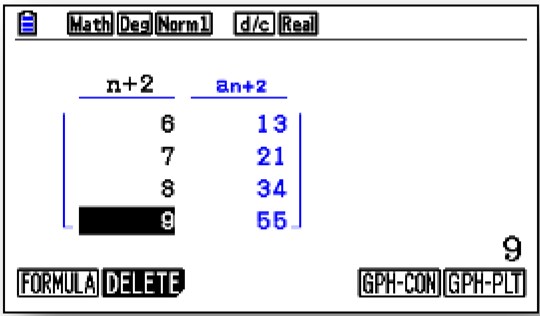
$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Näytä, että kaava on oikea, kun $n = 1$ ja $n = 2$.

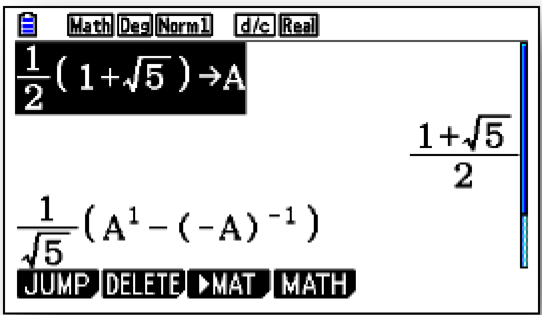
c) Näytä, että yhtälön $x^2 - x - 1 = 0$ juuret ovat φ ja $-\frac{1}{\varphi}$.

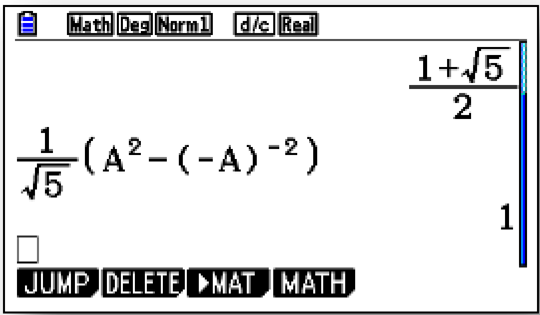
Ratkaisu: Laskimen lukujonojen avulla a-kohtaan saadaan kysytyt lukujonon jäsenet ovat 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 ja 55.





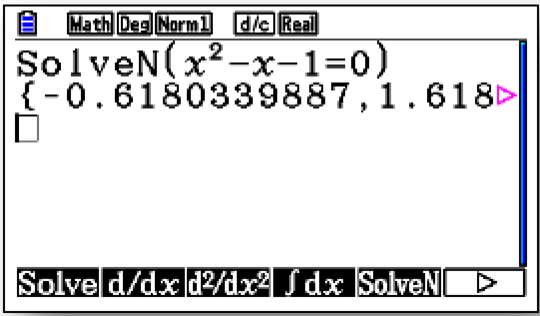
b-kohtaa varten sijoitetaan kultaisen leikkauksen suhdeluku muistipaikkaan A laskun näppäilyn helpottamiseksi ja lasketaan sillä Fibonaccin lukujonon kaksi ensimmäistä jäsentä kaavaan sijoittamalla.

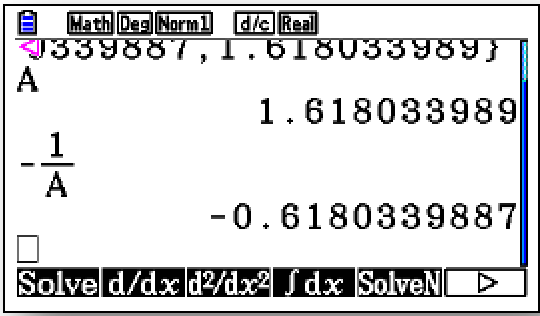




pepe.palovaara@casio.fi

C-kohdan ratkaisu laskimella





eli yhtälön juuret ovat kysytyt luvut φ ja $-\frac{1}{\varphi}$.

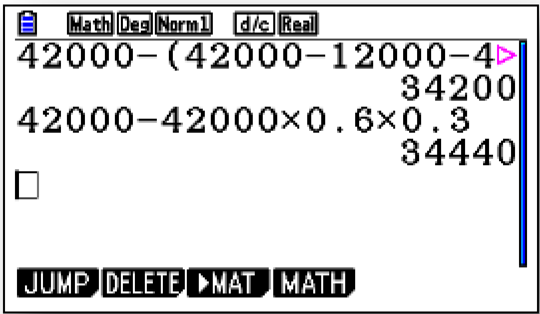
13. Simeoni osti Saapasnahkatornin 12 000 eurolla ja teetti siihen myöhemmin 4 000 euron peruskorjauksen. Yksitoista vuotta myöhemmin hän myi sen Juhanille 42 000 eurolla. Voitosta on maksettava 30 % pääomatuloveroa. Verottaja tulkitsee voitoksi summan, joka saadaan, kun myyntihinnasta vähennetään ostohinta ja peruskorjauskulut. Toisaalta Simeoni voi myös halutessaan käyttää ns. hankintameno-olettamaa. Tällöin myyntihinnasta vähennetään 20 %, jos on omistanut tornin alle 10 vuotta, ja 40 %, jos on omistanut yli 10 vuotta. Mitään muita vähennyksiä ei saa tehdä. Jäljelle jääneestä summasta maksetaan 30 % pääomatuloveroa.

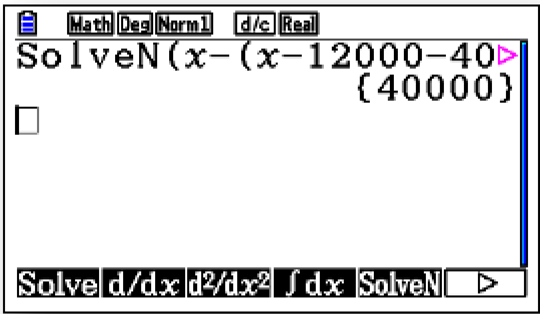
a) Paljonko Simeonille jää myyntihinnasta verotuksen jälkeen, kun hän valitsee edullisemman vaihtoehdon?

b) Mikä olisi sellainen myyntihinta, että Simeoni maksaisi kummassakin verotusvaihtoehdossa yhtä suuren veron?

Ratkaisu: a) –kohdassa Kannattaa käyttää hankintameno-olettamaa, jolloin Simeonille jää 34440 euroa.

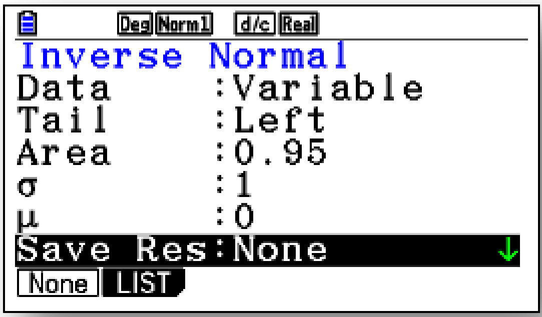
b) -kohdassa ratkaistaan yhtälö $x-(x-12000-4000)*0{,}3=x-x*0{,}6*0{,}3$ laskimella ja saadaan verotuksellisesti samaksi myyntihinnaksi 40000 euroa.

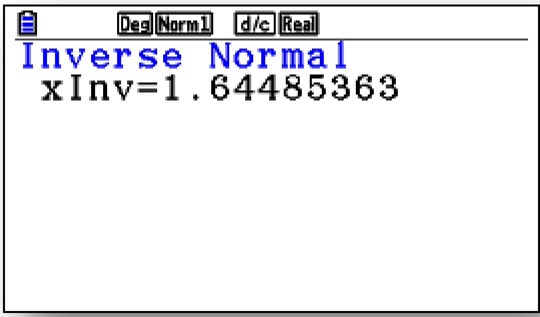




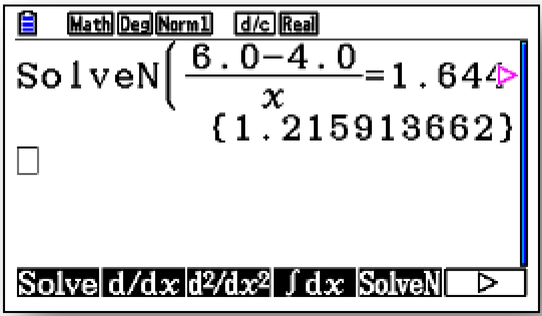
14. Vuorokauden keskilämpötila maaliskuussa on eräällä paikkakunnalla normaalijakautunut niin, että odotusarvo on 4,0 °C ja 90 % vuorokautisista keskilämpötiloista on 2,0 °C – 6,0 °C. Laske keskilämpötilan keskihajonta.

Ratkaisu: Nyt ylärajan 6,0 alle jää 95% lämpötiloista, joten normitetuksi ylärajaksi saadaan laskimella 1,64485363.





Normituskaavasta voidaan laskimella ratkaista keskihajonnaksi n. 1,2. Käytetään normituskaavassa keskihajonnan kohdalla symbolia x merkitsemään tuntematonta.



15. a) Määritä yhtälön

$$\sin(2x+4^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ratkaisut välillä $x \in [0^\circ, 90^\circ]$.

b) Määritä a-kohdan yhtälön kaikki ratkaisut.

Ratkaisu: Laskimella a-kohtaan 28^0 ja 58^0 ja b-kohtaan $28^0 + n\cdot180^0$ tai $58^0 + n\cdot180^0$.