CASIO

LASKE LAUDATUR CLASSWIZ-LASKIMELLA

Lyhyt matematiikka, kevät 2019

Tiivistelmä

Kevään 2019 yo-kokeiden ratkaisut ClassWiz-laskimella laskettuina.
Katso lisää laskimista nettisivuiltamme www.casio-laskimet.fi

Pepe Palovaara
pepe.palovaara@casio.fi

Hyvä lukija,

Pienellä, mutta tehokkaalla ClassWiz-sarjan laskimella saa ihmeitä aikaan! Edessäsi on kevään 2019 lyhyen matematiikan kokeen ratkaisut. Kokeen rakenne oli entisellään, tosin pisteytys tehtävää kohden muuttui 6:sta 12:een mahdollistaen perustelujen aiempaa tarkemman pisteytyksen. Näin kokeen ohje asian kiteyttää:

”Koe koostuu 13 tehtävästä, joista vastataan kymmeneen. Tehtävät on jaettu kolmeen osaan. A-osassa on neljä kaikille pakollista tehtävää. B1-osassa on viisi tehtävää, joista vastataan kolmeen. B2-osassa on neljä tehtävää, joista vastataan kolmeen. Kaikki tehtävät arvostellaan pistein 0–12, joten kokeen maksimipistemäärä on 120.”

Mukana oli myös tehtäviin liittyviä aineistoja. Tämä vihkonen on ladattavissa pdf-muodossa Casion kotisivuilta. Tukesi löytyy osoitteesta

http://www.casio-laskimet.fi

Casio Academy – videot soittolistalla

Tänä keväänä jo 4. kertaa pidetyssä Casio Academy -harjoittelupäivässä opiskelijoilla oli mahdollisuus harjoitella matematiikan yo-kokeisiin netin välityksellä matematiikan opettajien kera. Opiskelijoiden tukeminen ja opinnoissa auttaminen on meille tärkeää. Aiemmat malliratkaisut löytyvät tallenteina YouTubesta

https://bit.ly/casio-academy

ClassWiz-sarja

ClassWiz-sarjassa on kolme mallia: fx-81EX (pinkki ja musta), fx-85EX ja fx-991EX. Kaikissa laskimissa on kolme yhteistä sovellusta laskemiseen, tilastoihin ja funktion arvotaulukoihin. Mallissa fx-991EX on lisäksi yhdeksän muuta sovellusta ja ratkaisimet yhtälöille.

Mukavia hetkiä yo-kokeiden ratkaisujen parissa!

Espoossa 24.4.2019

Pepe Palovaara

Nordic School Coordinator
Casio Scandinavia

A-osa

Ratkaise kaikki tämän osan tehtävät 1–4.

1. Lukujonojen määritelmiä (12 p.)

Aineisto:
1.A Luettelo: Lukujonot A–G

Yhdistä kukin lukujonon määritelmä 1.1.–1.6. siihen jonoon A–G, joka määritelmän perusteella saadaan. Kaikki jonot alkavat jäsenestä a_1, ja yksi vastausjono jää käyttämättä. Vastauksia ei tarvitse perustella.

1.1. $a_n = 2n - 1$ C. (1, 3, 5, 7, ...) (2 p.)

1.2. $a_n = n^2$ D. (1, 4, 9, 16, ...) (2 p.)

1.3. $a_n = n^3$ E. (1, 8, 27, 64, ...) (2 p.)

1.4. $a_n = 2^n$ G. (2, 4, 8, 16, ...) (2 p.)

1.5. $a_1 = 2$ ja $a_n = a_{n-1} + 2$, kun $n \geq 2$ F. (2, 4, 6, 8, ...) (2 p.)

1.6. $a_1 = 1, a_2 = 2$ ja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, kun $n \geq 3$ B. (1, 2, 3, 5, ...) (2 p.)

2. Paraabelien huiput (12 p.)

Määritä seuraavien paraabelien huippujen x- ja y-koordinaatit. Vastaukset voi antaa vain tekstimuodossa. Vastauksia ei tarvitse perustella.
Anna vastaukset muodossa ”x =___, y =___”.

2.1. $y = 2x^2 + 1$ (4 p.)

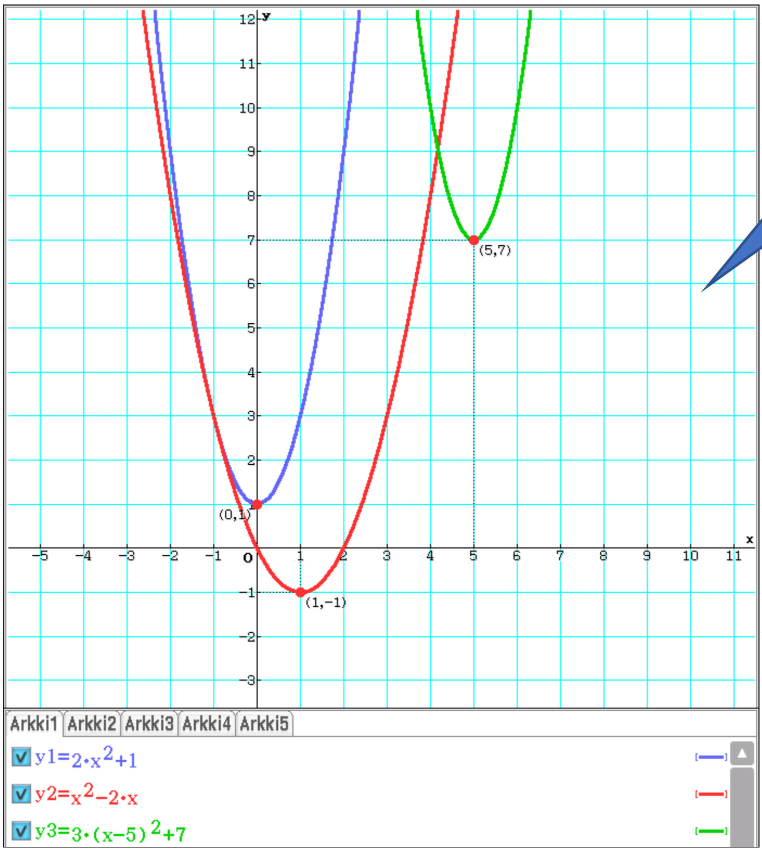
2.2. $y = x^2 - 2x$ (4 p.)

2.3. $y = 3(x - 5)^2 + 7$ (4 p.)

2.1. Paraabelin huippu on ylöspäin avautuvassa paraabelissa ainoassa derivaatan nollakohdassa. y'=4x=0, jos ja vain jos x=0. Tällöin $y=2*0^2+1=1$.

2.2. Parabelin huippu on ylöspäin avautuvan paraabelin nollakohtien puolivälissä. Nollakohdat ovat $x^2-2x=0$, josta x(x−2)=0 ja edellen x=0 tai x=2. Siis nollakohta on $x=\frac{2-0}{2}=1$ ja $y=1^2-2*1=-1$.

2.3. Paraabelin huippu on ylöspäin avautuvassa paraabelissa luettavissa huippumuotoisesta yhtälöstä $y-7=3(x-5)^2$, josta x=5 ja y=7.

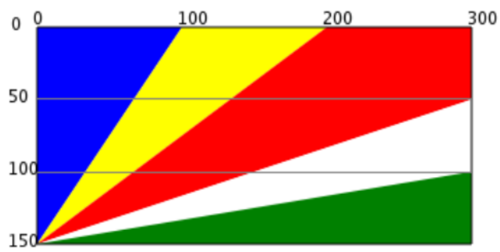


A-osassa ei laskimet ole käytössä, mutta oheisessa kuvassa on havainnollistettu paraabelien kuvaajat ClassPad Managerin avulla.

3. Värikäs lippu (12 p.)

Aineisto:
3.A Kuva: Seychellien lippu

Seychellien lipussa on viisi eri väriä kuvan 3.A mukaisesti. Kuinka monta prosenttia kukin väri peittää koko lipun pinta-alasta?



Lähde: Prog Zoo. https://progzoo.net/wiki/Flags_with_Polygons_Tutorial. Viitattu 27.8.2018.

Sinisen kolmion pinta−ala on $\frac{1}{2}*100*150=7500$ pay.

Keltaisen kolmion pinta−ala on $\frac{1}{2}*100*150=7500$ pay.

Valkoisen kolmion pinta−ala on $\frac{1}{2}*50*300=7500$ pay.

Vihreän kolmion pinta−ala on $\frac{1}{2}*50*300=7500$ pay.

Loput lipun pinta−alasta on punaista eli $150*300-4*7500=15000$ pay.

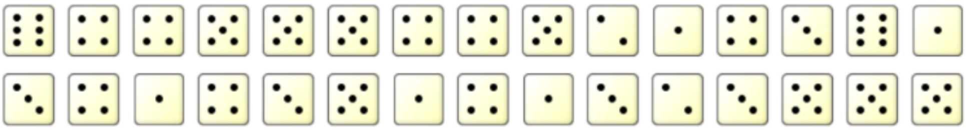
Suhteelliset osuudet ovat punaiselle värille $\frac{15000}{45000}=\frac{1}{3}\approx 33,3\%$ ja kaikille muille $\frac{7500}{45000}=\frac{1}{6}\approx 16,7\%$.

4. Tilastokysymyksiä nopanheitosta (12 p.)

Aineisto:
4.A Kuva: Nopat

Heitettiin 30 noppaa, ja saatiin kuvan 4.A mukainen tulos, jota kutsutaan tässä tehtävässä aineistoksi.

4.1. Muodosta aineiston perusteella frekvenssitaulukko. Voit laatia taulukon kaavaeditorin taulukko-ominaisuudella tai pelkkänä tekstinä. (2 p.)
4.2. Mikä on aineiston moodi? Perustele lyhyesti vastauksesi. (2 p.)
4.3. Mikä on aineiston mediaani? Perustele lyhyesti vastauksesi. (3 p.)
4.4. Mikä on aineiston keskiarvo? Perustele lyhyesti vastauksesi. (3 p.)
4.5. Mikä on silmäluvun 6 tilastollinen todennäköisyys tässä aineistossa? (2 p.)



Lähde: RANDOM.ORG. https://www.random.org/dice/. Viitattu 23.1.2018.

4.1. $\begin{bmatrix} \text{Silmäluku} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \text{Frekvenssi} & 5 & 2 & 5 & 8 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

4.2. Moodi on eniten esiintyvä arvo tai arvot eli 4 ja 5, sillä niillä on suurin frekvensi 8.

4.3. Mediaani on järjestetyn aineiston keskimmäinen tai keskimmäiset arvo(t) eli 4, sillä aineiston 15. ja 16. arvo on 4.

4.4. Keskiarvo on $\frac{5*1+2*2+5*3+8*4+8*5+2*6}{30}=3,6$ eli silmälukujen summa jaettuna noppien lukumäärällä.

4.5. Tilastollinen todennäköisyys on esiintymiskertojen määrä jaettuna kaikkien tulosten lukumäärällä eli $\frac{2}{30}=\frac{1}{15}=6,7\%$.

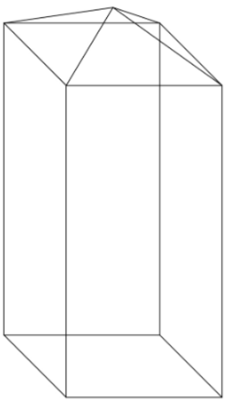
B1-osa

Ratkaise kolme tehtävistä 5–9. Tässä osassa saat käyttää kaikkia koejärjestelmän ohjelmia ja omaa laskintasi, kun olet palauttanut A-osan vastaukset.

5. Paljonko tölkissä on ilmaa? (12 p.)

Aineisto:
5.A Kuva: Maitotölkki

Maitotölkki (aineisto 5.A) sisältää $1{,}75$ litraa maitoa. Tölkin pohja on neliö, jonka sivun pituus on $9{,}25$ cm. Tölkin sisäosan kokonaiskorkeus on $23{,}0$ cm, ja sen alaosa koostuu suorakulmaisesta särmiöstä, jonka korkeus on $20{,}0$ cm. Tölkin yläosa muodostuu pyramidista. Kuinka paljon ilmaa on avaamattomassa maitotölkissä?



Kuva: YTL.

Lasketaan koko maitotölkin tilavuus:

$$9.25^2\times 20+\frac{9.25^2}{3}\times 3 \qquad \frac{28749}{16}$$

Vähentämällä tästä maidon määrä, saadaan ilman tilavuudeksi (cm^3)

$$\frac{28749}{16}-1750 \qquad 46.8125$$

6. Puun kasvu (12 p.)

Metsäntutkija mallintaa puun kasvua. Mallissa puunrunko ajatellaan suoraksi ympyräpohjaiseksi kartioksi. Ajanhetkellä $t=0$ puunrunko on korkeudeltaan 6 metriä ja tyvestä halkaisijaltaan 8 cm paksu. Joka vuosi puu kasvaa pituutta 45 cm ja tyven halkaisija kasvaa $0{,}6$ cm. Muodosta funktio, joka kuvaa puunrungon tilavuutta ajan funktiona. Mikä on rungon tilavuus 20 vuoden kuluttua?

Funktio on (ajan yksikkönä x vuotta). 20 vuoden kuluttua puun tilavuus on (cm^3) eli n. 157000 cm^3.

$$f(x)=\frac{\pi}{3}(4+0.3x)^2(\ldots$$

$$f(x)=\ldots^2(600+45x)$$

x	f(x)
20	157079.6327

7. Mikko vaihtaa rahaa (12 p.)

Mikko lähtee matkalle Varsovaan ja Prahaan. Hän joutuu vaihtamaan rahaa useita kertoja ennen matkaa ja matkan aikana. Jokaisessa vaihdossa hän menettää vaihtotappiona 5 prosenttia rahan arvosta. Hän vaihtaa 300 euroa Puolan złotyiksi ja 200 euroa Tšekin korunoiksi. Hän ei muista, millä kurssilla vaihto suoritettiin, mutta pitää kirjaa siitä, kuinka suuri osuus rahoista tulee käytettyä.

Puolassa hän huomaa, että kolmasosa złoteista on jäänyt käyttämättä, ja hän vaihtaa ne lähtiessään Tšekin korunoiksi. Kotiin tullessaan hänellä on vielä viidesosa kaikista korunoista jäljellä, ja hän vaihtaa ne takaisin euroiksi.

Kuinka monta euroa hän saa takaisin? Anna vastaus euron tarkkuudella.

5 prosentin vaihtotappio huomioiden Mikolla on 1. vaihdon jälkeen

zloteja

$$0.95 \times 300 = 285$$

ja korunoita

$$0.95 \times 200 = 190$$

Kolmasosa näistä zloteista euroissa on

$$\frac{1}{3} \times 285 = 95$$

Vaihtotappion jälkeen hän saa korunoita

$$0.95 \times 95 = 90.25$$

Viidesosa käytössä olleista korunoista on euroissa

$$\frac{1}{5}(190 + 90.25) = 56.05$$

ja tästäkin summasta 5% menee vaihtopalkkioihin. Mikolle jää rahaa

$$0.95 \times 56.05 = 53.2475$$

eli n. 53,20€.

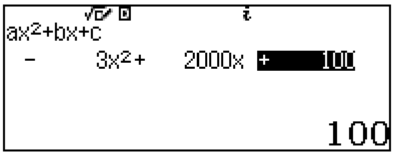
8. Lukujonon kasvaminen ja väheneminen (12 p.)

Tarkastellaan lukuja

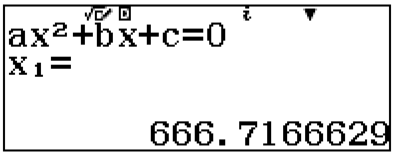
$$a_n = -n^3 + 1000n^2 + 100n + 2019,$$

kun $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 1000$. Etsi derivaatan avulla sellainen indeksin k arvo, että lukujono $(a_0, \ldots, a_k)$ on kasvava ja lukujono $(a_k, \ldots, a_{1000})$ on vähenevä.

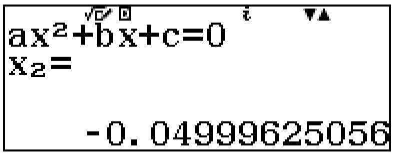
Derivaatan nollakohdiksi saadaan yhtälön



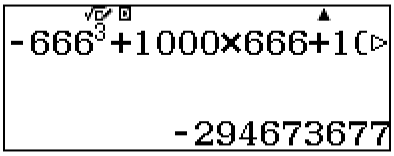
ratkaisuina

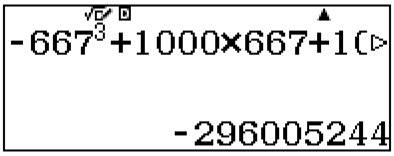


ja



Koska kyseessä on lukujono, ei negatiivinen juuri kelpaa. Lasketaan lukujonon 666. ja 667. jäsen:





Näistä jälkimmäinen on suurempi. Koska lukujonoa kuvaavan funktion derivaatan kuvaaja on alaspäin avautuva paraaabeli, kasvaa lukujono 667. jäseneen saakka ja muuttuu sen jälkeen väheneväksi.

9.1. (Vanha opetussuunnitelma, ennen 1.8.2016 lukion aloittaneet)

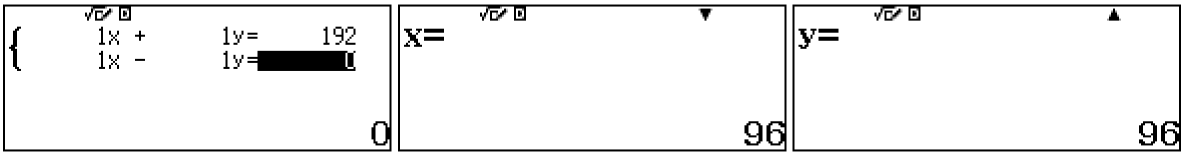
Vuoroveden korkeutta kellonajan t (yksikkönä tunti, $t = 0$ keskiyöllä) funktiona voidaan kuvata funktion

$$f(t) = A + B\sin\left(\frac{2\pi}{12{,}4}(t - t_0)\right)$$

avulla. Tässä A, B ja t_0 ovat vakioita. Norjan Tromssassa merenpinta on eräänä päivänä kello 9.00 matalimmillaan. Seuraavan kerran merenpinta on matalimmillaan samana päivänä kello 21.24. Korkeimmillaan merenpinnan korkeus näin kuvattuna on 192 cm ja matalimmillaan 0 cm.

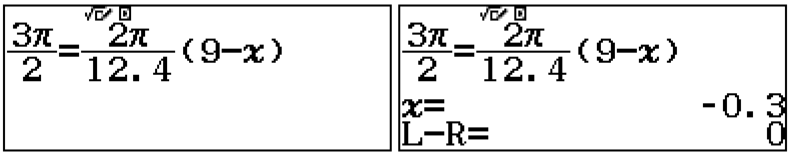
Määritä näiden tietojen avulla funktion $f(t)$ lausekkeessa esiintyvien vakioiden arvot. Anna vastaukset kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

Koska sinifunktio on rajoitettu -1≤sin(x)≤1, niin funktion suurin arvo on A+B (B>0). Vastaavasti pienin arvo on A-B. Ratkaistaan näiden ehtojen avulla yhtälöparista A ja B laskimeen sopivasta muodosta:



Siis kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella A=B=96,0.

Koska funktion pienin arvo saadaan ajan hetkellä t=9 tuntia ja tiedetään, että sinifunktion pienin arvo saadaan kulman arvolla 3π/2, saadaan t_0 ratkaistua yhtälöstä laskimelle sopivasta muodosta.



Tämä on kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella -0,300.

9.2. (Uusi opetussuunnitelma, 1.8.2016 tai sen jälkeen lukion aloittaneet)

Aineisto:
9.A Teksti: Ilmasto-opas

Ilmasto-oppaan (aineisto 9.A) perusteella oletetaan, että vuoden 2010 tyyppisen ennätyslämpimän heinäkuun todennäköisyys on joka vuosi $\frac{1}{60}$. Tapahtumat oletetaan myös toisistaan riippumattomiksi. Kuinka suurella todennäköisyydellä Suomessa

– ei ole yhtään ennätyslämmintä heinäkuuta seuraavien 30 vuoden aikana? (4 p.)
– on vähintään kaksi ennätyslämmintä heinäkuuta seuraavien 30 vuoden aikana? (8 p.)

Korkeiden lämpötilojen todennäköisyys on moninkertaistunut jo nyt. Vaikka vuotuisten keskilämpötilojen mukainen lämpeneminen on maassamme ollut toistaiseksi suhteellisen pientä verrattuna eri vuosien väliseen suureen vaihteluun, ovat ennätyskorkeiden kuukausittaisten ja vuodenaikoja koskevien keskilämpötilojen todennäköisyydet kuitenkin jo moninkertaistuneet. Mikäli jo tähän mennessä tapahtunutta lämpenemistä ei oteta huomioon, toistuu esimerkiksi vuoden 2010 ennätyslämmin heinäkuu noin 300 vuoden välein. Kun globaali ilmastonmuutos otetaan huomioon, pienenee tämä aika noin 60 vuoteen.

Lähde: Ilmasto-opas. https://ilmasto-opas.fi/. Viitattu 13.2.2018.

Riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännön avulla P(”Suomessa ei ole yhtään ennätyslämminta heinäkuuta seuraavien 30 vuoden aikana”) on (tallennetaan saatu arvo muutujaksi A)

$$\left(1-\frac{1}{60}\right)^{30}$$
$$0.6039803894$$

P(”Vähintään kaksi…”)=1-P(”Ei yhtään tai yksi…”) saadaan laskimella

$$1-\left(A+30\mathrm{C}1\times\left(1-\frac{1}{60}\right)^{29}\times\frac{1}{60}\right)$$
$$0.08891093806$$

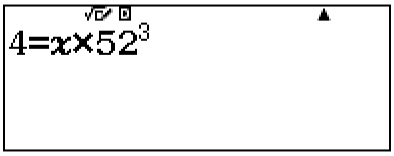
eli n. 0,089.

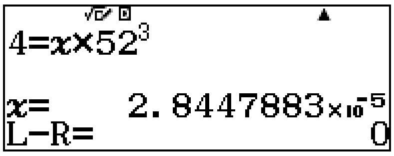
10. Miten vauva kasvaa? (12 p.)

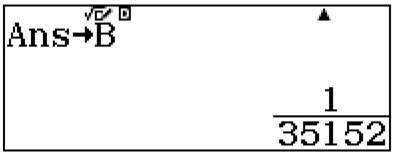
Vauvan painon voidaan arvioida kasvavan q^3-kertaiseksi, kun vauvan pituus kasvaa q-kertaiseksi. Tämä perustuu siihen, että vauva on kolmiulotteinen ja kasvua tapahtuu suurin piirtein yhtä paljon jokaiseen suuntaan. Oletetaan, että vauva on syntyessään 52 cm pitkä ja painaa $4{,}0$ kilogrammaa.

10.1. Arvioi vauvan painoa tällä menetelmällä, kun vauvan pituus on $55, 60, 65$ ja 70 cm. (4 p.)
10.2. Piirrä kuvaaja, josta ilmenevät syntymämitat ja kohdassa 10.1. lasketut tiedot. (4 p.)
10.3. Voiko samaa arviointitapaa käyttää aikuiseksi asti? Valota esimerkeillä ja perustele, miksi uskot menetelmän toimivan tai olevan toimimatta. (4 p.)

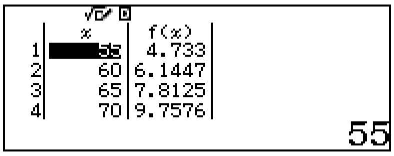
Vauvan painoa kuvaa funktio m(x)=k*x^3 yksikkönä kg, missä k on verrannollisuuskerroin, x=pituus (cm). Sijoittamalla vauvan syntymämitat tähän funktioon, saadaan yhtälö 4=k*52^3. Ratkaistaan tästä yhtälöstä k laskimelle sopivasta muodosta (sijoitetaan saatu arvo muuttujan B paikalle):







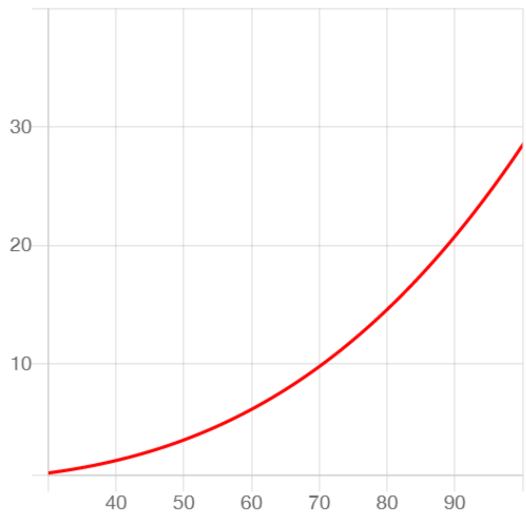
Lasketaan näin saadun funktion arvoja annetuille pituuksille:



	x	f(x)
1	55	4.733
2	60	6.1447
3	65	7.8125
4	70	9.7576

55

Piirretään funktion kuvaaja Casio EDU+ sovelluksen avulla (ei saatavilla koetilanteessa, koska vaatii internet-yhteyden). Vaaka-akselilla on vauvan pituus (cm) ja pystyakselilla paino (kg).



Malli ei sovi aikuiselle, sillä aikuinen ei ole yhdenmuotoinen vauvan kanssa. Mittasuhteet muuttuvat. Kaavan mukaan laskettuna 180cm pituinen aikuinen painaisi m(180)≈166kg, mikä ei vastaa kansallista keskiarvoa.

Vastaavasti 100kg painoinen ihminen olisi n. 152cm pitkä, mikä puolestaan on liian vähän.

11. Harrin palkka (12 p.)

Harri saa palkkaa $4\,200$ euroa kuukaudessa ja hänen työtuntimääränsä on 155 tuntia kuukaudessa. Hän arvioi tuntipalkkaansa seuraavalla tavalla: *Jos työtuntimääräni olisi* 160 *tuntia ja palkkani* $4\,000$ *euroa, niin tuntipalkkani olisi* $4\,000/160 = 25$*. Tässä ei ole otettu huomioon* 200 *euroa palkasta, joten virhe on runsas euro tuntia kohti; palkka on siis runsaat* 26 *euroa. Todellinen työtuntimäärä on* 155*, ei* 160*, ja siitä tulee varmaankin pieni virhe, joten todellinen tuntipalkka on ehkäpä* 27 *euroa.*

11.1. Kuinka monta prosenttia enemmän tai vähemmän Harri arvioi saavansa palkkaa tunnilta kuin hän oikeasti saa? (4 p.)

11.2. Selitä Harrin päättelyn vaiheita ja arvioi, perustuuko päättely päteviin arvioihin. (8 p.)

Oikea palkka on 4200€/kk. Harrin arvioima palkka saadaan laskimella

$$155\times 27$$
$$4185$$

Arvio on siis todellista palkkaa pienempi. Suhteelliseksi virheeksi saadaan

$$\frac{4185-4200}{4200}\times 100$$
$$-0.3571428571$$

eli n. 0,36% todellista pienempi. Arvio oli kuitenkin todella tarkka.

Harri pyöristää ajatuksissaan tuntimäärää ylöspäin ja palkkaa alaspäin, mikä aiheuttaa osin virheiden kumoutumisen. Lasku 4000/160=25€ on oikein. Koska 200/160=1,25€, niin päätelmä runsaasta 26€ tuntipalkasta on oikeansuuntainen.

Korjaus tuntimäärän osalta on myös oikeansuuntainen, sillä jakajan pienentyessä 160:stä 155:een tuntipalkka nousee. Arvio 27€ tuntipalkasta ei heitä kauas todellisuudesta, sillä todellisuudessa jakajan muutos nostaisi tuntipalkaksi

$$\frac{160}{155}\times 26.25$$
$$27.09677419$$

eli n. 27,10€.

12. Elisan laina (12 p.)

Aineisto:
12.A Taulukko: Lainan korko

Elisa otti aikanaan 100 000 euron suuruiselle kymmenen vuoden tasalyhennyslainalleen korkokaton. Pankista sai lainalle 4,5 prosentin korkokaton 5 000 euron hintaan. Laina oli sidottu 12 kuukauden euriborkorkoon, joka vaihteli laina-aikana taulukon 12.A mukaan. Kaikki tehtävässä mainitut korkokannat sisältävät korkomarginaalin, ja lainaa lyhennetään kuukausittain.

Kannattiko Elisan ottaa lainalleen korkokattoa? Korkokaton sijaan hän olisi voinut sijoittaa 5 000 euroa säästötilille, jolloin talletuksen nykyinen arvo olisi 5 700 euroa. Muita rahan arvon muutoksia ei tarvitse huomioida.

Voit halutessasi esittää laskut taulukkolaskentaohjelmasta otetussa kuvakaappauksessa, kunhan vastauksesta selviää, miten tuloksiin on päästy.

12.A Taulukko: Lainan korko

Lainavuosi	Korkoprosentti
1	2,4
2	2,5
3	2,3
4	2,9
5	3,4
6	3,4
7	5,5
8	5,7
9	5,0
10	5,1

Lähde: YTL.

ClassWiz-laskimen fx-991EX taulukkolaskentaan sopii 5*45 kokoinen taulukko, joten tehtävän taulukko on tehty ClassPad Managerilla. ClassPad Manager on käytettävissä yo-kokeiden B-osiossa.

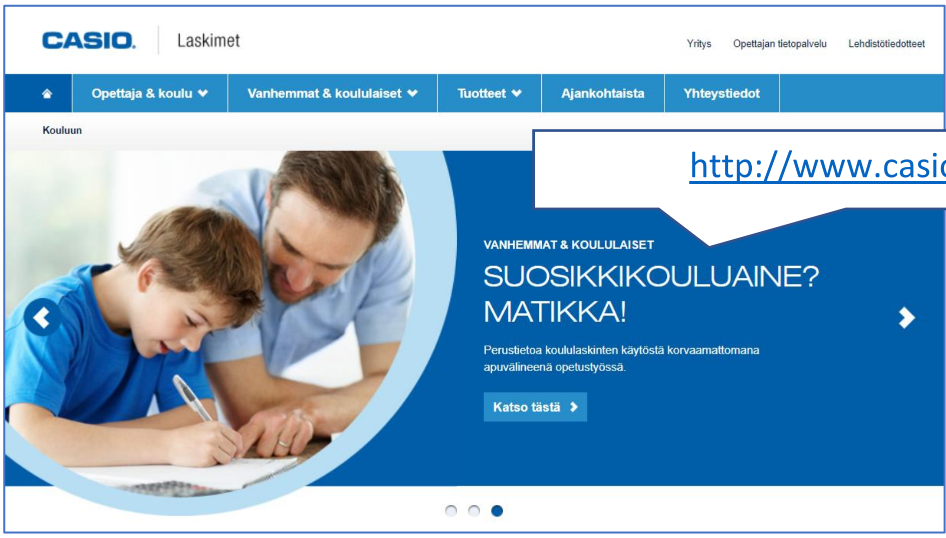
Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla kumpaakin vaihtoehtoa koskevat lainan kustannukset.
Mikäli korkokatto kannatti ottaa, on sen säästettävä yli 5700 euroa verrattuna toiseen vaihtoehdoista.

Laskutaulukko =>

Laskukaavat ovat
- sarakkeessa C vuosikorko sarakkeesta B on jaettu 12:lla
- solualueessa D1:O12 on jäljellä olevasta lainasta vähennetty vakiolyhennys 833.33€
- solualueessa D5:O24 on jäljellä oleva lainan määrä kerrottu kuukausittaisella korkoprosentilla ja jaettu 100:lla, esim. solu E15=E3•$C15/100
- solualueessa B28:B37 on yli 4.5% vuosikorko korvattu korkokatolla
- solualue D28:D37 samoin kuin D5:O24
- sarakkeessa on laskettu yhteen kunkin kuun korkomenot ja soluiss P25 ja P37 on kokonaiskorot

Korkokaton kanssa korkojen osuus on 15160.42€ ja ilman korkokattoa 15929.17€. Koska korkokatto säästää kuluissa 15929.17−15160.42=768.75€, mutta maksaa 5700€, ei sen ottaminen kannata.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
2	vuosi	p%	kk%	tammi	helmi	maalis	huhti	touko	kesä	heinä	elo	syys	loka	marras	joulu	
3	1	2.40	0.2000	100000.00	99166.67	98333.34	97500.01	96666.68	95833.35	95000.02	94166.69	93333.36	92500.03	91666.70	90833.37	
4	2	2.50	0.2083	90000.00	89166.67	88333.34	87500.01	86666.68	85833.35	85000.02	84166.69	83333.36	82500.03	81666.70	80833.37	
5	3	2.30	0.1917	80000.00	79166.67	78333.34	77500.01	76666.68	75833.35	75000.02	74166.69	73333.36	72500.03	71666.70	70833.37	
6	4	2.90	0.2417	70000.00	69166.67	68333.34	67500.01	66666.68	65833.35	65000.02	64166.69	63333.36	62500.03	61666.70	60833.37	
7	5	3.40	0.2833	60000.00	59166.67	58333.34	57500.01	56666.68	55833.35	55000.02	54166.69	53333.36	52500.03	51666.70	50833.37	
8	6	3.40	0.2833	50000.00	49166.67	48333.34	47500.01	46666.68	45833.35	45000.02	44166.69	43333.36	42500.03	41666.70	40833.37	
9	7	5.50	0.4583	40000.00	39166.67	38333.34	37500.01	36666.68	35833.35	35000.02	34166.69	33333.36	32500.03	31666.70	30833.37	
10	8	5.70	0.4750	30000.00	29166.67	28333.34	27500.01	26666.68	25833.35	25000.02	24166.69	23333.36	22500.03	21666.70	20833.37	
11	9	5.00	0.4167	20000.00	19166.67	18333.34	17500.01	16666.68	15833.35	15000.02	14166.69	13333.36	12500.03	11666.70	10833.37	
12	10	5.10	0.4250	10000.00	9166.67	8333.34	7500.01	6666.68	5833.35	5000.02	4166.69	3333.36	2500.03	1666.70	833.37	
13				Maksettu korko kuukausittain												
14	vuosi	p%	kk%	tammi	helmi	maalis	huhti	touko	kesä	heinä	elo	syys	loka	marras	joulu	Yhteensä
15	1	2.40	0.2000	200.00	198.33	196.67	195.00	193.33	191.67	190.00	188.33	186.67	185.00	183.33	181.67	2290.00
16	2	2.50	0.2083	187.50	185.76	184.03	182.29	180.56	178.82	177.08	175.35	173.61	171.88	170.14	168.40	2135.42
17	3	2.30	0.1917	153.33	151.74	150.14	148.54	146.94	145.35	143.75	142.15	140.56	138.96	137.36	135.76	1734.58
18	4	2.90	0.2417	169.17	167.15	165.14	163.13	161.11	159.10	157.08	155.07	153.06	151.04	149.03	147.01	1897.08
19	5	3.40	0.2833	170.00	167.64	165.28	162.92	160.56	158.19	155.83	153.47	151.11	148.75	146.39	144.03	1884.17
20	6	3.40	0.2833	141.67	139.31	136.94	134.58	132.22	129.86	127.50	125.14	122.78	120.42	118.06	115.69	1544.17
21	7	5.50	0.4583	183.33	179.51	175.69	171.88	168.06	164.24	160.42	156.60	152.78	148.96	145.14	141.32	1947.92
22	8	5.70	0.4750	142.50	138.54	134.58	130.63	126.67	122.71	118.75	114.79	110.83	106.88	102.92	98.96	1448.75
23	9	5.00	0.4167	83.33	79.86	76.39	72.92	69.44	65.97	62.50	59.03	55.56	52.08	48.61	45.14	770.83
24	10	5.10	0.4250	42.50	38.96	35.42	31.88	28.33	24.79	21.25	17.71	14.17	10.63	7.08	3.54	276.25
25															TTL	15929.17
26				Maksettu korko kuukausittain korkokaton kanssa												
27	vuosi	p%	kk%	tammi	helmi	maalis	huhti	touko	kesä	heinä	elo	syys	loka	marras	joulu	Yhteensä
28	1	2.40	0.2000	200.00	198.33	196.67	195.00	193.33	191.67	190.00	188.33	186.67	185.00	183.33	181.67	2290.00
29	2	2.50	0.2083	187.50	185.76	184.03	182.29	180.56	178.82	177.08	175.35	173.61	171.88	170.14	168.40	2135.42
30	3	2.30	0.1917	153.33	151.74	150.14	148.54	146.94	145.35	143.75	142.15	140.56	138.96	137.36	135.76	1734.58
31	4	2.90	0.2417	169.17	167.15	165.14	163.13	161.11	159.10	157.08	155.07	153.06	151.04	149.03	147.01	1897.08
32	5	3.40	0.2833	170.00	167.64	165.28	162.92	160.56	158.19	155.83	153.47	151.11	148.75	146.39	144.03	1884.17
33	6	3.40	0.2833	141.67	139.31	136.94	134.58	132.22	129.86	127.50	125.14	122.78	120.42	118.06	115.69	1544.17
34	7	4.50	0.3750	150.00	146.88	143.75	140.63	137.50	134.38	131.25	128.13	125.00	121.88	118.75	115.63	1593.75
35	8	4.50	0.3750	112.50	109.38	106.25	103.13	100.00	96.88	93.75	90.63	87.50	84.38	81.25	78.13	1143.75
36	9	4.50	0.3750	75.00	71.88	68.75	65.63	62.50	59.38	56.25	53.13	50.00	46.88	43.75	40.63	693.75
37	10	4.50	0.3750	37.50	34.38	31.25	28.13	25.00	21.88	18.75	15.63	12.50	9.38	6.25	3.13	243.75
38															TTL	15160.42



http://www.casio-laskimet.fi

13. Polynomifunktioita (12 p.)

Tutkitaan suljetulla välillä $-1 \leq x \leq 2$ määriteltyjä polynomifunktioita $p(x)$.

13.1. Anna esimerkki tällaisesta funktiosta, jonka ainoa maksimikohta on avoimella välillä $-1 < x < 2$. (6 p.)

13.2. Anna esimerkki tällaisesta funktiosta, joka saavuttaa suurimman arvonsa välin molemmissa päätepisteissä. (6 p.)

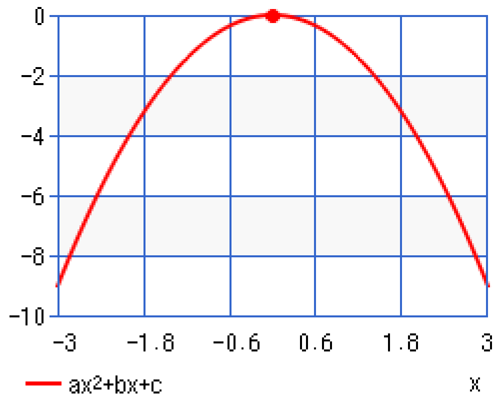
13.1. Esimerkiksi käy alaspäin avautuva paraabeli, jonka huippu osuu välille -1≤x≤2. Valitaan funktioksi f(x)=-x^2. Koska f’(x)=-2x ja -2x=0 ainoastaan kohdassa x=0, ei funktiolla ole muita ehdokkaita maksimikohdaksi. Koska f’(-0,5)=1 (positiivinen) ja f’(1)=-2 (negatiivinen), niin x=0 on maksimikohta ja kuuluu pyydetylle välille -1<x<2.

13.2. Esimerkiksi käy ylöspäin avautuva paraabeli y=g(x), missä g(x)=ax^2+bx+c, a>0. Tälle pitää olla voimassa g(-1)=g(2) ja huipun x-koordinaatti on annetun välin keskikohdassa x=0,5. Ratkaistaan funktion g(x) lauseke yhtälöryhmästä g(2)-g(-1)=0 ja g’(0,5)=0 symbolisella laskimella (esim. ClassPad).

Yhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan a=-b, b=b ja c=c. Siis kaikki luvut käyvät, kunhan a=-b. Valitaan helpot b=c=-1, jolloin funktioksi saadaan g(x)=x^2-x-1. Tämä toteuttaa annetut kriteerit, sillä sen kuvaaja on ylöspäin avautuva paraabeli ja huippu on derivaatan g’(x)=2x-1 ainoassa nollakohdassa x=0,5.

Nyt g(-1)=g(2)=1 on funktion suurin arvo välillä -1≤x≤2. Alla tehtävien esimerkkifunktioiden kuvaajat Casio EDU+ sovelluksen avulla.

13.1.



13.2.