”Enemmän aikaa matematiikan opiskeluun, vähemmän aikaa laskimen opetteluun.”

Laske Laudatur ClassPadilla

Pitkä matematiikka, syksy 2015

Casio Scandinavia

Keilaranta 4 | 02150 Espoo | info@casio.fi

Hyvä Opettaja tai Opiskelija,

Syksyn 2015 ylioppilaskirjoitusten pitkän matematiikan tehtävien ratkaisut on tehty ClassPad II Manager-ohjelman versiolla 2.000.4000. Uusimmat päivitykset sekä laskimiin että ohjelmiin löytyvät Casion kansainväliseltä tukisivustolta https://edu.casio.com. Ohje laskimien käyttöjärjestelmän päivitykseen on myös parin minuutin videona YouTube-kanavalla http://bit.ly/fx-cp400.

Ratkaisujen xcp-tiedostot tulevat Casion www-sivuille ladattaviksi kuten myös tämä vihkonen pdf-muodossa. xcp-tiedosto aukeaa suoraan ClassPad II Manager –ohjelmassa eActivity-sovelluksessa. Casion suomenkieliset tukisivut löytyvät osoitteesta

http://www.casio-laskimet.fi

Kuinka vastaan sähköisesti?

Sähköisissä kokeissa yksi mahdollisuus on siirtää vastaukset sähköiseen lomakkeeseen **sieppausnäyttöinä**. ClassPad II Managerissa tämä onnistuu oikean hiiren napin valikosta, funktionäppäimellä F8 tai tehtäväpalkin alasvetovalikosta. Siepata voidaan valita koko näkymä tai aktiivisen ikkunan sisältö. Näitä vaihtoehtoja on käytetty tämän vihkosen tekemisessä.

Toinen mahdollisuus on **tallentaa sähköiset vastaukset tiedostona ja palauttaa tiedosto**. Tämän vihkosen vastaukset on tallennettu myös tiedostoiksi ja osa kuvaajista kuviksi. Vastaukset tallennetaan joko yksi kerrallaan tai koko koesuoritus voidaan laskea ja tallentaa myös yhteen tiedostoon. Tällöin alkupään tehtäviin on helppo palata kokeen loppupuolellakin, mikäli niissä huomaa tarkennettavaa. Tällaiseen työskentelyyn ClassPadeista löytyy sovellus **eActivity**.

Casion ohjelmistot ja lisenssit

Casion symbolisen laskennan ohjelmisto on vapaasti ladattavissa 90 päivän kokeiluun osoitteesta https://edu.casio.com. Kokeiluajan jälkeen ohjelman voi aktivoida vuodeksi kerrallaan. Yksittäisiä lisenssejä saa jälleenmyyjiltä ja ryhmälisenssejä Casiolta. Kesästä 2015 alkaen myös kaikki ClassPad fx-CP400 –laskimet tulevat vuosilisenssin kera ja opettajille suunnatut tarjoukset ovat jo vuosia sisältäneet sekä ohjelman että laskimen.

CD-levyllä tulleen ohjelman voi päivittää versioon 2.000.2000. Ohjelman voi muuttaa Subscription –jakeluversioksi, jolloin CD-levyn asennuskoodilla aktivointi on voimassa vuoden 2018 loppuun saakka sisältäen kaikki tulevatkin päivitykset.

Kysy lisää ja tilaa ilmainen koulutus koulullesi tai koulutusyhtymällesi osoitteesta info@casio.fi

Mukavaa kuluvaa kouluvuotta,

Espoossa 23.9.2015 Pepe Palovaara

Tehtävä 1.

a) Määritä sellainen vakio a, että luku 2015 on yhtälön $ax=2015+a$ juuri.

b) Laske neliön piiri, kun sen lävistäjän pituus on 6.

c) Tarkastellaan muotoa $\frac{m}{n}$ olevia lukuja, kun $m \in \{-1,0,1,2\}$ ja $n \in \{2,3,4\}$. Määritä näistä luvuista suurin ja pienin.

Ratkaisu:

a) Koska luku 2015 on yhtälön juuri, se toteuttaa yhtälön. Ratkaistaan yhtälöstä a, kun luku 2015 on sijoitettu muuttujan x paikalle:

solve(a*2015=2015+a, a)

$$\left\{a=\frac{2015}{2014}\right\}$$

b) Neliön lävistäjä on $\sqrt{2}$-kertaa sivun pituus, joten neliön piiri on

$$4*\frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$12\cdot\sqrt{2}$$

c) Suurin luvuista on se positiivinen luku, jossa on pienin nimittäjä ja suurin osoittaja eli $\frac{2}{2}=1$. Pienin luvuista on se negatiivinen luku, jonka itseisarvo on suurin eli $-\frac{1}{2}$.

Tehtävä 2.

Tasokäyrä kulkee pisteen (3, 4) kautta. Määritä käyrän yhtälö, kun kyseessä on

a) origon kautta kulkeva suora.

b) origokeskinen ympyrä.

c) ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huippu on origossa.

Ratkaisu:

Sijoitetaan kaikissa tapauksissa annetut pisteet käyrien yhtälöihin.

a) Origon kautta kulkevan suoran yhtälöstä $y=kx$ puuttuu vain kulmakerroin, joka saadaan laskemalla annetun pisteen ja origon avulla $\frac{4-0}{3-0}$. Kysytty yhtälö on $y=\frac{4}{3}x$.

b) Origokeskisessä ympyrään $x^2+y^2=r^2$ tarvitaan vain säde r, joka on origon ja pisteen (3, 4) etäisyys. Yhtälö on siis

$$(x-0)^2+(y-0)^2=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}^2$$

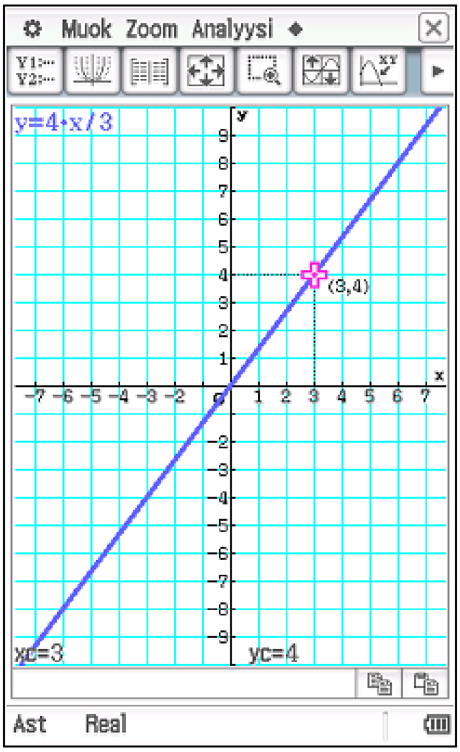
$$x^2+y^2=25$$

c) Ylöspäin avautuvan origohuippuisen paraabelin yhtälö on $y=a*x^2$, missä $a>0$. Piste (3, 4) toteuttaa tämän yhtälön, joten saadaan ratkaistua kerroin a:

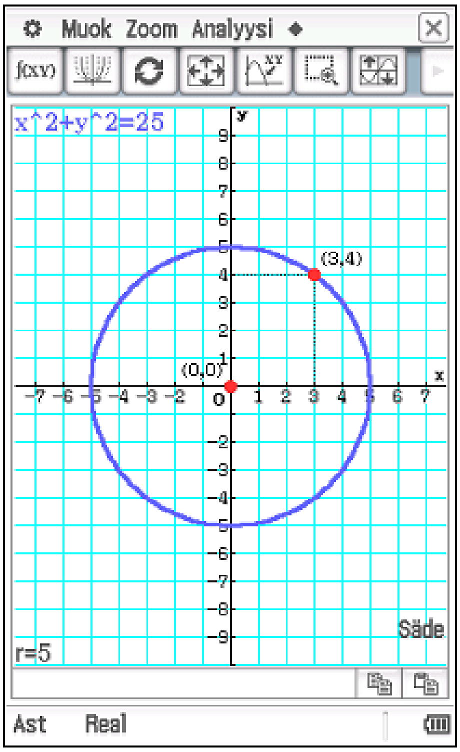
solve(4=a*3^2, a)

$$\left\{a=\frac{4}{9}\right\}$$

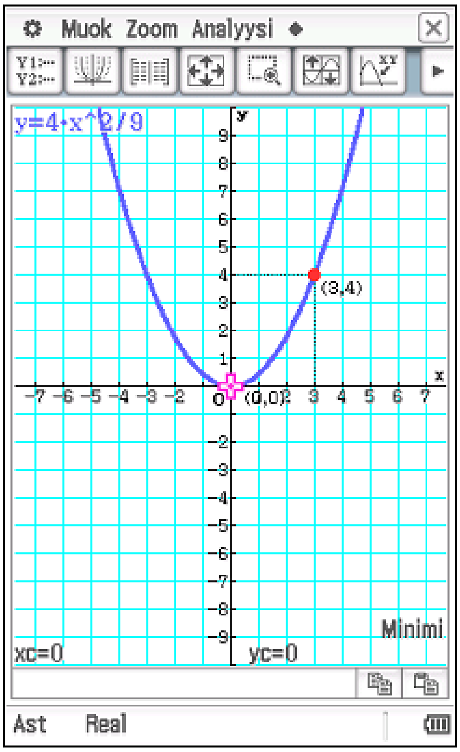
ja kysytty yhtälö on $y=\frac{4}{9}x^2$.



Tehtävä 2a



Tehtävä 2b



Tehtävä 2c

Tehtävä 3.

a) Kuntopolun pituus kartalla on 17,5 cm. Mikä on polun pituus maastossa, kun kartan mittakaava on 1:20000? Anna vastaus 100 metrin tarkkuudella.

b) Laske kuution yhden sivutahkon pinta-ala neliösenttimetrin tarkkuudella, kun kuution tilavuus on 7,0 litraa.

Ratkaisu:

a) Matka luonnossa on mittakaavan mukaisesti 20000-kertainen eli metreinä

20000*0.175

3500

Tämä on sadan metrin tarkkuudella muuttumaton eli vastaus on 3500m.

b) Kuution tilavuus on s^3, missä s on sivun pituus. 7,0 litraa = 7,0 dm^3 = 7000 cm^3. Sivun pituuden s likiarvo senttimetreissä on siten

solve(s^3=7000, s)

{s=19.12931183}

ja sivutahkon pinta-ala

s^2|s=19.12931183

365.9305711

Neliösenttimetrin tarkkuudella tämä on 366 cm^2.

CASIO

Tehtävä 4.
Olkoon A=(1,2). Vektorin AB pituus on 3, ja se on kohtisuorassa vektoria 3i+4j vastaan. Määritä pisteen B koordinaatit.

Ratkaisu:
Olkoon piste B(x,y). Tällöin vektori AB on (x−1)i+(y−2)j ja kohtisuoruusehdosta vektorin 3i+4j kanssa (pistetulo = 0) saadaan yhtälö 3(x−1)+4(y−2)=0. Ratkaistaan tästä y:

solve(3(x−1)+4(y−2)=0,y)

$$\left\{y=\frac{-3\cdot x}{4}+\frac{11}{4}\right\}$$

Nyt vektori AB on $(x-1)i+(\frac{-3\cdot x}{4}+\frac{11}{4}-2)j$. Vektorin pituuden antamasta ehdosta saadaan yhtälö, josta voidaan ratkaista koordinaatti x:

$\text{solve}(\sqrt{(x-1)^2+(\frac{-3\cdot x}{4}+\frac{11}{4}-2)^2}=3,x)$

$$\left\{x=-\frac{7}{5},x=\frac{17}{5}\right\}$$

Siis pisteelle B saadaan kaksi eri vaihtoehtoa. Lasketaan vastaavat y−koordinaatit sijoittamalla saadut x:n arvot y:n lausekkeeseen:

$y=\frac{-3\cdot x}{4}+\frac{11}{4}\mid x=-\frac{7}{5}$

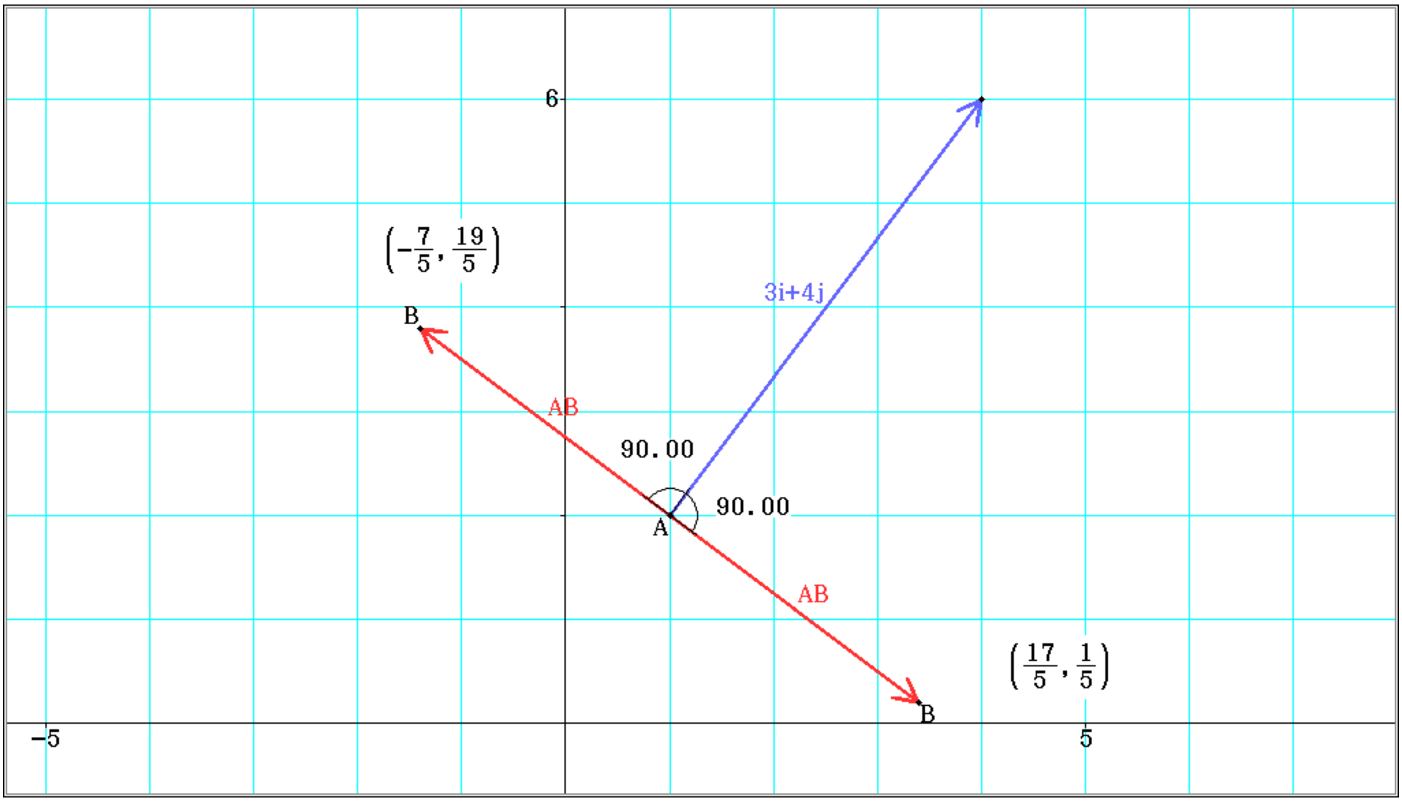
$$y=\frac{19}{5}$$

$y=\frac{-3\cdot x}{4}+\frac{11}{4}\mid x=\frac{17}{5}$

$$y=\frac{1}{5}$$

Pisteeksi B käyvät $\left(-\frac{7}{5},\frac{19}{5}\right)$ ja $\left(\frac{17}{5},\frac{1}{5}\right)$.

Tehtävä 4 graafisesti:



Tehtävä 5.

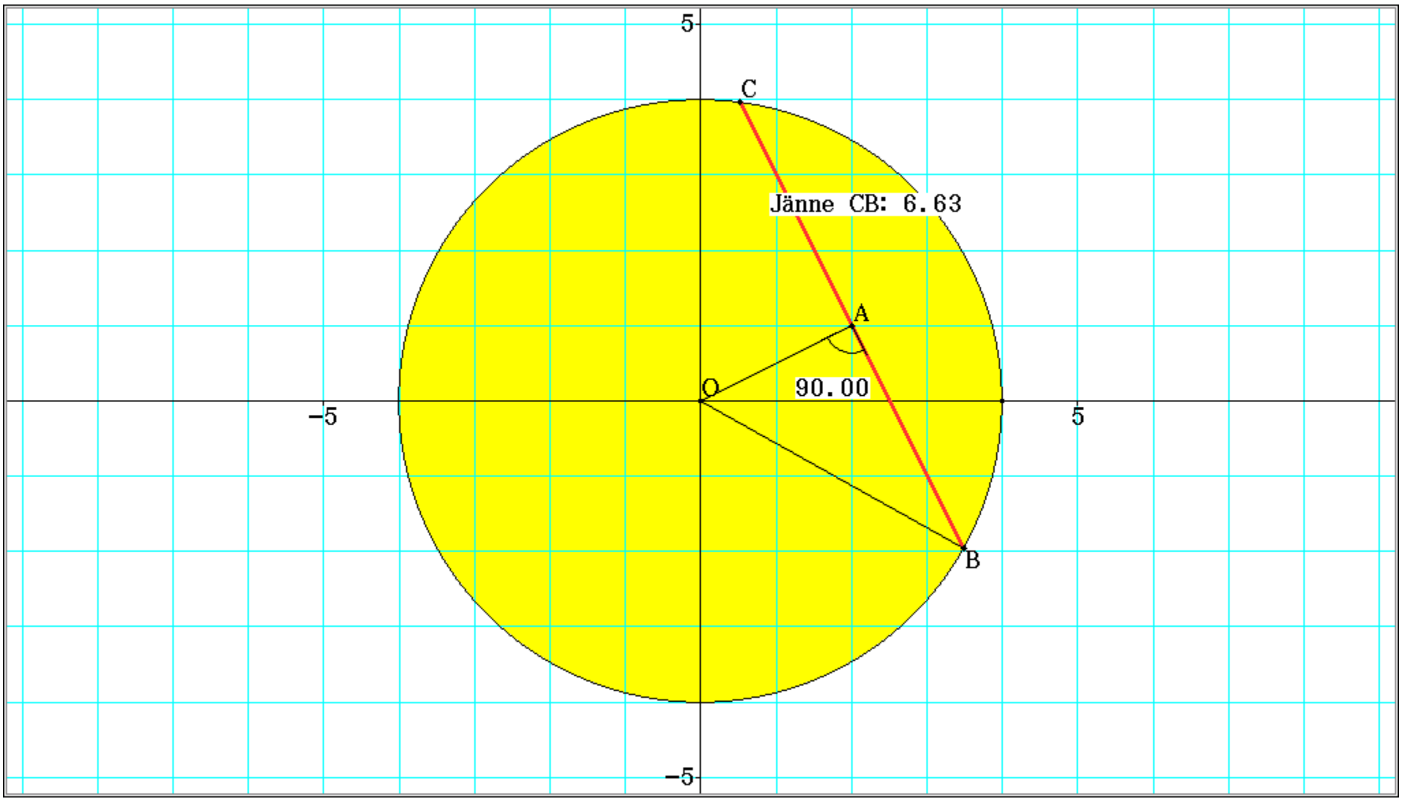
Ympyrän $x^2+y^2=16$ jänteen keskipiste on $(2,1)$. Määritä jänteen pituus.

Ratkaisu:

Ympyrän säde on 4 ja keskipiste O(0,0). Merkitään jänteen keskipistettä A ja jänteen päätepistettä ympyrän kehällä B. Ympyrän sisälle syntyvästä suorakulmaisesta kolmiosta OAB saadaan Pythagoraan lauseella ratkaistua kateetin OA pituudeksi $\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ ja kateetin AB pituudeksi $\sqrt{4^2-\sqrt{5}^2} = \sqrt{11}$. Jänteen pituus on siis $2\sqrt{11}$

6.633249581

Vastaus: $2\sqrt{11} \approx 6.63$.



Tehtävä 5 graafisesti.

Vaihtoehtoisesti tehtävä voidaan ratkaista jänteen päätepisteiden koordinaattien avulla:

Jänteen keskipisteen paikkavektori on OA = 2i+j. Koska ympyrän keskipisteestä jänteen keskipisteen kautta piirretty suora on kohtisuorassa jännettä vastaan, niin yksi annetun jänteen suuntavektori on AB = −i+2j.

Ympyrän kehällä olevat pisteet saadaan vektorien yhteenlaskuna $OA\pm\sqrt{11}AB_0$, missä AB_0 on vektorin AB suuntainen yksikkövektori:

[2 1]+√11*unitV([−1 2])

$$\left[\frac{-\sqrt{55}}{5}+2 \quad \frac{2\cdot\sqrt{55}}{5}+1\right]$$

[2 1]−√11*unitV([−1 2])

$$\left[\frac{\sqrt{55}}{5}+2 \quad \frac{-2\cdot\sqrt{55}}{5}+1\right]$$

Jänne voidaan esittää siis esim. vektorina

$$\left[\frac{-\sqrt{55}}{5}+2 \quad \frac{2\cdot\sqrt{55}}{5}+1\right]-\left[\frac{\sqrt{55}}{5}+2 \quad \frac{-2\cdot\sqrt{55}}{5}+1\right]$$

$$\left[\frac{-2\cdot\sqrt{55}}{5} \quad \frac{4\cdot\sqrt{55}}{5}\right]$$

jolloin sen pituus saadaan vektorin pituutena:

$$\mathrm{norm}\left(\left[\frac{-2\cdot\sqrt{55}}{5} \quad \frac{4\cdot\sqrt{55}}{5}\right]\right)$$

$$2\cdot\sqrt{11}$$

tai jänteen päätepisteiden etäisyytenä

$$\sqrt{\left(\frac{-\sqrt{55}}{5}+2-\left(\frac{\sqrt{55}}{5}+2\right)\right)^2+\left(\frac{2\cdot\sqrt{55}}{5}+1-\left(\frac{-2\cdot\sqrt{55}}{5}+1\right)\right)^2}$$

$$2\cdot\sqrt{11}$$

Tämän vihkosen tehtävät on ratkaistu ClassPad II Manager –ohjelmalla. Ohjelma tulee laskimen fx-CP400 mukana tai sen voi hankkia myös ilman laskinta. Kysy lisää kirjakauppiaaltasi tai ota yhteyttä info@casio.fi

Tehtävistä on otettu sieppausnäytöt (ruudun-kaappaukset, screenshotit) ja ne on liitetty tähän vihkoseen sellaisenaan. Tätä vastaustekniikkaa voi käyttää myös sähköisissä kokeissa. Sieppausnäytön saa ohjelmasta näppäimellä F8, oikean hiiren valikosta tai ClassPad Managerin ikkunan valikosta Muokkaa –> Sieppausnäyttö.

$2 \cdot \sqrt{11}$

Tehtävä 6.

Annin pelaamassa tietokonepelissä on 90%:n todennäköisyys onnistua.

a) Kuinka suurella todennäköisyydellä neljän pelin sarjassa tulee tarkalleen yksi epäonnistuminen?

b) Mikä on neljän pelin sarjassa onnistuneiden pelien lukumäärän odotusarvo?

c) Kuinka monta kertaa Annin täytyy pelata, jotta onnistuneiden pelien lukumäärän odotusarvo olisi vähintään 10?

Ratkaisu:

Koska jokaisessa pelissä todennäköisyys onnistua on 90%, eli pelikerrat voidaan katsoa toisistaan riippumattomiksi tapahtumiksi. Tällöin kyseessä on binomitodennäköisyys.

a) P("Neljässä pelissä tasan yksi epäonnistuminen") =

$nCr(4,1)*(1-0.9)^{1}*(0.9)^{4-1}$

$$\frac{729}{2500}$$

$\frac{729}{2500}$

$$0.2916$$

b) Binomikokeessa odotusarvo on n*p, missä n = toistojen lukumäärä ja p = onnistumisen todennäköisyys.

Neljän pelin sarjassa odotusarvon on siis

$4*0.9$

$$\frac{18}{5}$$

$\frac{18}{5}$

$$3.6$$

Usean vuoden yo-kokeiden ratkaisut sekä lyhyeen että pitkään matematiikkaan löytyvät Casion suomenkielisiltä tukisivuilta linkistä http://www.casio-laskimet.fi/fi/opettajakoulu/opetusmateriaalia/

Viimeisimmistä kokeista löytyy myös ClassPadin eActivity-sovelluksella tehdyt tiedostot. Ne avautuvat kaksoisnapsauttamalla suoraan ClassPad Manageriisi.

Vaihtoehtoisesti voidaan laskea neljän pelin sarjassa onnistumisten arvojoukolle {0, 1, 2, 3, 4} vastaavat pistetodennäköisyydet:

nCr(4, 0)$*$(0.9)^{0*}(1−0.9)$^{4-0}$

$$\frac{1}{10000}$$

nCr(4, 1)$*$(0.9)^{1*}(1−0.9)$^{4-1}$

$$\frac{9}{2500}$$

nCr(4, 2)$*$(0.9)^{2*}(1−0.9)$^{4-2}$

$$\frac{243}{5000}$$

nCr(4, 3)$*$(0.9)^{3*}(1−0.9)$^{4-3}$

$$\frac{729}{2500}$$

nCr(4, 4)$*$(0.9)^{4*}(1−0.9)$^{4-4}$

$$\frac{6561}{10000}$$

jolloin odotusarvo onnistuneille peleille neljän pelin sarjassa on

$$\frac{1}{10000}*0+\frac{9}{2500}*1+\frac{243}{5000}*2+\frac{729}{2500}*3+\frac{6561}{10000}*4$$

$$\frac{18}{5}$$

$\frac{18}{5}$

3.6

c) Ratkaistaan epäyhtälö n*p>10:

solve(n*0.9≥10, n)

{n≥11.11111111}

Annin täytyy pelata siis 12 kertaa, jotta onnistumisten odotusarvo olisi vähintään 10.

Webinaarit ovat alkaneet. Casio järjestää opettajille avointa opetusta videoneuvottelun avulla kerran kuussa. Istunnon editoitu tallenne on saatavilla myöhempää katselua varten, joten myös live-lähetykseen osallistumattomat pääsevät mukaan sen avulla.

Ennen ensimmäistä osallistumistasi kannattaa perehtyä [ohjeeseen](). Tarkempaa tietoa ja aikatauluja julkaistaan sivuilla http://www.casio-laskimet.fi. Nähdään netissä!

Ratkaisu 7:

Merkitään ison kolmion suorasta kulmasta lähtevää korkeusjanaa h. Pythagoraan lauseen nojalla

$h=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2}\ |a>0$

$$h=\frac{\sqrt{2}\cdot a}{2}$$

Siis korkeusjana jakaa ison kolmion kahdeksi tasakylkiseksi kolmioksi, joiden kyljet ovat $\frac{\sqrt{2}\cdot a}{2}$. Merkitään huippukolmion korkeusjanaa x, jolloin korkeusjana puolestaan jakaa huippukolmion kahdeksi tasakylkiseksi kolmioksi kateetteina x. Tällöin kysytyn kolmion pinta-alaksi saadaan funktio $A(x)=x*\left(\frac{\sqrt{2}\cdot a}{2}-x\right)$, missä $0\leq x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}a$. Koska kyseessä on toisen asteen polynomifunktio, jota kuvaa alaspäin avautuva paraabeli, niin funktion suurin arvo saadaan paraabelin huipussa eli ainoassa derivaatan nollakohdassa:

$\frac{d}{dx}(A(x))$

$$\frac{-(4\cdot x-\sqrt{2}\cdot a)}{2}$$

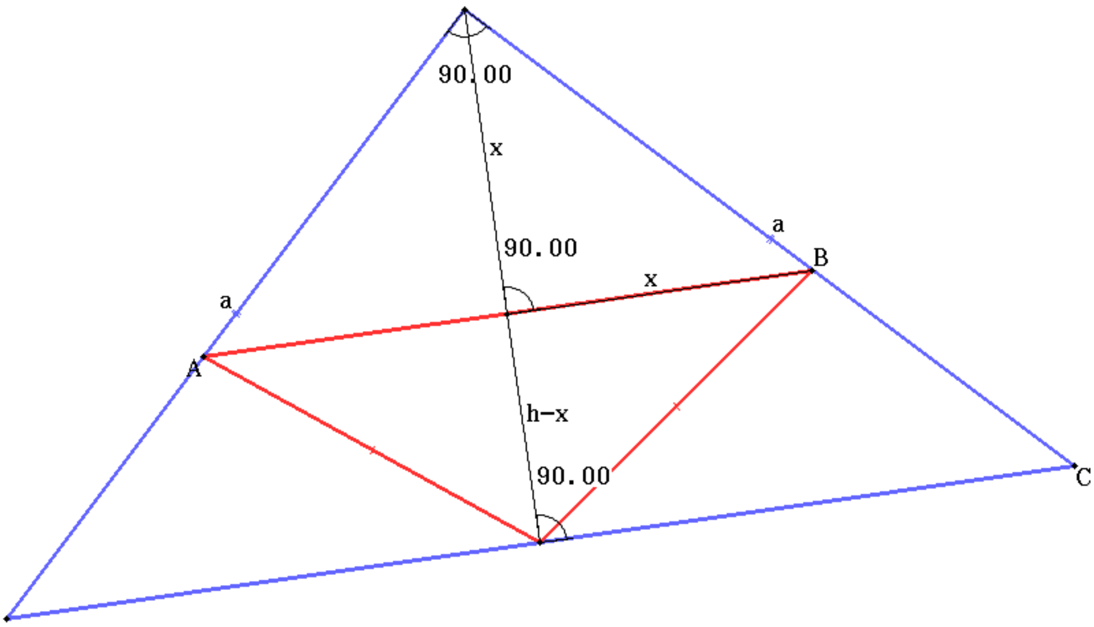
solve(ans=0)

$$\left\{x=\frac{\sqrt{2}\cdot a}{4}\right\}$$

Pinta-alan suurin arvo on

$A\left(\frac{\sqrt{2}\cdot a}{4}\right)$

$$\frac{a^2}{8}$$



Tehtävän 7 havaintokuva.

Tehtävä 8.

Erään kaivoksen kivihiilivarojen laskettiin vuoden 2015 alussa riittävän 50 vuodeksi, jos louhintatahti (yksikkönä tonnia/vuosi) pysyy samana. Minä vuonna kivihiilivarat loppuvat, jos louhintaa lisätään joka vuosi 2,5% edelliseen vuoteen verrattuna?

Ratkaisu 8:

Merkitään alkuperäistä kivihiilimäärää a ja vuotuista vähennystä x tn/vuosi. Tällöin 50 vuoden kuluttua vuonna 2065 varanto on nolla: $a-50x=0$, josta $a=50x$ tonnia.

Kun joka vuosi louhintaa lisätään 2,5%, niin saadaan kivihiilen määrälle esitys n vuoden kuluttua

$$50x-(x+1.025x+1.025^{2}x+...+1.025^{n-1}x).$$

Tämä voidaan kirjoittaa geometrisen jonon summakaavan avulla muotoon

$$x\left(50-\left(\frac{1-1.025^{n}}{1-1.025}\right)\right)$$

Kivihiilivarannot loppuvat, kun tämä lauseke on 0 ($x\neq0$). Ratkaistaan vuosien lukumäärä n:

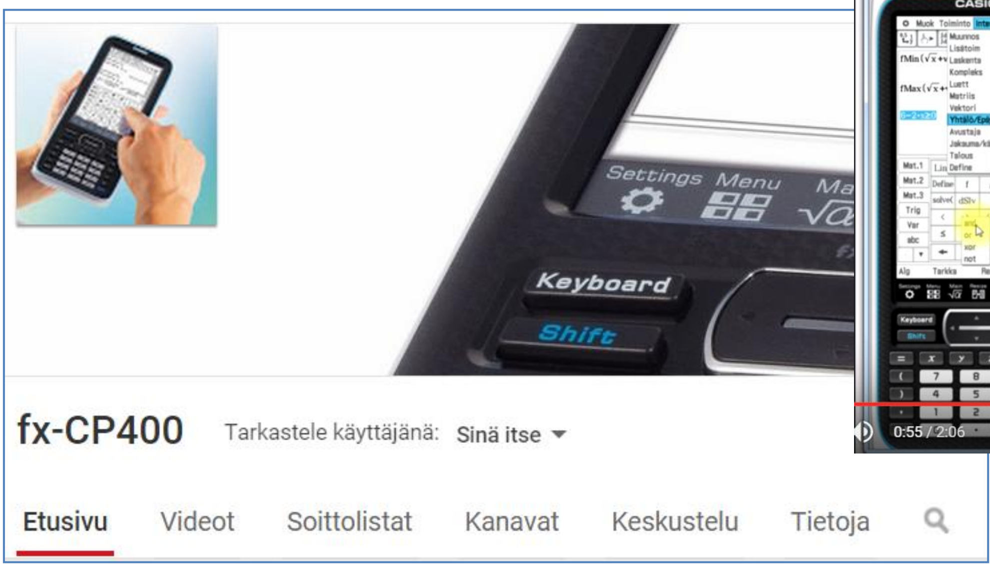
$$\text{solve}\left(50-\frac{1-1.025^{n}}{1-1.025}=0,n\right)$$

$\{n=32.84100511\}$

Kivihiilivarat loppuisivat siis vuoden 2047 loppupuoliskolla.

Mikäli haluat perehtyä ClassPadin käyttöön lukion matematiikan kurssien osalta, on YouTuben kanava ”fx-CP400” hyvä tapa aloittaa. Lyhyillä videoilla on näytetty askel kerrallaan ongelman ratkaisu symbolisella ClassPad Managerilla. Jokaisen videon kuvaustekstissä on kuvattu ratkaistava ongelma ja joissain tehtävissä on opetettu hieman teoriaa laskujen takana.

Videon asetuksista voi asettaa resoluution mahdollisimman korkeaksi ja avata videon koko näytön tilaan. Tällöin on helpompaa nähdä opastus ja korostetut kursorin liikkeet. Ja videossahan voi aina palata taaksepäin!



Tehtävä 9.
Täysin pyöreän geenimanipuloidun omenan säde on 5,0 cm. Omenan läpi porataan sen keskeltä kulkeva reikä, jonka säde on 1,0 cm. Kuinka monta prosenttia omenan tilavuudesta tällöin häviää? Anna vastaus prosenttiyksikön kymmenesosan tarkkuudella.

Ratkaisu 9:
Reiän kohdalta poistettu omenan osa on muodoltaan suora ympyrälieriö, jonka päissä on pallosegmentit. Poikkileikkauskuvasta saadaan suorakulmainen kolmio ja siitä ympyrälieriön korkeudeksi

$2\sqrt{5^2-1^2}$

$$4\cdot\sqrt{6}$$

Ympyrälieriön tilavuus on siis kuutiosenttimetreinä

$\pi*1^2*4\cdot\sqrt{6}$

$$4\cdot\sqrt{6}\cdot\pi$$

Pallokalotin korkeudeksi jää siis $5-2\sqrt{6}$ ja kahden pallosegmentin yhteenlaskettu tilavuus on MAOLin kaavan nojalla

$2*\pi*(5-2\sqrt{6})^2(5-\frac{5-2\sqrt{6}}{3})$

$$2\cdot\left(\frac{-(-2\cdot\sqrt{6}+5)}{3}+5\right)\cdot(-2\cdot\sqrt{6}+5)^2\cdot\pi$$

simplify(ans)

$$\frac{500\cdot\pi}{3}-68\cdot\sqrt{6}\cdot\pi$$

Omenan tilaavuus muuttuu

$$\frac{\frac{4}{3}\pi*5^3-4\cdot\sqrt{6}\cdot\pi-\left(\frac{500\cdot\pi}{3}-68\cdot\sqrt{6}\cdot\pi\right)}{\frac{4}{3}\pi*5^3}$$

0.9406040612

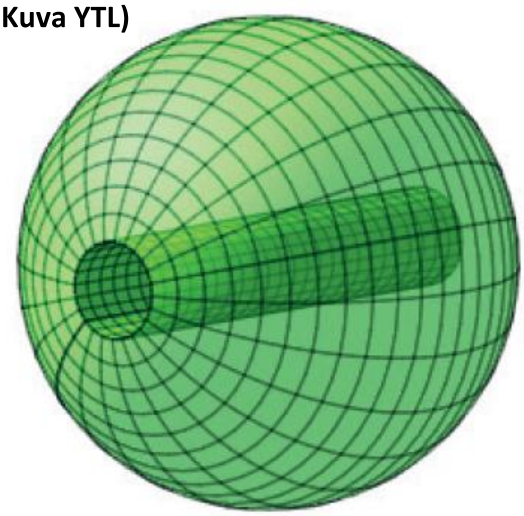
eli n. 0.9406040612-kertaiseksi. Tilavuudesta häviää prosentteina

100*(1-0.9406040612)

5.93959388

Tämä on prosentin kymmenyksen tarkkuudella 5,9%.

(Kuva YTL)



Pois leikatun osan saa myös pyörähdys-kappaleen tilavuutena integraalin avulla:

$$\text{Define } f(x)=\begin{cases}\sqrt{5^2-x^2}, & x<-\sqrt{24}\\ 1, & -\sqrt{24}\le x\le\sqrt{24}\\ \sqrt{5^2-x^2}, & x>\sqrt{24}\end{cases}$$

done

$$\pi\int_{-5}^{5}(f(x))^2dx$$

31.09964082

Tehtävä 10.

a) Suorakulmaisen kolmion kateettien ja hypotenuusan pituudet a<b<c muodostavat geometrisen jonon. Määritä jonon suhdeluku q.

b) Suorakulmaisen kolmion kateettien ja hypotenuusan pituudet a<b<c muodostavat aritmeettisen jonon. Määritä suhde a:b:c.

Ratkaisu 10:

Koska geometrisen jonon peräkkäisten jäsenten suhde on vakio q, niin saadaan verrantoyhtälö $q=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}=\frac{b}{a}$ soveltamalla Pythagoraan lausetta hypotenuusan esitystapaan. Ratkaistaan tästä yhtälöstä a huomioimalla kolmion sivujen positiivisuusehdot:

$$\text{solve}\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}=\frac{b}{a}, a\right) \mid b>0$$

$$\left\{a=\frac{-b\cdot\sqrt{2\cdot(\sqrt{5}-1)}}{2}, a=\frac{b\cdot\sqrt{2\cdot(\sqrt{5}-1)}}{2}\right\}$$

Näistä ensimmäinen on negatiivinen luku eikä se käy sivun a pituudeksi. Lasketaan suhdeluku $q=\frac{b}{a}$:

$$\frac{b}{\frac{b\cdot\sqrt{2\cdot(\sqrt{5}-1)}}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{5}-1}}$$

$$\text{simplify}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{5}-1}}\right)$$

$$\frac{\sqrt{2\cdot(\sqrt{5}+1)}}{2}$$

b) Aritmeettisessa jonossa peräkkäisten jonon jäsenten erotus on vakio d. Soveltamalla jälleen Pythagoraan lausetta hypotenuusaan saadaan $d=\sqrt{a^2+b^2}-b=b-a$. Ratkaistaan tästä yhtälöstä a:

$$\text{solve}\left(\sqrt{a^2+b^2}-b=b-a, a\right)$$

$$\left\{a=\frac{3\cdot b}{4}\right\}$$

jolloin sivujen pituudet ovat $\frac{3\cdot b}{4}<b<\sqrt{\left(\frac{3\cdot b}{4}\right)^2+b^2}$. Nyt kysytty suhde a:b on 3:4, sillä $\frac{a}{b}$ on

$$\frac{\frac{3\cdot b}{4}}{b}$$

$$\frac{3}{4}$$

ja suhde b:c on 4:5, sillä

$$\frac{b}{\sqrt{\left(\frac{3\cdot b}{4}\right)^2+b^2}} \mid b>0$$

$$\frac{4}{5}$$

Kysytty suhde a:b:c on 3:4:5.

Tehtävä 11.

Millä numeron n arvoilla 10-järjestelmän luku 12n34n567n89n on jaollinen luvulla

a) 3

b) 6

c) 9?

Vastaus 11:

n on jokin numeroista {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} eli vaihtoehdot annetulle luvulle ovat

$1*10^{12}+2*10^{11}+n*10^{10}+3*10^{9}+4*10^{8}+n*10^{7}+5*10^{6}+6*10^{5}+7*10^{4}+n*10^{3}+8*10^{2}+9*10^{1}+n*10^{0}|n=0$

1203405670890

$1*10^{12}+2*10^{11}+n*10^{10}+3*10^{9}+4*10^{8}+n*10^{7}+5*10^{6}+6*10^{5}+7*10^{4}+n*10^{3}+8*10^{2}+9*10^{1}+n*10^{0}|n=1$

1213415671891

$1*10^{12}+2*10^{11}+n*10^{10}+3*10^{9}+4*10^{8}+n*10^{7}+5*10^{6}+6*10^{5}+7*10^{4}+n*10^{3}+8*10^{2}+9*10^{1}+n*10^{0}|n=2$

1223425672892

$1*10^{12}+2*10^{11}+n*10^{10}+3*10^{9}+4*10^{8}+n*10^{7}+5*10^{6}+6*10^{5}+7*10^{4}+n*10^{3}+8*10^{2}+9*10^{1}+n*10^{0}|n=3$

1233435673893

$1*10^{12}+2*10^{11}+n*10^{10}+3*10^{9}+4*10^{8}+n*10^{7}+5*10^{6}+6*10^{5}+7*10^{4}+n*10^{3}+8*10^{2}+9*10^{1}+n*10^{0}|n=4$

1243445674894

$1*10^{12}+2*10^{11}+n*10^{10}+3*10^{9}+4*10^{8}+n*10^{7}+5*10^{6}+6*10^{5}+7*10^{4}+n*10^{3}+8*10^{2}+9*10^{1}+n*10^{0}|n=5$

1253455675895

$1*10^{12}+2*10^{11}+n*10^{10}+3*10^{9}+4*10^{8}+n*10^{7}+5*10^{6}+6*10^{5}+7*10^{4}+n*10^{3}+8*10^{2}+9*10^{1}+n*10^{0}|n=6$

1263465676896

$1*10^{12}+2*10^{11}+n*10^{10}+3*10^{9}+4*10^{8}+n*10^{7}+5*10^{6}+6*10^{5}+7*10^{4}+n*10^{3}+8*10^{2}+9*10^{1}+n*10^{0}|n=7$

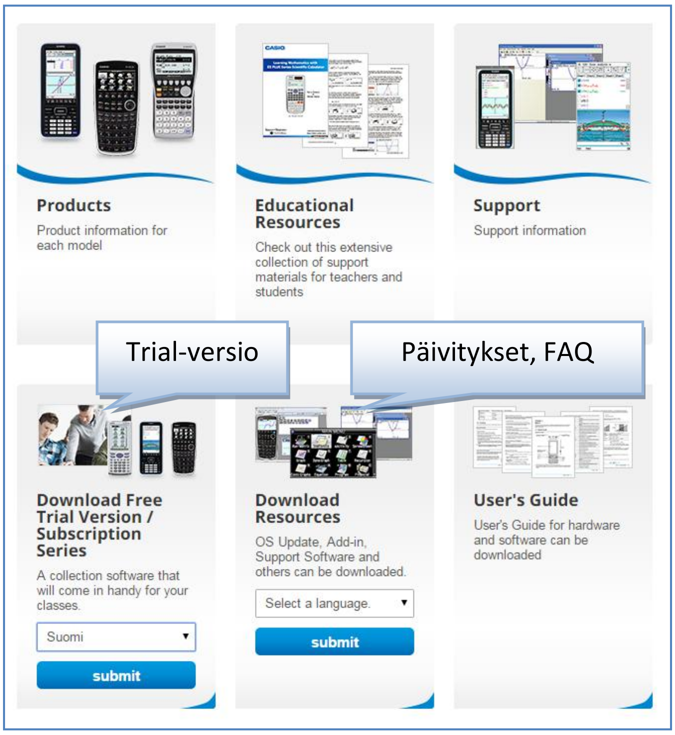
1273475677897

$1*10^{12}+2*10^{11}+n*10^{10}+3*10^{9}+4*10^{8}+n*10^{7}+5*10^{6}+6*10^{5}+7*10^{4}+n*10^{3}+8*10^{2}+9*10^{1}+n*10^{0}|n=8$

1283485678898

$1*10^{12}+2*10^{11}+n*10^{10}+3*10^{9}+4*10^{8}+n*10^{7}+5*10^{6}+6*10^{5}+7*10^{4}+n*10^{3}+8*10^{2}+9*10^{1}+n*10^{0}|n=9$

1293495679899



Ilmainen trial-versio ClassPad II Manager-ohjelmasta on ladattavissa kansainvälisiltä sivuilta osoitteessa https://edu.casio.com etusivun alareunan linkistä.

Näiltä sivuilta löydät myös päivitykset sekä laskimiin että ohjelmiin. Voit myös kirjautua sisään ja hallinnoida lisenssejäsi.

Usein Kysytyt Kysymykset (UKK, FAQ) on suomennettu palvelemaan suomalaisia asiakkaita. Löydät vinkkejä ja vastauksia useimmin esitettyihin kysymyksiin.

Tutkitaan näiden lukujen osamäärät ja jakojäännökset jaettaessa luvuilla 3, 6 ja 9:

propFrac(1203405670890/{3,6,9})

{401135223630, 200567611815, 133711741210}

propFrac(1213415671891/{3,6,9})

$$\left\{\frac{1}{3}+404471890630, \frac{1}{6}+202235945315, \frac{4}{9}+134823963543\right\}$$

propFrac(1223425672892/{3,6,9})

$$\left\{\frac{2}{3}+407808557630, \frac{1}{3}+203904278815, \frac{8}{9}+135936185876\right\}$$

propFrac(1233435673893/{3,6,9})

$$\left\{411145224631, \frac{1}{2}+205572612315, \frac{1}{3}+137048408210\right\}$$

propFrac(1243445674894/{3,6,9})

$$\left\{\frac{1}{3}+414481891631, \frac{2}{3}+207240945815, \frac{7}{9}+138160630543\right\}$$

propFrac(1253455675895/{3,6,9})

$$\left\{\frac{2}{3}+417818558631, \frac{5}{6}+208909279315, \frac{2}{9}+139272852877\right\}$$

propFrac(1263465676896/{3,6,9})

$$\left\{421155225632, 210577612816, \frac{2}{3}+140385075210\right\}$$

propFrac(1273475677897/{3,6,9})

$$\left\{\frac{1}{3}+424491892632, \frac{1}{6}+212245946316, \frac{1}{9}+141497297544\right\}$$

propFrac(1283485678898/{3,6,9})

$$\left\{\frac{2}{3}+427828559632, \frac{1}{3}+213914279816, \frac{5}{9}+142609519877\right\}$$

propFrac(1293495679899/{3,6,9})

$$\left\{431165226633, \frac{1}{2}+215582613316, 143721742211\right\}$$

Vastaus:

a) kolmella, kun n ∈ {0, 3, 6, 9}

b) kuudella, kun n ∈ {0, 6}

c) yhdeksällä, kun n ∈ {0, 9}

CASIO

Tehtävä 12.

Polyunomi $P(x)=2x^3+ax^2-4x+b$ on jaollinen binomeilla $x-1$ ja $x+3$. Ratkaise yhtälö $P(x)=0$.

Ratkaisu 12:

Koska polynomi on jaollinen binomeilla $x-1$ ja $x+3$, niin polynomin kaksi nollakohtaa ovat 1 ja -3.

Sijoitetaan ehdot funktioon $P(x)$ ja ratkaistaan yhtälöpari:

Define $P(x)=2x^3+a*x^2-4x+b$

done

$$\begin{cases} P(1)=0 \\ P(-3)=0 \end{cases}\Bigg|_{a,b}$$

$\{a=5, b=-3\}$

Sijoitetaan saadut arvot polynomin lausekkeeseen:

$P(x)|\{a=5, b=-3\}$

$2\cdot x^3+5\cdot x^2-4\cdot x-3$

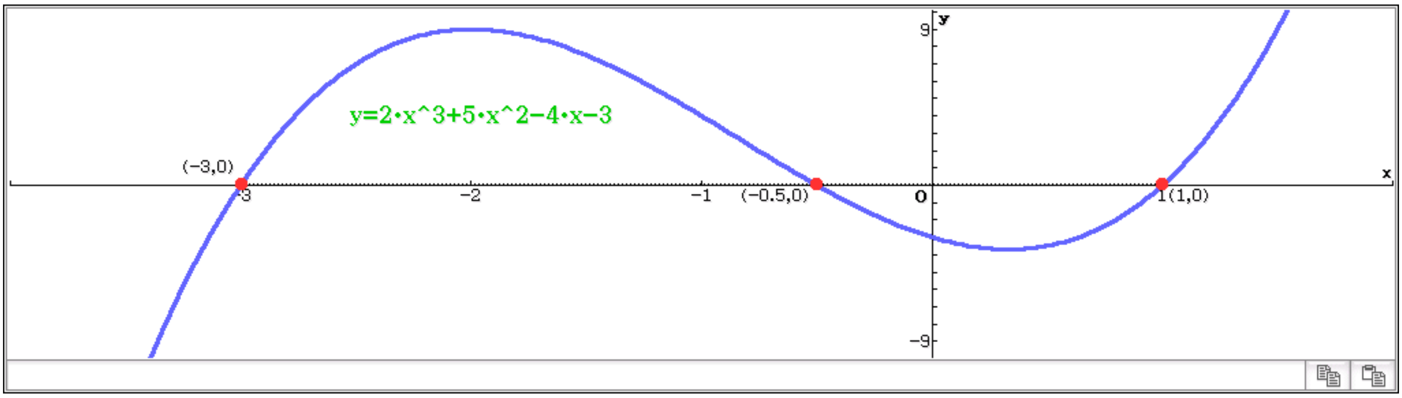
ja ratkaistaan näin saadun polynomin kaikki nollakohdat:

solve$(2\cdot x^3+5\cdot x^2-4\cdot x-3, x)$

$\{x=-3, x=1, x=-0.5\}$

Vastaus: $x=-3, x=1, x=-\frac{1}{2}$

Tehtävä 12 graafisesti nollakohdat merkittyinä kuvaajaan:



Tehtävä 13.

a) Anna esimerkki rajoitetusta lukujonosta, joka ei suppene. Perustele väitteesi.

b) Anna esimerkki vähenevästä lukujonosta, joka ei ole rajoitettu. Perustele väitteesi.

c) Määritä jokin sellainen luku $p>0$, että funktion $f(x)=x^{-p}$ epäoleellinen integraali $\int_1^{\infty} f(x)dx$

suppenee, mutta epäoleellinen integraali $\int_1^{\infty} f\sqrt{(x)}dx$ hajaantuu.

Ratkaisu 13:

a) Esim. alternoiva jono $a_n=(-1)^n$, $n=1,2,3,...$ antaa parillisilla eksponenteilla arvon 1 ja parittomilla -1. Jonon raja-arvoa ei siis ole eikä jono suppene, vaikkakin se on rajoitettu $-1 \le a_n \le 1$ kaikille $n=1,2,3,...$

b) Esim. jono $b_n=-n$, $n=1,2,3,...$ on peräkkäisten pienenevien kokonaislukujen jonona vähenevä. Se ei ole rajoitettu, sillä $\lim_{n \to \infty} (b_n)=-\infty$.

c) Esim. $p=1.5$ sillä

$$\int_1^{\infty} x^{-1.5}dx$$

2

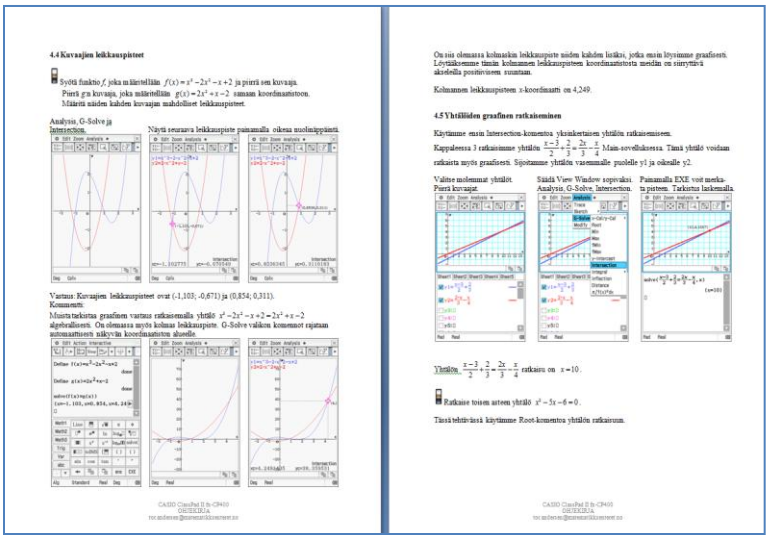
eli epäoleellisella integraalilla on raja-arvo ja se suppenee.

$$\int_1^{\infty} \sqrt{x^{-1.5}}dx$$

∞

eli epäoleellisella integraalilla ei ole raja-arvoa ja se hajaantuu.

Toisen asteen opintoja niputtava kirja runsaiden esimerkkien kera on vapaasti ladattavissa linkistä.



Tehtävä 14. (jokeri)

Olkoot $a>0$, $b>0$ ja $c>0$. Tarkastellaan avaruuden suoraa S, joka kulkee origon ja pisteen (a,b,c) kautta. Suoran S suunta voidaan ilmoittaa kolmen suuntakosinin avulla. Suuntakosinit $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ja $\cos\gamma$ ovat vektorin $ai+bj+ck$ ja yksikkövektoreiden i, j ja k välisten kulmien α, β ja γ kosineita.

a) Laske suoran $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{7}$ suuntakosinit. (3 p.)

b) Laske a-kohdan suuntakosinien neliöiden summa. (2 p.)

c) Määritä vastaavat suuntakulmat α, β ja γ asteen kymmenesosan tarkkuudella. (2 p.)

d) Osoita, että b-kohdan tulos on sama kaikille tehtävän alkuosan ehdot toteuttaville suorille. (2 p.)

Ratkaisu 14:

a) Suoran suuntavektori on $2i+3j+7k$ ja suuntavektorin pituus on

$\sqrt{2^2+3^2+7^2}$

$\sqrt{62}$

Suuntakosinit ovat

$\frac{\text{dotP}([2\ 3\ 7],[1\ 0\ 0])}{\sqrt{62}*1}$

$\frac{\sqrt{62}}{31}$

$\frac{\text{dotP}([2\ 3\ 7],[0\ 1\ 0])}{\sqrt{62}*1}$

$\frac{3\cdot\sqrt{62}}{62}$

$\frac{\text{dotP}([2\ 3\ 7],[0\ 0\ 1])}{\sqrt{62}*1}$

$\frac{7\cdot\sqrt{62}}{62}$

b) Lasketaan suuntakosinien neliöiden summa:

$\left(\frac{\sqrt{62}}{31}\right)^2+\left(\frac{3\cdot\sqrt{62}}{62}\right)^2+\left(\frac{7\cdot\sqrt{62}}{62}\right)^2$

1

c) Ratkaistaan suuntakulmat asteen kymmenyksen tarkkuudella:

$\text{solve}(\cos(\alpha)=\frac{\sqrt{62}}{31},\alpha)\,|\,0\le\alpha\le180$

$\{\alpha=75.3\}$

$\text{solve}(\cos(\beta)=\frac{3\cdot\sqrt{62}}{62},\beta)\,|\,0\le\beta\le180$

$\{\beta=67.6\}$

$\text{solve}(\cos(\gamma)=\frac{7\cdot\sqrt{62}}{62},\gamma)\,|\,0\le\gamma\le180$

$\{\gamma=27.3\}$

d) Mielivaltaisen pisteen (a,b,c) kautta kulkevan suoran suuntavektorin pituus on Pythagoraan lauseen nojalla $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, joten suuntakosinien neliöiden summa on

$\frac{a^2}{\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^2}+\frac{b^2}{\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^2}+\frac{c^2}{\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^2}$

$\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$

simplify(ans)

1

mot.

Tehtävä 15. (jokeri)

Kolmion kahden sivun pituudet ovat CA=a ja CB=b. Näiden sivujen välisen kulman puolittajasta kolmion sisälle jäävän osan pituus on k. Puolittaja jakaa kolmannen sivun kahteen osaan, joiden pituudet ovat AD=x ja DB=y. Osoita, että $k=\sqrt{ab-xy}$,

a) kun a=b. (3 p.)

b) kun a≠b. (6 p.)

Ratkaisu 15:

a) Jos oletetaan, että a=b, niin kolmion on oltava tasakylkinen ja kulmasta C piirretty kulmanpuolittaja kulkee vastaisen sivun AB keskipisteen kautta. Siis AD=BD ja x=y (1).

Pythagoraan lauseen nojalla $k=\sqrt{b^2-y^2}$ ja sijoittamalla tähän toisen b:n paikalle oletuksen mukaisesti a ja toisen y:n paikalle x (1) saadaan $k=\sqrt{ab-xy}$.
mot.

b) Kulmanpuolittajalauseen nojalla kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa. Merkitään vielä kulman ACB puolikasta α. Tällöin pätee ehdot

i) $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$ eli ay=bx (kulmanpuolittajalause)

ii) $x^2=a^2+k^2-2*a*k*\cos(\alpha)$ (kosinilause kolmiolle ADC)

iii) $y^2=b^2+k^2-2*b*k*\cos(\alpha)$ (kosinilause kolmiolle BDC)

Ehdoista ii) ja iii) saadaan (ratkaisemalla $2*k*\cos(\alpha)$)

$$\frac{x^2-a^2-k^2}{a}=\frac{y^2-b^2-k^2}{b}$$

$$\frac{x^2-a^2-k^2}{a}=\frac{y^2-b^2-k^2}{b}$$

ans*a

$$x^2-a^2-k^2=\frac{a\cdot(y^2-b^2-k^2)}{b}$$

Vinkkejä matemaattisiin projekteihin tai ryhmätöihin löytyy [opettajille suunnatussa osiossamme.]()

Sijoitetaan yhtälön oikean puolen lausekkeeseen $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$ ehdosta i):

$x^2-a^2-k^2=\frac{x\cdot(y^2-b^2-k^2)}{y}$

$$x^2-a^2-k^2=\frac{x\cdot(y^2-b^2-k^2)}{y}$$

ans*y

$$y\cdot(x^2-a^2-k^2)=x\cdot(y^2-b^2-k^2)$$

expand(ans)

$$x^2\cdot y-a^2\cdot y-k^2\cdot y=x\cdot y^2-b^2\cdot x-k^2\cdot x$$

solve$(x^2\cdot y-a^2\cdot y-k^2\cdot y=x\cdot y^2-b^2\cdot x-k^2\cdot x, k)$

$$\left\{k=-\sqrt{\frac{-(x^2\cdot y-x\cdot y^2-a^2\cdot y+b^2\cdot x)}{x-y}}, k=\sqrt{\frac{-(x^2\cdot y-x\cdot y^2-a^2\cdot y+b^2\cdot x)}{x-y}}\right\}$$

$k^2=\left(-\sqrt{\frac{-(x^2\cdot y-x\cdot y^2-a^2\cdot y+b^2\cdot x)}{x-y}}\right)^2$

$$k^2=\frac{-(x^2\cdot y-x\cdot y^2-a^2\cdot y+b^2\cdot x)}{x-y}$$

Muokataan yhtälön oikeaa puolta:

expand$\left(\frac{-(x^2\cdot y-x\cdot y^2-a^2\cdot y+b^2\cdot x)}{x-y}\right)$

$$\frac{-x^2\cdot y}{x-y}+\frac{x\cdot y^2}{x-y}+\frac{a^2\cdot y}{x-y}-\frac{b^2\cdot x}{x-y}$$

Sijoitetaan ehdosta i) ay=bx, jolloin saadaan

$\frac{-x^2\cdot y}{x-y}+\frac{x\cdot y^2}{x-y}+\frac{a*b*x}{x-y}-\frac{a*b*y}{x-y}$

$$\frac{-x^2\cdot y}{x-y}+\frac{x\cdot y^2}{x-y}+\frac{a\cdot b\cdot x}{x-y}-\frac{a\cdot b\cdot y}{x-y}$$

simplify(ans)

$$-x\cdot y+a\cdot b$$

Siis $k^2=a\cdot b-x\cdot y$ ja ratkaisemalla tästä k (k>0) saadaan väite $k=\sqrt{-x\cdot y+a\cdot b}$. mot

Tehtävän 15 havaintokuva: