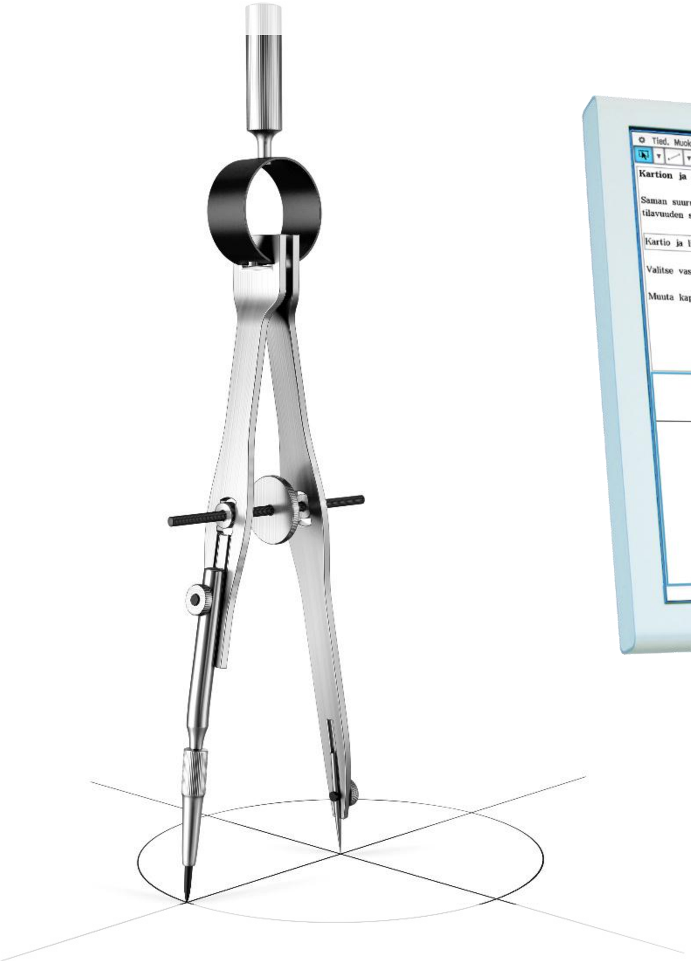
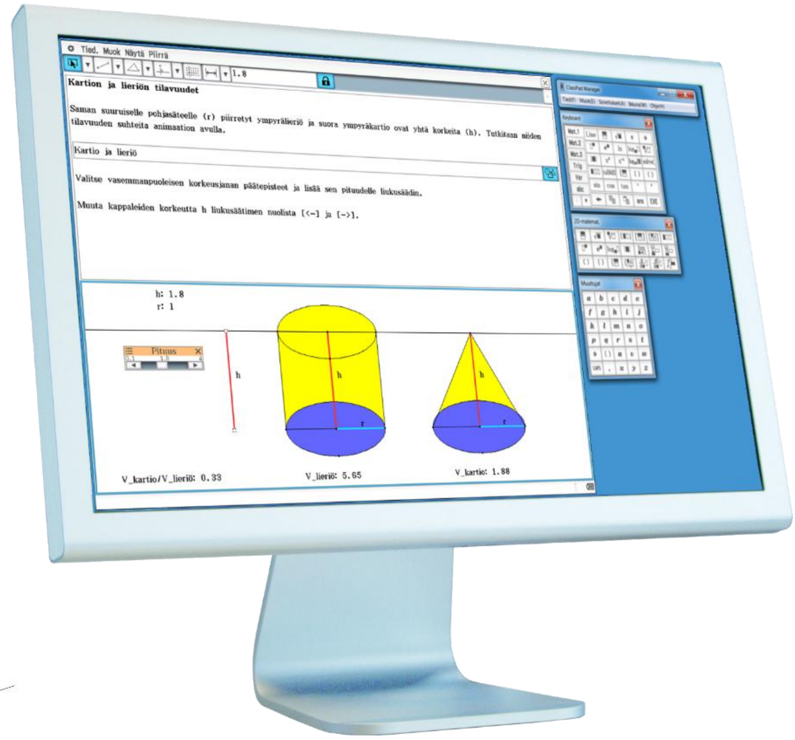
Laske Laudatur Casion avulla

Pitkä matematiikka,
kevät 2026





Sisältö

Kevään 2026 matematiikan yo-kokeiden ratkaisut työasemalle ladattavan ja Abitista löytyvän ClassPad Managerin avulla laskettuina.

Pepe Palovaara

CASIO®

Fintegrity

FI – Matematiikka, pitkä oppimäärä

18.3.2026

Koe koostuu 13 tehtävästä, joista vastataan kymmeneen. Tehtävät on jaettu kolmeen osaan. A-osassa on kuusi tehtävää, joista vastataan viiteen. B1-osassa on neljä tehtävää, joista vastataan kolmeen. B2-osassa on kolme tehtävää, joista vastataan kahteen. Kaikki tehtävät arvostellaan pistein 0–12, joten kokeen maksimipistemäärä on 120.

A-osassa saat käyttää koejärjestelmän taulukkokirjoja ja perusohjelmia. A-osa palautetaan tehtävän 6 jälkeen olevalla painikkeella. Tämän jälkeen A-osan vastauksia ei voi enää muokata. A-osan palauttamisen jälkeen kaikki koejärjestelmän ohjelmat ovat käytettävissäsi. Voit vastata B-osien tehtäviin myös ennen A-osan palauttamista.

Halutessasi voit tuottaa vastausten tueksi piirroksia, kaavioita tai taulukoita ja liittää niistä kuvakaappauksen mihin tahansa tekstivastaukseen.

Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

A-osa

Vastaa viiteen tehtävään.

1. Puuttuvat luvut (12 p.)

Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset ilman välivaiheita ja perusteluja. Jokaisen osatehtävän vastaus on kokonaisluku.

Täydennä puuttuvat luvut osatehtävissä 1.1–1.6 niin, että väitteet ovat tosia. Puuttuvat luvut on merkitty neliösymbolilla ($\square$).

1.1 $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{\square}{60}$ (2 p.)

Puuttuva luku: 21

1.2 Lukujen $-5, 4, 13$ ja $\square$ keskiarvo on $5.$ (2 p.)

Puuttuva luku: 8

1.3 $(2x+3)^2 = 4x^2 + \square x + 9$ (2 p.)

Puuttuva luku: 12

1.4 Yhtälön $7x + \square = 19 - 2x$ ratkaisu on $x = 2.$ (2 p.)

Puuttuva luku: 1

1.5 Luvut $x = 3$ ja y toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} 2x + y = \square \\ x - 2y = 9. \end{cases}$$ (2 p.)

Puuttuva luku: 3

1.6 Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 20 ja 21, joten hypotenuusan pituus on $\square$. (2 p.)

Puuttuva luku: 29

2. Derivaattoja ja yhdistelyä (12 p.)

Määritä funktioiden derivaatat ja tutki niiden ominaisuuksia. Valitse kullekin funktiolle kummastakin listasta paras vaihtoehto.

Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluakaan jättää tehtävää arvosteltavaksi, poista vastauksesi valitsemalla pudotusvalikosta tyhjä rivi.

2.1 $f(x) = -6x^2 + 12x + 5$ (4 p.)

2.1.1 Valitse funktiolle listasta paras vaihtoehto. (2 p.)

Derivaatan kuvaaja leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 12)$.

2.1.2 Valitse funktiolle listasta paras vaihtoehto. (2 p.)

Ei mikään yllä olevista.

2.2 $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$ (4 p.)

2.2.1 Valitse funktiolle listasta paras vaihtoehto. (2 p.)

Derivaatan kuvaaja leikkaa x-akselin pisteessä $(4, 0)$.

2.2.2 Valitse funktiolle listasta paras vaihtoehto. (2 p.)

Derivaatan kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on -1.

2.3 $h(x) = 3x^3 - 4x + 3$ (4 p.)

2.3.1 Valitse funktiolle listasta paras vaihtoehto. (2 p.)

Derivaatan nollakohdat ovat $x = -\frac{2}{3}$ ja $x = \frac{2}{3}$.

2.3.2 Valitse funktiolle listasta paras vaihtoehto. (2 p.)

Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

3. Logaritmeja (12 p.)

1. Anna esimerkki positiivisista reaaliluvuista a, b ja c, jotka eivät toteuta yhtälöä

$$\ln(a+b+c) = \ln a + \ln b + \ln c.$$

(4 p.)

2. Anna esimerkki positiivisista reaaliluvuista a, b ja c, jotka toteuttavat yhtälön

$$\ln(a+b+c) = \ln a + \ln b + \ln c.$$

Likiarvot eivät riitä yhtäsuuruuden perustelemiseen. **(8 p.)**

1. Esim. luvut $a = b = c = 1$ eivät toteuta yhtälöä, sillä $\ln(1+1+1) = \ln(3)$ ja
$\ln(1) + \ln(1) + \ln(1) = \ln(1 \cdot 1 \cdot 1) = \ln(1) = 0$.
2. Esim. luvut $a = 1,\ b = 2,\ c = 3$ toteuttavat yhtälön, sillä $\ln(1+2+3) = \ln(6)$ ja
$\ln(1) + \ln(2) + \ln(3) = \ln(2) + \ln(3) = \ln(2 \cdot 3) = \ln(6)$

4. Descartesin menetelmä (12 p.)

Aineisto

4.A Teksti: Descartesin menetelmä

Ratkaise yhtälö $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ ja osoita, että tekstissä 4.A kuvattu Descartesin menetelmä antaa sen positiivisten ratkaisujen lukumäärän oikein.

4.A Teksti: Descartesin menetelmä

Tarkastellaan n-asteisia polynomiyhtälöitä, joilla on n reaalista ratkaisua.

Ranskalainen filosofi ja matemaatikko René Descartes (1596–1650) kehitti tällaisen yhtälön positiivisten ratkaisujen lukumäärälle säännön, joka perustuu polynomin nollasta poikkeavien kertoimien etumerkkien vaihteluun, kun polynomin termit on kirjoitettu astelukujen vähenevässä järjestyksessä.

Esimerkiksi yhtälöllä $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24 = 0$ on neljä reaalista ratkaisua ja termien etumerkit ovat

$$+ - - + - .$$

Kun tarkastellaan peräkkäisiä merkkejä, niin etumerkki vaihtuu kolmessa kohdassa: 1. ja 2. termin välissä, 3. ja 4. termin välissä ja 4. ja 5. termin välissä. Descartesin säännön mukaan positiivisten ratkaisujen ja merkinvaihtojen lukumäärät ovat samat, eli tässä tapauksessa positiivisia ratkaisuja on kolme.

Esimerkkiyhtälön ratkaisut ovat $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ ja $x = -4$.

Lähde: YTL.

Yhtälö on toisen asteen yhtälö muuttujan x^2 suhteen. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan

$x^2 = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x^2 = 4 \vee x^2 = 1$, jolloin $x = \pm 2 \ \vee x = \pm 1$.

Annettu yhtälö on kirjoitettu alenevien potenssien mukaiseen järjestykseen ja sen nollasta eroavien kertoimien merkit ovat järjestyksessä + - +. Merkit vaihtuvat kaksi kertaa, minkä pitäisi ilmoittaa positiivisten ratkaisujen lukumäärän. Positiivisia juuria ovat $x = 1$ ja $x = 2$, joten menetelmä toimii.

5. Paraabeli (12 p.)

Aineisto

5.A Kuva: Paraabeli

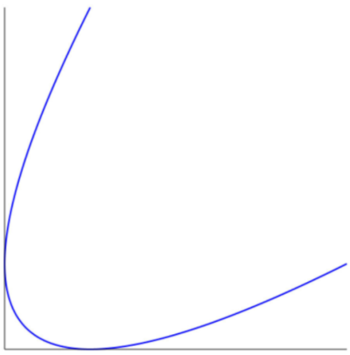
Paraabeli on tasokäyrä, jonka jokainen piste on yhtä kaukana annetusta suorasta ja sen ulkopuolella sijaitsevasta pisteestä. Näitä kutsutaan *johtosuoraksi* ja *polttopisteeksi*.

Kuvan 5.A paraabelin johtosuora on $y = -x$ ja sen polttopiste on $(2, 2)$. Osoita, että paraabelin yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$x + y = a(x - y)^2 + b,$$

ja määritä siinä esiintyvät vakiot a ja b.

5.A Kuva: Paraabeli



Käytetään pisteen etäisyys suorasta - kaavaa. Lasketaan paraabelin pisteen (x,y) etäisyys johtosuorasta $x + y = 0$:

$\dfrac{|x+y|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{|x+y|}{\sqrt{2}}$. Lasketaan seuraavaksi paraabelin pisteen (x,y) etäisyys polttopisteestä $(2,2)$:

$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$. Paraabelin määritelmän mukaan näiden tulee olla samat, joten saadaan yhtälö

$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2} = \dfrac{|x+y|}{\sqrt{2}}$ Koska molemmat puolet ovat positiivisia, voidaan yhtälö korottaa puolittain toiseen

potenssiin: $(x-2)^2+(y-2)^2 = \dfrac{(x+y)^2}{2} \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-4y+4 = \dfrac{x^2+2xy+y^2}{2}$

$\Leftrightarrow 2x^2-8x+16+2y^2-8y = x^2+2xy+y^2 \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2+16 = 8(x+y)$

$\Leftrightarrow 8(x+y) = (x-y)^2+16 \Leftrightarrow x+y = \dfrac{1}{8}(x-y)^2+2$. Kysytyt vakiot ovat $a = \dfrac{1}{8}$ ja $b = 2$.

6. Eiffel-torni (12 p.)

Aineisto

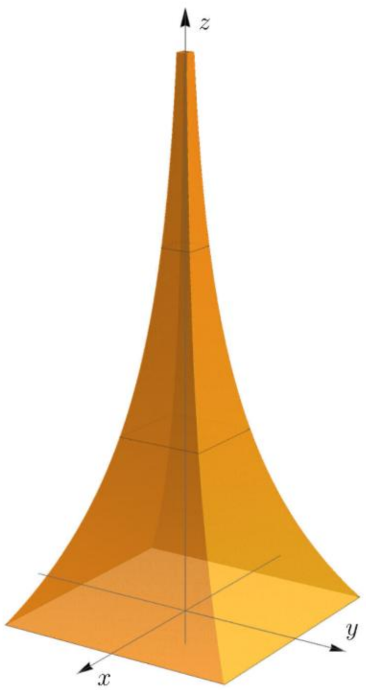
6.A Kuva: Eiffel-torni

Eiffel-tornin muotoa voidaan mallintaa xyz-koordinaatiston kappaleella, jonka rajaavat neljä pintaa

$$x = ae^{c(h-z)}, \quad y = ae^{c(h-z)}, \quad x = -ae^{c(h-z)}, \quad y = -ae^{c(h-z)}$$

sekä tasot $z = 0$ ja $z = h$. Mallissa $a = 4{,}255$, $c = 0{,}00892$, $h = 312$ ja yksikkönä on metri. Tämä kappale on esitetty kuvassa 6.A. Laske kappaleen tilavuus integraalia käyttäen.

6.A Kuva: Eiffel-torni



Kappaleen z-akselia vastaan kohtisuora poikkileikkaus on neliö, jonka sivun pituus on $2ae^{c(h-z)}$ ja poikkileikkauksen pinta-ala on $4a^2e^{2c(h-z)}$. Sijoitetaan tehtävässä annetut luvut paikoilleen ja integroidaan tätä poikkileikkauksen pinta-alaa z-akselin suunnassa välillä [0,312]:

$$\int_0^{312} 72{,}4201e^{2\cdot 0{,}00892(312-z)} = 72{,}4201\int_0^{312} e^{5{,}56608-0{,}01784z} = -\frac{72{,}4201}{0{,}0178}\int_0^{312} -0{,}0178e^{5{,}56608-0{,}01784z}$$

$$= -4068{,}544944 \Big/_0^{312} \left(e^{5{,}56608-0{,}01784z}\right) = -4068{,}544944 \cdot \left(e^{5{,}56608-0{,}01784\cdot 312} - e^{5{,}56608}\right) \approx 1059479$$

$$\approx 1060000m^3 \cdot$$

B1-osa

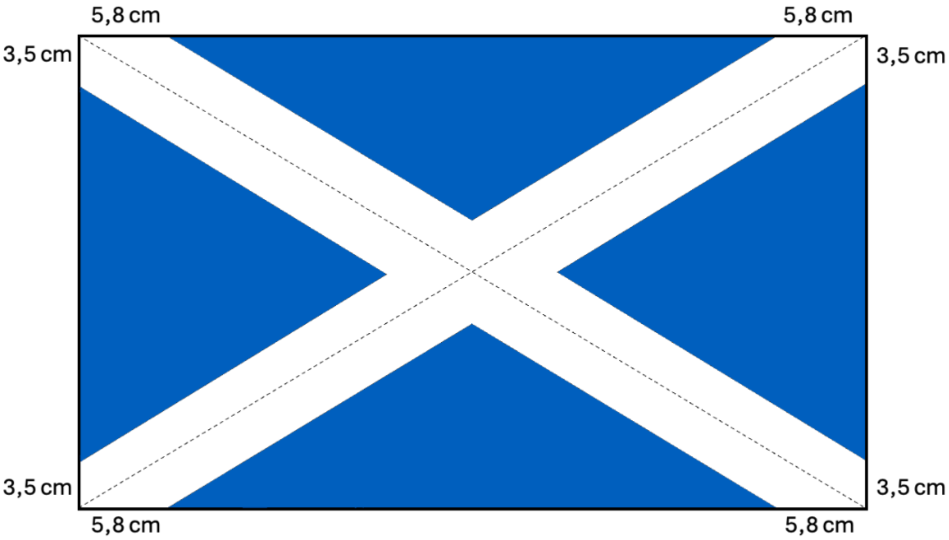
Vastaa kolmeen tehtävään.

7. Skotlannin lippu (12 p.)

Aineisto

7.A Kuva: Skotlannin lippu

Jalkapallofanilla on Skotlannin lippu, jonka leveys on 50 cm ja korkeus 30 cm. Lipun sinisellä pohjalla on molempien lävistäjien ympärillä valkoinen alue. Se ulottuu vaakasuuntaan 5,8 cm lävistäjältä vasemmalle ja oikealle sekä pystysuuntaan 3,5 cm lävistäjältä ylös ja alas kuten kuvassa 7.A. Kuinka monta prosenttia valkoinen alue on lipun pinta-alasta?



Lähde: *Flag of Scotland*. Wikimedia Commons. *https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Flag_of_Scotland.svg*. Julkaistu: 22.8.2022. Viitattu: 3.1.2025. Muokkaus: YTL.

7. Skotlannin lippu

Lipun pinta-ala on $30*50=1500\text{cm}^2$. Lipun lyhemmissä reunoissa olevian sinisten kolmioiden alojen summa on

$$2*\frac{1}{2}*(30-2*3.5)*(25-5.8)$$

$$441.6$$

Lipun pidemmissä reunoissa olevien sinisten kolmioiden summa on

$$2*\frac{1}{2}*(50-2*5.8)*(15-3.5)$$

$$441.6$$

Valkoisen alueen osuus lipun pinta-alasta on

$$\frac{1500-441.6-441.6}{1500}$$

$$0.4112$$

eli n. 41%.

CASIO

8. Muinainen laina (12 p.)

Korollisia lainoja oli käytössä jo muinaisessa Lähi-idässä. Säilynyt assyrialainen teksti kuvaa erästä lainaa seuraavasti: "joka kuukausi velkaan lisättiin yksi hopeasekeli velan minaa kohti". Yksi mina on arvoltaan noin 570 grammaa hopeaa ja se jakautuu 60 sekeliin.

Ei ole täysin selvää, miten teksti pitäisi tulkita. Se voidaan tulkita ainakin seuraavilla kahdella eri tavalla:

Tapa 1: Korko lasketaan vain täysistä minoista.

Tapa 2: Korko lasketaan myös osittaisista minoista.

Kuinka paljon 30 minan lainasta kertyy vuodessa korkoa näiden eri tulkintojen mukaan?

8. Muinainen laina
Merkitään m=mina ja s=sekeli.
Tavan 1 mukaan 30 minan lainan määrä kuukausittain on

1kk	30m ja korkoa 30s = 30m 30s
2kk	30,5m ja korkoa 30s = 31m
3kk	31m ja korkoa 31s = 31m 31s
4kk	31m 31s ja korkoa 31s = 32m 2s
5kk	32m 2s ja korkoa 32s = 32m 34s
6kk	32m 34s ja korkoa 32s = 33m 6s
7kk	33m 6s ja korkoa 33s = 33m 39s
8kk	33m 39s ja korkoa 33s = 34m 12s
9kk	34s 12s ja korkoa 34s = 34m 46s
10kk	34m 46s ja korkoa 34s = 35m 20s
11kk	35m 20s ja korkoa 35s = 35m 55s
12kk	35m 55s ja korkoa 35s = 36m 30s.

Korkoa kertyi siis 6 minaa ja 30 sekeliä.

Tavan 2 mukaan 30 minan lainan määrä vuoden kuluttua on korkoa korolle laskettuna

$$\left(1+\frac{1}{60}\right)^{12} * 30$$

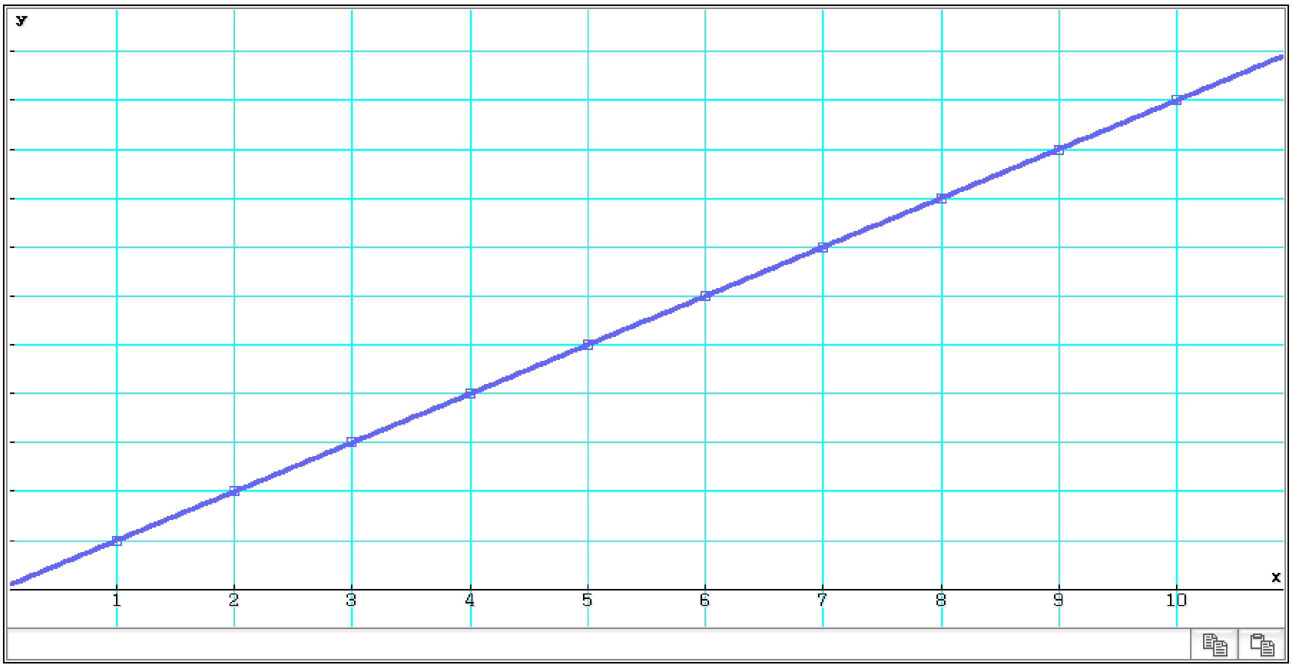
36.58173255

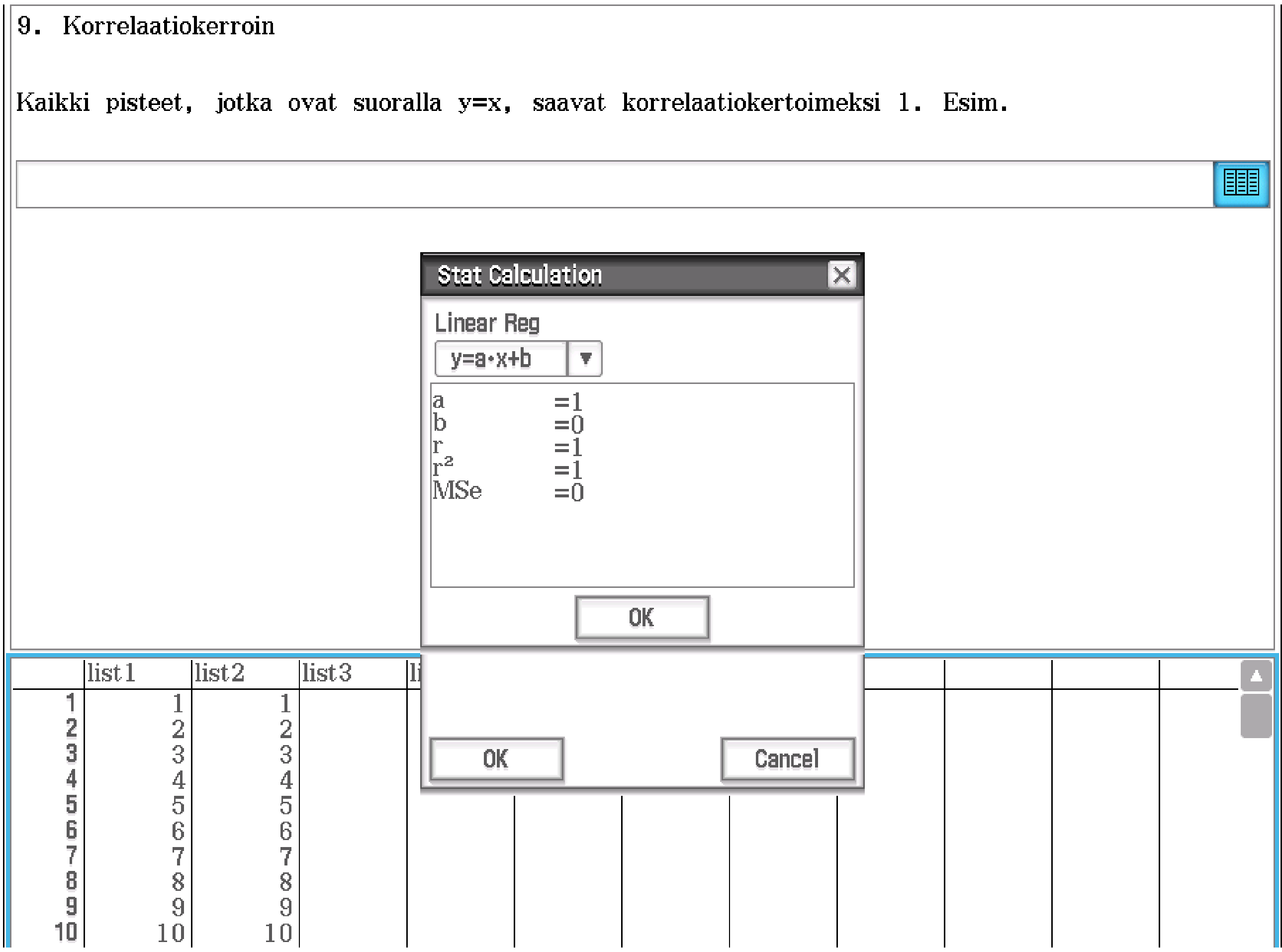
Korkoa kertyi siis 6 minaa ja 0,58173255*60 ≈ 35 sekeliä.

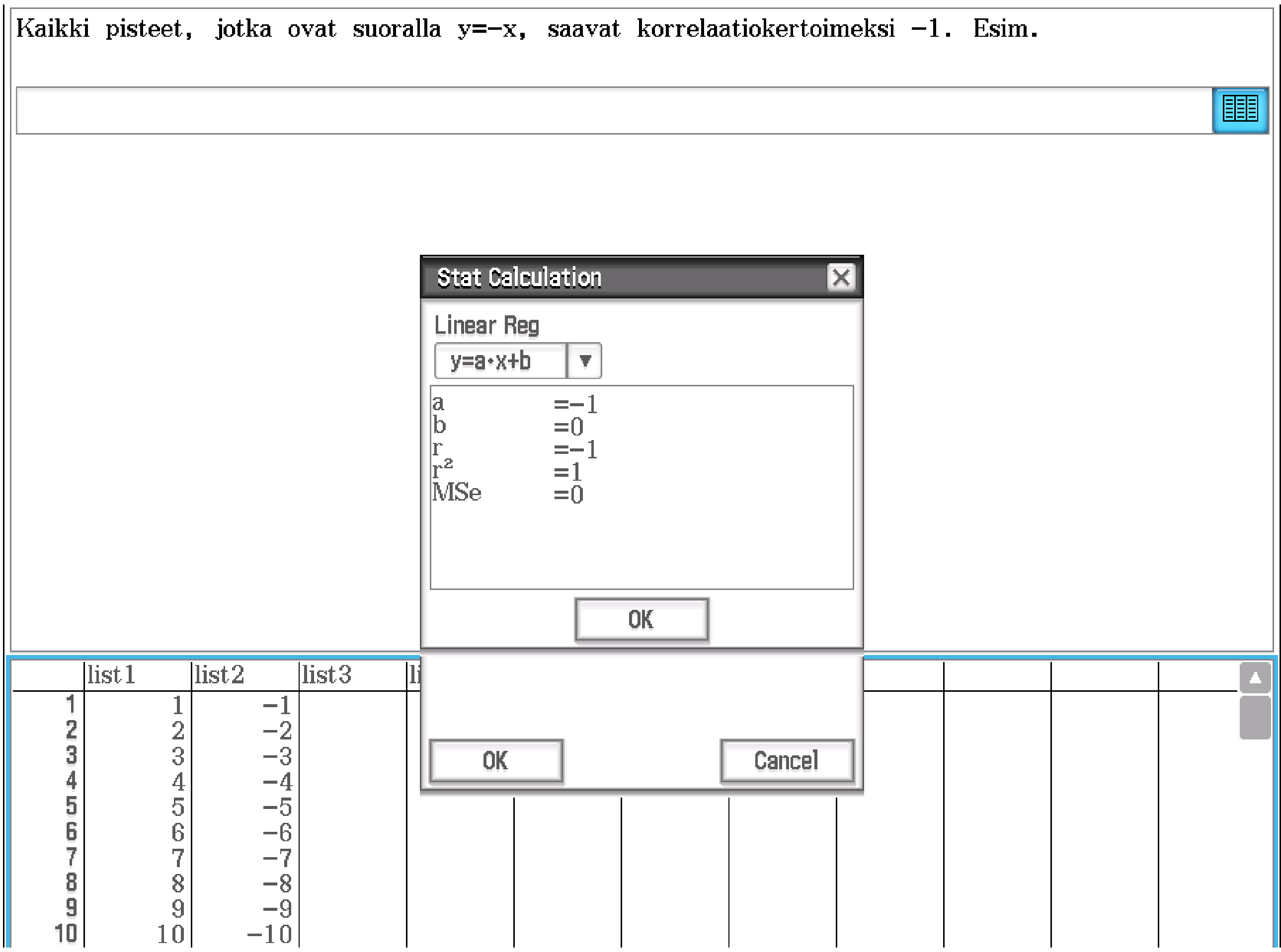
9. Korrelaatiokerroin (12 p.)

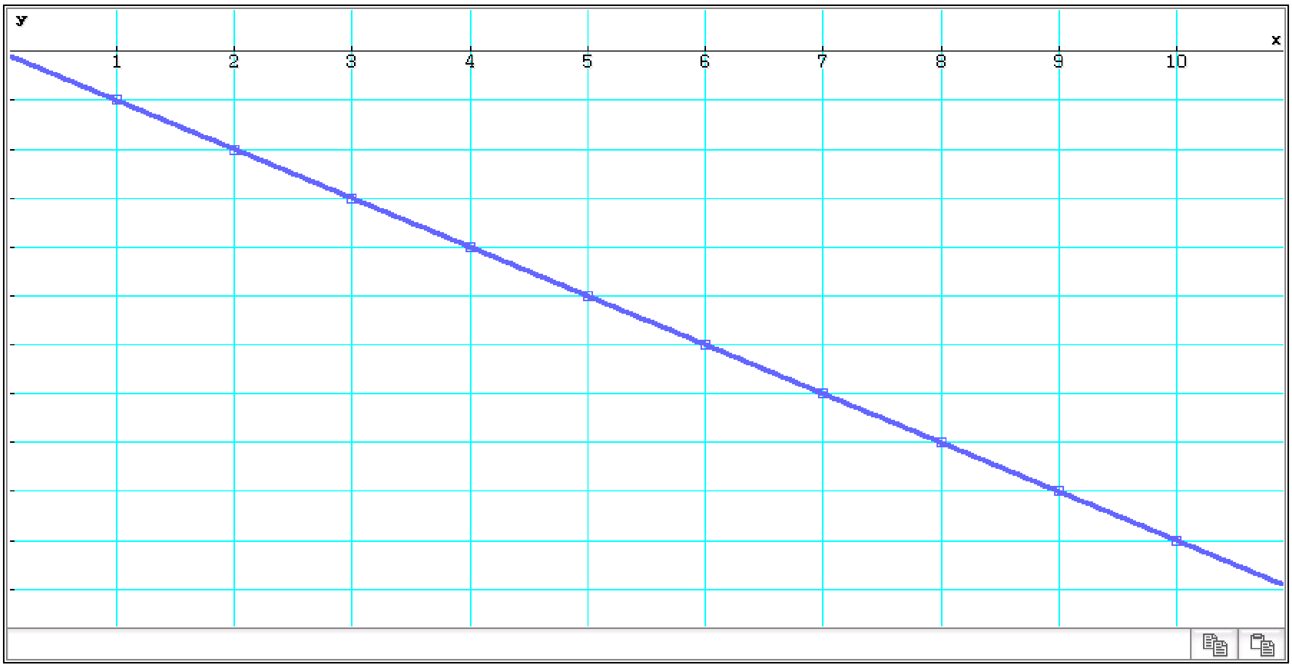
Anna esimerkki kahden muuttujan aineistosta, jossa on vähintään kymmenen eri datapistettä ja jossa muuttujien välinen korrelaatiokerroin on $r = 1$. Anna vastauksena kuvakaappaus aineistosta, aineiston graafinen esitys ja kuvakaappaukset, jotka osoittavat, että vaaditut ehdot toteutuvat.

Anna vastaavat esimerkit myös tapauksista $r = -1$ ja $r = 0$.

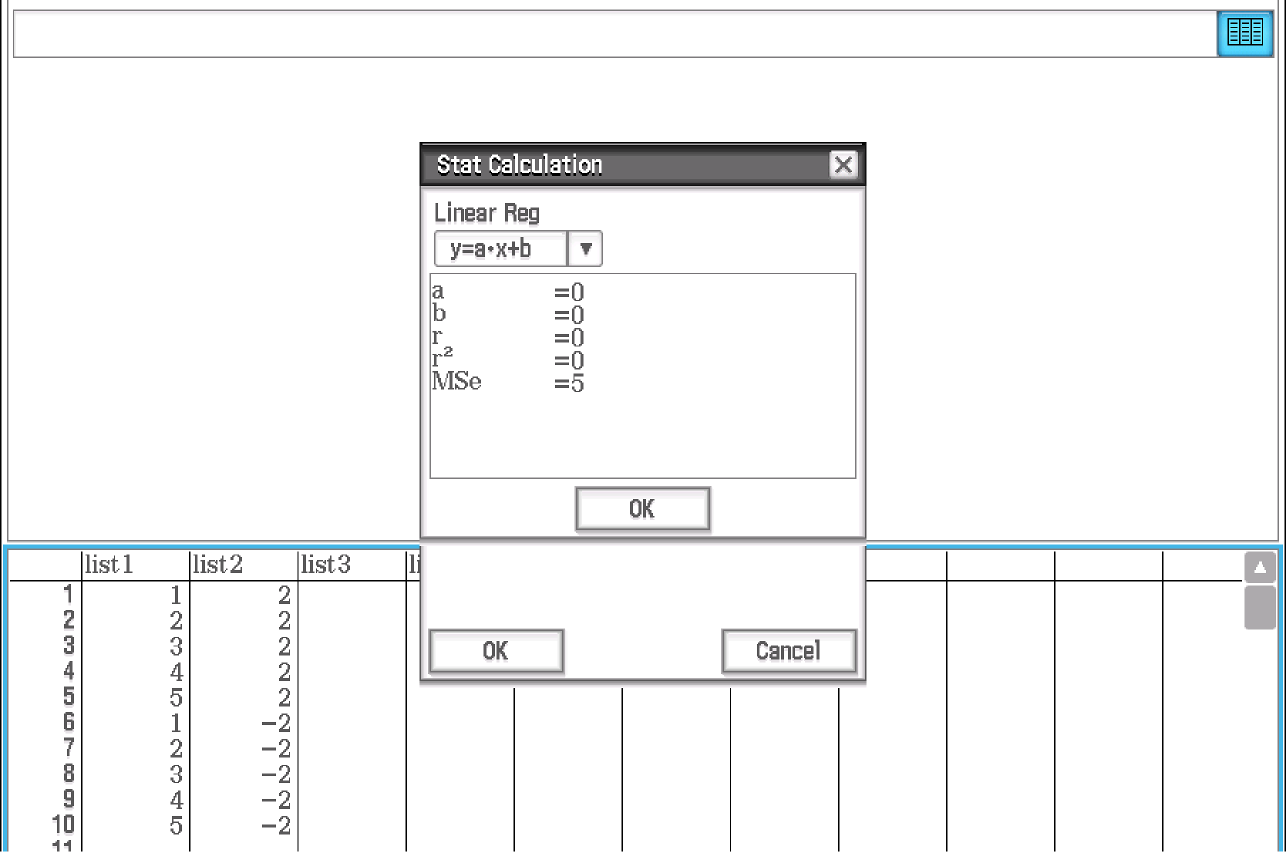

y
x
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10


9. Korrelaatiokerroin
Kaikki pisteet, jotka ovat suoralla y=x, saavat korrelaatiokertoimeksi 1. Esim.
Stat Calculation
Linear Reg
y=a·x+b
a =1
b =0
r =1
r² =1
MSe =0
OK
OK
Cancel
list1
list2
list3
1 1 1
2 2 2
3 3 3
4 4 4
5 5 5
6 6 6
7 7 7
8 8 8
9 9 9
10 10 10

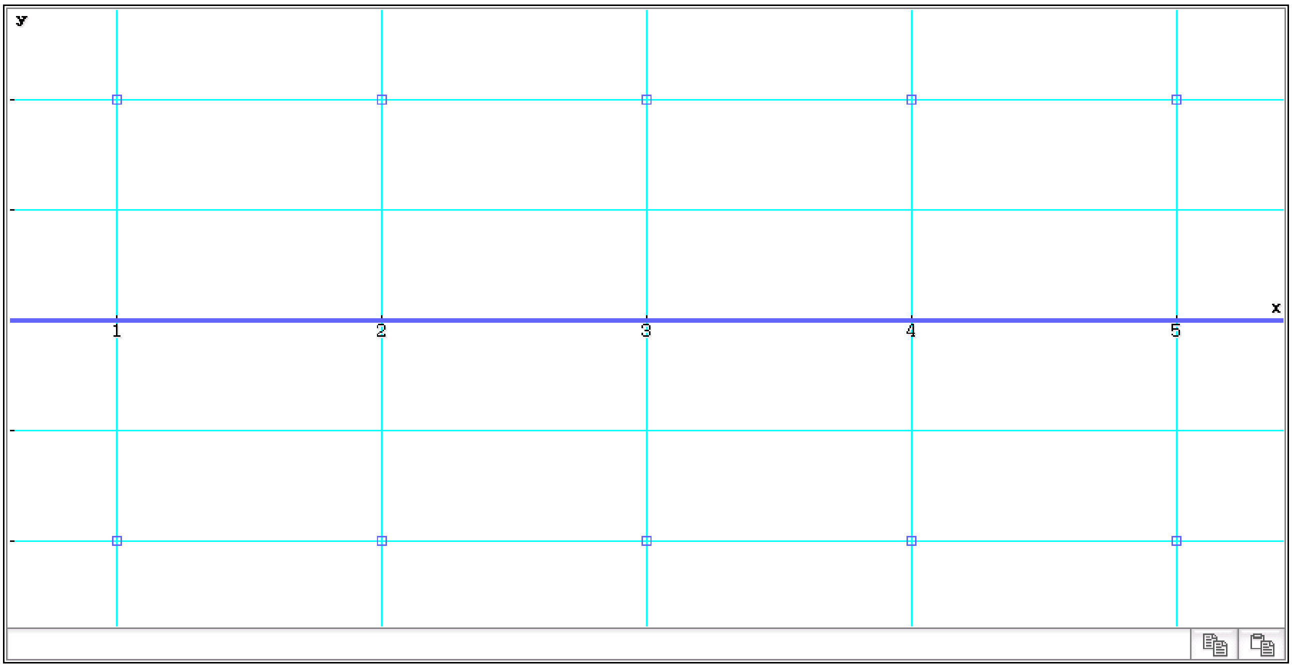

Kaikki pisteet, jotka ovat suoralla y=−x, saavat korrelaatiokertoimeksi −1. Esim.
Stat Calculation
Linear Reg
y=a·x+b
a =−1
b =0
r =−1
r² =1
MSe =0
OK
list1 list2 list3
1 1 −1
2 2 −2
3 3 −3
4 4 −4
5 5 −5
6 6 −6
7 7 −7
8 8 −8
9 9 −9
10 10 −10
OK
Cancel


y
x
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Esim. kaikki pisteet, jotka ovat hajallaan niin, että niiden samaa muuttujan arvoa vastaavat arvot ovat yhtä kaukana vaakasuorasta, saavat korrelaatioksi 0. Esim.



	list1	list2
1	1	2
2	2	2
3	3	2
4	4	2
5	5	2
6	1	−2
7	2	−2
8	3	−2
9	4	−2
10	5	−2



CASIO

10. Collatzin lukujono (12 p.)

Collatzin jono on rekursiivinen lukujono, jonka jäsenet ovat positiivisia kokonaislukuja. Jonon seuraava jäsen a_{n+1} saadaan edellisestä jäsenestä a_n seuraavalla tavalla:

- Jos a_n on parillinen, niin $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$.
- Jos a_n on pariton ja suurempi kuin 1, niin $a_{n+1} = 3a_n + 1$.
- Jos $a_n = 1$, niin jono päättyy.

Esimerkiksi luvusta $a_1 = 20$ alkava Collatzin jono on $20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1$. Saksalainen Lothar Collatz esitti vuonna 1937 konjektuurin (eli väittämän, jota ei kyennyt todistamaan), jonka mukaan mistä tahansa alkuarvosta alkava Collatzin jono on äärellinen. Tähän päivään mennessä kukaan ei ole kyennyt todistamaan sitä oikeaksi tai vääräksi.

1. Määritä Collatzin lukujono alkuarvolla $a_1 = 23$. **(3 p.)**
2. Selvitä ohjelmiston avulla, mikä alkuarvo välillä $2–100$ johtaa pisimpään Collatzin jonoon. Voit kirjoittaa koodisi esimerkiksi Pythonilla tai taulukkolaskentaohjelmalla. Anna vastauksena koodisi, koodin selitys ja taulukko, jossa näkyvät ainakin ne alkuarvot, jotka tuottavat viisi pisintä jonoa, sekä näiden jonojen pituudet. **(9 p.)**

10. Collatzin lukujono
1. Luvusta 23 alkava Collatzin lukujono on
23,70,35,106,53,160,80,40,20,10,5,16,8,4,2,1

2. Pythonilla:

```
import math                  # tuodaan matematiikkakirjasto
for k in range(2,101):       # aloitetaan for-silmukka luvuille k [2-100]
    n = k                    # asetetaan kulloinenkin k:n arvo muuttujaksi n
    counter = 1              # alustetaan laskuri arvoon 1
    while n != 1:            # aloitetaan while-silmukka pyörimään, kunnes n on 1
        if n%2 == 0:         # ehto, jos n on parillinen
            n = n/2          # jaetaan n kahdella
            counter += 1     # lisätään laskuriin 1
        else:                # jos ne ei ole parillinen
            n = n*3 + 1      # kerrotaan n kolmella ja lisätään 1
            counter += 1     # lisätään laskuriin 1
    print(k,counter)         # kun while-silmukan ehto n=1 toteutuu, tulostetaan jokainen luku k ja
                             # sitä vastaava laskurin arvo vierekkäin ja siirrytään seuraavaan lukuun k
```

Ohjelman tuloste Abicodesta:

2 2	15 18	28 19	41 110	54 113	67 28	80 10	93 18
3 8	16 5	29 19	42 9	55 113	68 15	81 23	94 106
4 3	17 13	30 19	43 30	56 20	69 15	82 111	95 106
5 6	18 21	31 107	44 17	57 33	70 15	83 111	96 13
6 9	19 21	32 6	45 17	58 20	71 103	84 10	97 119
7 17	20 8	33 27	46 17	59 33	72 23	85 10	98 26
8 4	21 8	34 14	47 105	60 20	73 116	86 31	99 26
9 20	22 16	35 14	48 12	61 20	74 23	87 31	100 26
10 7	23 16	36 22	49 25	62 108	75 15	88 18	
11 15	24 11	37 22	50 25	63 108	76 23	89 31	
12 10	25 24	38 22	51 25	64 7	77 23	90 18	
13 10	26 11	39 35	52 12	65 28	78 36	91 93	
14 18	27 112	40 9	53 12	66 28	79 36	92 18	

Vasemman puoleinen luku on k ja saa arvot väliltä 2-100, sen viereinen luku kertoo kuinka monta Collatzin algoritmin askelta piti suorittaa. Eniten askelia tarvitaan alkuarvolle 97 ja askelten määrä on 119.

Katso aiempien yo-kokeiden ratkaisut sivulta

www.casio-laskimet.fi > Opettaja & koulu > Opetusmateriaalia

B2-osa

Vastaa kahteen tehtävään.

11. Integraalin palautuskaava (12 p.)

Tarkastellaan epäoleellisia integraaleja

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx,$$

kun $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

1. Johda palautuskaava

$$I_n = n\,I_{n-1},$$

kun $n \geq 1$.

Vihje: Integroi kaava $D(x^n e^{-x}) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x}$ puolittain välillä $0 \leq x \leq R$. **(6 p.)**

2. Osoita epäoleellisen integraalin määritelmää käyttämällä, että

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1,$$

ja päättele integraalin I_5 arvo palautuskaavan $I_n = n\,I_{n-1}$ avulla. **(6 p.)**

11. Integraalin palautuskaava

1. Määritellään funktio

define $f(x)=x^n * e^{-x}$

done

Lasketaan sen derivaatta ja muokataan lauseketta

define $f'(x)=\frac{d}{dx}(f(x))$

done

expand(f´(x))

$n \cdot x^{n-1} \cdot e^{-x} - x^n \cdot e^{-x}$

Integroidaan ensin $D(x^n * e^{-x})$ välillä $[0,a]$:

$\int_0^a D(x^n * e^{-x})dx = x^a * e^{-a} \to 0$, kun $a \to \infty$, sillä $e^{-a} = \frac{1}{e^a} \to 0$, kun $a \to \infty$.

Integroidaan seuraavaksi f'(x):

$\int_0^a n \cdot x^{n-1} \cdot e^{-x} - x^n \cdot e^{-x} dx = n\int_0^a x^{n-1} \cdot e^{-x} dx - \int_0^a x^n \cdot e^{-x} dx \to n * I_{n-1} - I_n$, kun $a \to \infty$.

Yhdistämällä nämä tulokset saadaan $n * I_{n-1} - I_n \to 0$ eli $n * I_{n-1} = I_n$.

2. Laskataan integraali

$\int_0^a e^{-x} dx$

$-e^{-a}+1$

Kun $a \to \infty$, $-e^{-a}+1 \to 1$, sillä $-e^{-a} = -\frac{1}{e^a} \to 0$, kun $a \to \infty$. Palautuskaavan avulla saadaan

$I_5 = 5*I_4 = 5*4*I_3 = 5*4*3*I_2 = 5*4*3*2*I_1 = 5*4*3*2*1*I_0 = 5*4*3*2*1*1 = 120.$

12. Seitsensakarainen tähti (12 p.)

George R. R. Martinin luomaan fantasiamaailmaan sijoittuvassa Game of Thrones -sarjassa esiintyy seitsensakarainen tähti (katso oheinen kuva), jonka muotoa mallinnetaan tässä tehtävässä. Tähden seitsemän kärkipistettä asettuvat ympyrän kehälle tasavälein. Tähden sakarat muodostuvat seitsemästä paraabelin kaaresta niin, että jokaista sakaraa rajaa kaksi paraabelia. Yksittäinen paraabeli leikkaa ympyrän kahdessa tähden kärkipisteessä, joiden väliin jää yksi tähden kärkipiste. Leikkauspisteessä ympyrän tangentti ja paraabelin tangentti ovat kohtisuorassa. Tähden keskellä on ympyrä, joka sivuaa paraabeleja.

Määritä tähden keskellä olevan ympyrän ja tähden kärkien kautta kulkevan ympyrän säteiden suhde.

12. Seitsensakarainen tähti

Sjoitetaan kuvassa vahvistettu paraabeli symmetrisesti y−akselin suhteen. Koska kaikki ympyrät ovat yhdenmuotoisia, suhde pysyy samana vaikka tutkittaisiin yksikköympyrää ulompana ympyränä. Vahvistetun paraabelin yhtälö on $y=ax^2+b$ ja sen huippu on pisteessä $(0,b)$, joten paraabelin lyhin etäisyys keskipisteestä origosta on b. Tämä on samalla pienemmän ympyrän säde.

Koko ympyrän asteluku on 2π, asettuvat seitsensakaraisen tähden sakaroiden leikkauspisteet ulomman ympyrän kaarella $\frac{2\pi}{7}$ välein. Tutkitaan kyseisen paraabelin oikean puoleista leikkauspistettä yksikköympyrän kanssa. Se on kohdassa $(\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{7}),\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{7}))=(\cos(\frac{3\pi}{14}),\sin(\frac{3\pi}{14}))$.

Pisteeseen $(\cos(\frac{3\pi}{14}),\sin(\frac{3\pi}{14}))$ piirretty paraabelin tangentti on yhdensuuntainen samaan pisteeseen piirrety ympyrän säteen kanssa. Tangentin kulmakerroin on $\frac{\sin(\frac{3\pi}{14})}{\cos(\frac{3\pi}{14})}$, jonka pitää olla sama kuin paraabelia kuvaavan funktion derivaatan arvo pisteessä $x=\cos(\frac{3\pi}{14})$. Derivaatta $y'=2ax$ ja $y'(\cos(\frac{3\pi}{14}))=2a*\cos(\frac{3\pi}{14})$. Asetetaan saadut kulmakertoimet samoiksi ja ratkaistaan niistä saadusta yhtälösä a: $\frac{\sin(\frac{3\pi}{14})}{\cos(\frac{3\pi}{14})}=2a*\cos(\frac{3\pi}{14}) \Leftrightarrow a=\frac{\sin(\frac{3\pi}{14})}{2*\left(\cos(\frac{3\pi}{14})\right)^2}$.

Sijoitetaan paraabelin piste $(\cos(\frac{3\pi}{14}),\sin(\frac{3\pi}{14}))$ ja saatu a:n arvo paraabelin yhtälöön:

$\sin(\frac{3\pi}{14})=\frac{\sin(\frac{3\pi}{14})}{2*\left(\cos(\frac{3\pi}{14})\right)^2}*\left(\cos(\frac{3\pi}{14})\right)^2+b$, jolloin $b=\sin(\frac{3\pi}{14})-\frac{1}{2}\sin(\frac{3\pi}{14})=\frac{1}{2}\sin(\frac{3\pi}{14})$. Kysytty suhde on siis $\frac{1}{2}\sin(\frac{3\pi}{14})\approx 0,31$.

13. Ääriarvokohdat (12 p.)

Määritellään funktio $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ kaavalla

$$f(x) = \int_0^x \sin(2\pi z^2)\,dz.$$

Missä kohdissa funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa?

Voit tutkia tilannetta ohjelmistojen avulla, mutta vastaus täytyy perustella täsmällisesti. Perusteluiksi eivät riitä ohjelmistolla lasketut integraalien likiarvot eikä fMax- tai fMin-käskyjen käyttäminen.

13. Ääriarvokohdat

Tutkitaan funktion $f(x)=\int_0^x \sin(2\pi z^2)dz$ integroitavaa funktiota $\sin(2\pi z^2)$ annetulla välillä $[0,1]$. Sen nollakohdat ovat $\sin(2\pi z^2)=0 \Leftrightarrow 2\pi z^2=0+n2\pi \lor 2\pi z^2=\pi+n2\pi \Leftrightarrow z^2=0+n \lor z^2=\frac{1}{2}+n$. Nollakohdista välille $[0,1]$ osuvat $z=0$ (kun $n=0$), $z=1$ (kun $n=1$) ja $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (kun $n=0$).

Funktio $\sin(2\pi z^2)$ on kaikkialla jatkuva ja derivoituva funktio. Lasketaan sen arvoja nollakohtien väleissä:

$\sin(2\pi z^2)|z=0.5$

1

$\sin(2\pi z^2)|z=0.8$

−0.7705132428

Funktion merkit välillä $[0,1]$ vaihtuvat + | − ja se siis kasvaa välillä $[0,\frac{1}{\sqrt{2}}]$ ja vähenee välillä $[\frac{1}{\sqrt{2}},1]$. Funktion $f(x)$ suurin arvo saadaan kohdassa $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Pienimmän arvonsa funktio $f(x)$ saa joko kohdassa $x=0$ tai $x=1$. Tutkitaan funktion arvoja näissä kohdissa.

Tehdään muuttujanvaihto $u=z^2 \Leftrightarrow z=\sqrt{u}$ (väli oli positiivinen). Integroinnin alaraja on edelleen 0 ja yläraja 1. Integrointi suoritetaan muuttujan $dz=\frac{1}{2\sqrt{u}}$ suhteen.

$\int_0^1 \sin(2\pi z^2)dz=\int_0^1 \frac{\sin(2\pi u)}{2\sqrt{u}}du=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sin(2\pi u)}{\sqrt{u}}du$. Koska $\sin(2\pi u)=0$ välillä $[0,1]$, pitää integrointi jakaa osiin. Nollakohdista joukosta $2\pi u=\pi+2n\pi$ osuu välille $u=\frac{1}{2}$ (kun $n=0$). Koska $\sin(2\pi*0,1)\approx 0,59>0$ ja $\sin(2\pi*0,6)\approx -0,59<0$, niin integraalista saadaan

$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sin(2\pi u)}{\sqrt{u}}du=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(2\pi u)}{\sqrt{u}}du-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sin(2\pi u)}{\sqrt{u}}du$. Koska $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{u}}du=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{u+\frac{1}{2}}}du$, saadaan

$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi u)*\left(\frac{1}{\sqrt{u}}-\frac{1}{\sqrt{u+\frac{1}{2}}}\right)du$. $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi u)du=\frac{1}{2\cdot\pi}$, joten integraalin merkki määräytyy lausekkeen $\frac{1}{\sqrt{u}}-\frac{1}{\sqrt{u+\frac{1}{2}}}$ mukaan. Koska $\frac{1}{\sqrt{u}}-\frac{1}{\sqrt{u+\frac{1}{2}}}>0$, on integraalin arvo >0 ja pienin arvo saavutetaan kohdassa $x=0$ ja se on $f(0)=\int_0^0 \sin(2\pi z^2)dz=0$.