



Laske Laudatur ClassPadilla Pitkä matematiikka, kevät 2021



Tiivistelmä

Kevään 2021 sähköisten yo-kokeiden ratkaisut ClassPad Managerilla laskettuina.

Pepe Palovaara
pepe.palovaara@fintegrity.fi

A-osa

i Vastaa neljään tehtävään.

1. Lukujonoja ja funktioita 12 p.

Oikea vastaus 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

1.1 Lukujono (1, 2, 4, 7, ...) 2 p.

ei voi olla aritmeettinen eikä geometrinen

1.2 Lukujono (32, 16, 8, 4, ...) 2 p.

voi olla geometrinen

1.3 Lukujono (7, 9, 11, 13, ...) 2 p.

voi olla aritmeettinen

1.4 Olkoon $f(x) = (2 - x)^2$. Silloin funktion arvo $f(-1)$ on 2 p.

9

1.5 Olkoon $f(x) = 2x^2 - x$. Silloin funktion derivaatan arvo $f'(1)$ on 2 p.

3

1.6 Funktion derivaatan arvo kertoo 2 p.

funktion kuvaajan tangentin kulmakertoimen

CASIO

Laskimet

Yritys Opettajan tietopalvelu Lehdistötiedotteet



Opettaja & koulu

Vanhemmat & koululaiset

Tuotteet

Ajankohtaista

Yhteystiedot

Toimistolaskimet

Kouluun



COVID-19

CASIO TUKEE ETÄTYÖTÄ

15.4.2020-31.08.2021 välisenä aikana kaikki Casion matemaattiset ohjelmat ja sovellukset ovat ilmaiseksi käytettävissä. Tarkoitus on helpottaa etäopetusta ja -opiskelua.

Katso tästä

www.casio-laskimet.fi

CASIO

2. Vektoreita ja analyttistä geometriaa 12 p.

Olkoon $\vec{u} = 5\vec{i} + 12\vec{j}$.

1. Määritä vektorin $\vec{u}$ pituus. (3 p.)
2. Määritä vektorin $\vec{u}$ kanssa vastakkaissuuntainen vektori, jonka pituus on 5. (3 p.)
3. Suora L kulkee pisteiden $A = (4, 4)$ ja $B = (-1, -8)$ kautta. Ovatko suora L ja vektori $\vec{u}$ yhdensuuntaisia? (3 p.)
4. Määritä suoran L yhtälö muodossa $y = kx + b$. (3 p.)

1. $|\vec{u}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13.$

2. $-5 \cdot \vec{u}^0 = -5 \cdot \frac{1}{13} \cdot (5\vec{i} + 12\vec{j}) = -\frac{25}{13}\vec{i} - \frac{60}{13}\vec{j}.$

3. Vektori $\vec{AB} = (-1 - 4)\vec{i} + (-8 - 4)\vec{j} = -5\vec{i} - 12\vec{j} = -\vec{u}$, joten suora L ja vektori $\vec{u}$ ovat yhdensuuntaiset.

4. Sijoitetaan suoran yhtälöön toinen sen tunnetuista pisteistä ja kulmakerroin, jolloin

$$4 = \frac{-8 - 4}{-1 - 4} \cdot 4 + b \Leftrightarrow b = 4 - \frac{12 \cdot 4}{5} = -\frac{28}{5}$$

ja suoran yhtälö on

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{28}{5}.$$

CASIO ACADEMY



Casio Academy

Katso esimerkkejä ja yo-tehtävien ratkaisuja kätevästi videoiden avulla. Helppo tapa kerrata lukion matematiikkaa!

Casio Academy

fx-CP400 - 1/46



▶		Casio Academy k2019 T9 todennäköisyyksien laskemista... fx-CP400
2		Casio Academy k2019 T13 2 polynomifunktion määrittäminen... fx-CP400
3		Casio Academy k2019 T13 1 ehdot täyttävän polynomifunktion... fx-CP400
4		Casio Academy k2019 T8 lukujonon suurimman jäsenen tutkiminen fx-CP400
5		Casio Academy k2019 T6 puunrungon tilavuuden funktio kartiona fx-CP400
6		Casio Academy k2019 T5 maitopurkin särmion ja kartion tilavuudet fx-CP400

3. Murtolausekkeen integraali 12 p.

Jokaisesta osatehtävästä voi saada 4 pistettä.

1. Osoita, että yhtälö

$$\frac{4}{4-x^2} = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}$$

on voimassa kaikilla $x \neq \pm 2$.

2. Laske integraali

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2+x} dx.$$

3. Laske integraali

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{4-x^2} dx.$$

1. Murtolausekkeen osat on määritelty, kun $x \neq \pm 2$. Osoitetaan, että yhtälön puolet ovat samat. Oikea puoli saadaan muotoon $\frac{2-x}{(2+x)(2-x)} + \frac{2+x}{(2+x)(2-x)} = \frac{4}{4-x^2}$, mikä on identtinen yhtälön vasemman puolen kanssa.

MOT.

$$2. \int_{-1}^1 \frac{1}{2+x} dx = \int_{-1}^1 (\ln|2+x|) = \ln|3| - \ln|1| = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$$

3. Hyödyntämällä kohdan 1 tietoa $\frac{4}{4-x^2} = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x} \Leftrightarrow \frac{1}{4-x^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x} \right)$ saadaan

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{1}{4-x^2} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x} dx \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{2+x} dx - \int_{-1}^1 \frac{-1}{2-x} dx \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\ln(3) - \int_{-1}^1 (\ln|2-x|) \right) \quad \text{kohdan 2 nojalla} \\ &= \frac{1}{4} (\ln(3) - (\ln|1| - \ln|3|)) \\ &= \frac{\ln(3)}{2}. \end{aligned}$$

4. Peräaalto 12 p.

Aineisto

4.A Kuva: Funktion kuvaaja

1. Osoita, että funktion

$$f(x) = \frac{\tan x}{2 + \tan^2 x}$$

suurin arvo M välillä $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ on $M = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,3536$. Funktion kuvaaja on esitetty kuvassa 4.A. (9 p.)

2. Veden pinnalla vakionopeudella liikkuvan kappaleen (kuten veneen tai sorsan) taakse muodostuu V-kirjaimen muotoinen peräaalto, jonka avautumiskulma ei tietyillä oletuksilla riipu kappaleen nopeudesta. Kelvinin aaltoteorian mukaan tälle kulmalle α on voimassa yhtälö

$$\tan \frac{\alpha}{2} = M,$$

jossa M on kohdassa 1 laskettu arvo. Määritä kulman $\alpha \in [0^\circ, 180^\circ]$ likiarvo asteen tarkkuudella. (3 p.)

1. Lasketaan funktion derivaattafunktio $f'(x) = \frac{(1 + \tan^2 x) \cdot (2 + \tan^2 x) - \tan x \cdot 2 \cdot \tan x \cdot (1 + \tan^2 x)}{(2 + \tan^2 x)^2}$

$$= \frac{2 + 3 \tan^2 x + \tan^4 x - 2 \tan^2 x - 2 \tan^4 x}{(2 + \tan^2 x)^2} = \frac{-\tan^4 x + \tan^2 x + 2}{(2 + \tan^2 x)^2}.$$

Derivaatan nollakohdat saadaan

osoittajan nollakohdista. Tehdään sijoitus $p = \tan^2 x$, jolloin nollakohdat saadaan yhtälön $-p^2 + p + 2 = 0$ avulla.

$$-p^2 + p + 2 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} \Leftrightarrow p = \frac{-1 \pm 3}{-2} \Leftrightarrow p = -1 \vee p = 2.$$

Sijoitetaan arvot takaisin, jolloin

$\tan^2 x = -1 \vee \tan^2 x = 2$. Näistä ensimmäiseen ei ole ratkaisuja, koska toinen potenssi ei voi olla negatiivinen.

Jälkimmäisen yhtälön ratkaisuksi saadaan $\tan x = \sqrt{2} \vee \tan x = -\sqrt{2}$. Tutkittavalla välillä tangentti saa vain epänegatiivisia arvoja, joten jälkimmäinen vastaus ei käy. Funktion arvo ainoassa derivaatan nollakohdassa on

$$\frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Derivaatan nollakohta on paikallinen maksimi annetun kuvaajan perusteella.

2. Ratkaistaan yhtälö $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right) \Leftrightarrow \alpha = 2 \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right) = 38,9424...^\circ \approx 39^\circ.$

B1-osa

 Vastaa kolmeen tehtävään.

5. Rantatontti 12 p.

Matti omistaa järven rannalla suorakulmaisen kolmion muotoisen metsäpalstan, jonka kateettien pituudet ovat 150 m ja 120 m. Pidempi kateetti on suoralla rantaviivalla. Matti myy palstastaan Marjalle pinta-alaltaan mahdollisimman suuren suorakulmion muotoisen rantatontin, jonka kaksi sivua ovat metsäpalstan kateeteilla. Mitkä ovat Marjan ostaman rantatontin sivujen pituudet?

5. Rantatontti

Hahmotelma =>



Merkitään hypotenuusalla Marjan tontin kulmapistettä D, siitä pidemmälle kateetille piirretyn normaalin ja pidemmän kateetin leikkauspistettä F sekä lyhyemmälle kateetille piirretty normaalin ja lyhyemmän kateetin leikkauspistettä E. Merkitään suoran kulman kärkeä B, lyhyemmän kateetin toista päätepistettä A ja pidemmän kateetin toista päätepistettä C. Merkitään kulman C suuruutta α , jonka arvo saadaan yhtälöstä

$$\text{solve}(\tan(\alpha) = \frac{120}{150}, \alpha) \mid 0 < \alpha < 180$$

$$\left\{ \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \right\}$$

ans

$$\{\alpha = 38.65980825\}$$

Sijoitetaan kulman arvo muuttujaan α myöhempiä laskuja varten.

$$\alpha := \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$$

Olkoon $FC = x$, jolloin tontin pinta-ala on

$$\text{define } A(x) = x \cdot \tan(\alpha) \cdot (150 - x)$$

done

ja sen derivaatta

$$\text{define } A'(x) = \frac{d}{dx}(A(x))$$

done

$$A'(x)$$

$$-2 \cdot x \cdot \tan(\alpha) + 150 \cdot \tan(\alpha)$$

Tällöin derivaatan nollakohta on

$\text{solve}(A'(x)=0, x)$

$\{x=75\}$

Tämä on paikallinen maksimi, sillä derivaatan merkki muuttuu siinä positiivisesta negatiiviseksi:

$A'(70)$

8

$A'(80)$

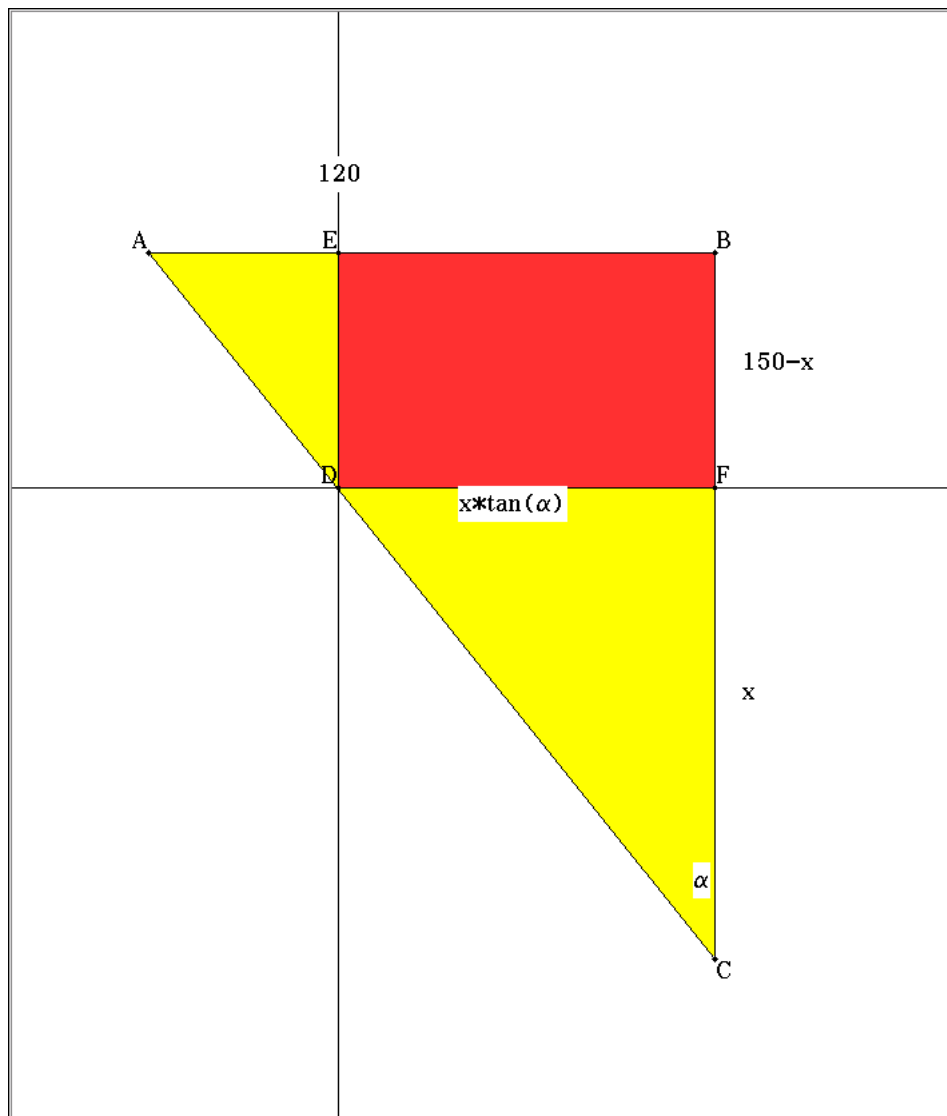
-8

Nyt tontin mitoiksi saadaan $150-75=75\text{m}$ ja

$75*\tan(\alpha)$

60

Vastaus: Tontin mitat ovat 75m ja 60m.



6. Kellarimestarin suunnitelma 12 p.

Eräitä juomia ja maustekastikkeita kysytetään puisissa astioissa, jolloin niihin liukenee astian seinämästä makuaineita. Kellarimestarilla on teoria, jonka mukaan säilytysaikana nesteeseen liukenevien makuaineiden määrä on suoraan verrannollinen säilytysastian pinta-alan ja tilavuuden osamäärään. Kellarimestari suunnittelee kysyttävänsä erän tuotetta astioissa, jotka ovat tavallisten kanssa yhdenmuotoisia, mutta joiden tilavuus on vain neljäsosa tavallisesta. Astian materiaali ja kypsytysaika ovat samat kuin tavallisesti.

Kuinka monta prosenttia enemmän makuaineita tällöin liukenee tuotteeseen kellarimestarin teorian mukaan?

6. Kellarimestarin suunnitelma

Ennen makuaineiden määrä on $\frac{A}{V}$, missä A on astian pinta-ala ja V on astian tilavuus. Koska pienimpi astia on yhdenmuotoinen, sen ja alkuperäisen astian välillä on mittakaava k .

$k^3 = \frac{1}{4}$, josta $k = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$. Edelleen $k^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{4^2}}$, mikä on alojen suhde. Uudessa

astiassa makuaineiden määrä on $\frac{1}{\sqrt[3]{4^2}}$ -kertainen eli n.

1,5874...-kertainen.

Vastaus: Makuaineita liukenee n. 58,7% enemmän.



ClassWiz-laskimet apuna opiskelussa!

7. Afrikan tähti 12 p.

Aineisto

7.A Kuva: Afrikan tähti

Liisa pelaa Afrikan tähti -peliä. Hän on löytänyt Afrikan tähden ja on palaamassa Kairoon voittaakseen pelin (aineisto 7.A). Hän on neljän askeleen päässä Kairosta. Kairoon saa pysähtyä, vaikka nopan silmäluku oikeuttaisi matkustamaan pidemmälle.

Jos hän heittää vähintään silmäluvun neljä, hän pääsee Kairoon ja voittaa pelin. Jos hän heittää silmäluvun kolme, hän voi olla varma, että seuraavalla heitolla hän pääsee Kairoon ja voittaa pelin. Liisa tarvitsee korkeintaan neljä heittoa päästäkseen Kairoon. Oletetaan, että kukaan muu ei voita peliä tätä ennen.

1. Millä todennäköisyydellä Liisa voittaa ensimmäisellä heitolla? (2 p.)
2. Millä todennäköisyydellä Liisa tarvitsee vähintään kolme heittoa päästäkseen Kairoon? (4 p.)
3. Laske niiden heittojen lukumäärän odotusarvo, jotka Liisa tarvitsee päästäkseen Kairoon. (6 p.)

7. Afrikan tähti

1. Todennäköisyys on sama kuin saada yhden nopan heitolla silmäluvuksi 4, 5 tai 6 eli $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2. Nopan heitto useamman kerran muodostaa sarjan toisistaan riippumattomia tapahtumia.

$$\begin{aligned}
 &P(\text{"vähintään kolme heittoa voittoon"}) \\
 &= P(\text{"3 tai 4 heittoa voittoon"}) \\
 &= P(\text{"3 heittoa"}) + P(\text{"4 heittoa"}) \\
 &= P(\text{"ykkönen ja ykkönen ja vähintään kakkonen tai ykkönen ja kakkonen ja mikä vain tai kakkonen ja ykkönen ja mikä vain"}) + P(\text{"ykkönen, ykkönen, mikä vain"}) \\
 &= P(\text{"ykkönen ja ykkönen ja vähintään kakkonen"}) + P(\text{"ykkönen ja kakkonen ja mikä vain"}) + P(\text{"kakkonen ja ykkönen ja mikä vain"}) + P(\text{"ykkönen, ykkönen, mikä vain"}) = \\
 &\frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{5}{6} + \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{6}{6} + \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{6}{6} + \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{6}{6}
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{12}$$

Todennäköisyys vähintään kolmelle heitolle on $\frac{1}{12}$.

3. Liisa tarvitsee päästäkseen Kairoon 1, 2, 3 tai 4 heittoa. Vastaavat pistetodennäköisyydet ovat

$$p_1 := \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

(1. kohdan mukaan),

$$p_3 := \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{5}{6} + \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{6}{6} + \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{6}{6}$$

$$\frac{17}{216}$$

(2. kohdan mukaan),

$$p_4 := \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{6}{6}$$

$$\frac{1}{216}$$

(niinikään 2. kohdan mukaan), jolloin

$$p_2 := 1 - \frac{1}{2} - \frac{17}{216} - \frac{1}{216}$$

$$\frac{5}{12}$$

Kysytty odotusarvo on

$$p_1 * 1 + p_2 * 2 + p_3 * 3 + p_4 * 4$$

$$\frac{343}{216}$$

ans

$$1.587962963$$

Odotusarvo on n. 1,6 heittoa.



8. Pinta-alan arviointi simuloinnilla 12 p.

Tasojoukon A pisteet (x, y) määräytyvät epäyhtälöistä $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 4$ ja $y \geq x^2$. Tässä tehtävässä on tarkoitus arvioida joukon A pinta-alaa simulaation avulla käyttämällä sitä tietoa, että todennäköisyys on suoraan verrannollinen pinta-alaan. Arvotaan pisteitä (x, y) suorakulmiosta B , jonka määräävät epäyhtälöt $0 \leq x \leq 2$ ja $0 \leq y \leq 4$.

1. Tee sopivalla ohjelmistolla koodi, joka arpoo 1 000 pistettä suorakulmiosta B ja tulostaa vastauksena niiden pisteiden lukumäärän, jotka kuuluvat joukkoon A . Kerro sanallisesti ja sopivien kuvakaappausten avulla, miten toteutit koodisi. (Vihje: Voit käyttää esimerkiksi taulukkolaskennan satunnaislukugeneraattoria.) (6 p.)
2. Hille ajoi kohdassa 1 tekemänsä koodin 10 kertaa ja sai alla olevat luvut. Laske tulosten keskiarvo ja arvioi tämän perusteella joukon A pinta-alaa. (6 p.)

Hillen koodin tulosteet: 673, 664, 672, 679, 667, 650, 640, 678, 660, 667

Alla on koodi kopiointia ja testausta varten. Ohjelman voi ajaa esim. Python-editorissa

<https://www.programiz.com/python-programming/online-compiler/>

from random import*	#Otetaan satunnaisluvut sisältävä kirjasto käyttöön
n=0	#Alustetaan muuttuja n
for i in range(1000):	#Määritellään silmukka 1000 toistolle
x=2*random()	#Arvotaan muuttujaan x satunnaisluku välillä [0,2]
y=4*random()	#Arvotaan muuttujaan y satunnaisluku välillä [0,2]
if y>=x*x:	#Testataan, toteutuuko tehtävän ehto
n+=1	#Jos toteutuu, lisätään muuttujaan n yksi+
print(n)	#1000 toiston jälkeen tulostetaan ehdon täyttäneiden lukuparien lukumäärä

8. Pinta-alan arviointi simuloinnilla

2. Koko suorakulmion pinta-ala on $2 \cdot 4 = 8$. Lasketaan, kuinka suuri osuus saaduista satunnaisluvuista keskimäärin osuu alueeseen A ja lasketaan pinta-alalle arvio:

$$\frac{673+664+672+679+667+650+640+678+660+667}{10} / 1000 \cdot 8$$

$$\frac{133}{25}$$

ans

5.32

Vastaus: Pinta-alan suuruus on n. 5,3 pay.

9. Paloittain määritelty funktio 12 p.

Funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään kaavalla

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & \text{kun } x \leq 0 \\ (ax + 1)^2 + a(1 - a), & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$

- Selvitä, millä parametrin $a \in \mathbb{R}$ arvoilla f on kaikkialla jatkuva. (6 p.)
- Selvitä, millä parametrin $a \in \mathbb{R}$ arvoilla f on kaikkialla derivoituva. (6 p.)

9. Paloittain määritelty funktio

1. Molemmat osafunktiot ovat polynomeina kaikkialla jatkuvia. Funktio f on kaikkialla jatkuva, jos se on jatkuva osafunktioiden liitoskohdassa $x=0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 + 1)$$

1

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} ((a \cdot x + 1)^2 + a \cdot (1 - a))$$

$$-a \cdot (a - 1) + 1$$

$f(0) = 0^3 + 1 = 1$. Jos vasen ja oikea raja-arvo kohdassa $x=0$ ovat samat kuin funktion arvo kohdassa $x=0$, on funktio jatkuva kohdassa $x=0$.

$$\text{solve}(-a \cdot (a - 1) + 1 = 1, a)$$

$$\{a=0, a=1\}$$

Vastaus: Funktio f on kaikkialla jatkuva, kun $a=0$ tai $a=1$.

2. Funktion osafunktiot ovat polynomeina kaikkialla derivoituvia. Funktio f on kaikkialla derivoituva, jos sen osafunktioiden derivaatat lähestyvät samaa arvoa liitoskohdassa $x=0$ ja funktio on jatkuva kohdassa $x=0$. Edellisen kohdan nojalla riittää tutkia parametrin a arvot 0 ja 1, sillä muuten funktio ei voi olla jatkuva eikä siis derivoituvakaan kohdassa $x=0$.

Kun $a=0$, on funktio $\begin{cases} x^3 + 1, & \text{kun } x \leq 0 \\ 1, & \text{kun } x > 0 \end{cases}$. Alempi osafunktioista on vakio,

joten sen derivaatta on aina 0. Ylemmän osafunktion derivaatta on $3x^2 \rightarrow 0$, kun $x \rightarrow 0^-$.

Kun $a=1$, on funktio $\begin{cases} x^3 + 1, & \text{kun } x \leq 0 \\ (x+1)^2, & \text{kun } x > 0 \end{cases}$. Nyt alemman osafunktion

derivaatta on $2x+2 \rightarrow 2$, kun $x \rightarrow 0^+$. Ylemmän osafunktion derivaatta puolestaan lähestyi lukua 0, joten funktio f ei ole jatkuva parametrin a arvolla 1.

Vastaus: f on kaikkialla derivoituva, kun $a=0$.

B2-osa

 Vastaa kolmeen tehtävään.

10. Matemaattista tekstiä 12 p.

Aineisto

10.A Teksti: Matematiikan tekstipätkiä

Matemaattinen teksti rakentuu mm. käsitteiden **määritelmistä**, yleisesti pätevistä tuloksista (**lauseet**), tulosten **todistuksista** ja erikoistapauksiin sovelletuista laskuista (**esimerkit**).

1. Valitse aineiston 10.A kunkin tekstin (a)–(c) kohdalla, onko kyseessä **määritelmä**, **lause**, **todistus** vai **esimerkki**. Vastauksia ei tarvitse tässä kohdassa perustella. (3 p.)
2. Minkä lauseen kohdassa 1 valitsemasi **todistus** osoittaa todeksi? Muotoile lauseen sisältö täsmällisesti niin, että sen yhteys **todistukseen** käy ilmi. (4 p.)
3. Kohdassa 1 valitsit yhden tekstin **lauseeksi**. Todista tämä **lause**. (5 p.)

10. Matemaattista tekstiä

1. Aineiston kohdille a)–c) pätee, että

- a) on todistus
- b) on määritelmä
- c) on lause

2. Kohta a) pitää sisällään todistuksen sille lauseelle, että jos kolmion sivut toteuttavat Pythagoraan lauseen, kolmio on suorakulmainen. Todistus alkaa mielivaltaisesta kolmiosta, jonka sivut toteuttavat Pythagoraan lauseen. Seuraavaksi kolmiota verrataan suorakulmaiseen kolmioon, jossa kateetit ovat yhtäpitkät kuin mielivaltaisen kolmion. Laskemalla osoitetaan, että kolmaskin sivu on yhtä pitkä, jolloin kolmiot ovat yhtenevät (sss) ja niiden kaikki vastinkulmat ovat yhtä suuret. Näin ollen alun mielivaltaisessakin kolmiossa on suorakulma.

3. Todistetaan kohdan c) mukainen lause.

Oletus: Olkoon n sellainen positiivinen kokonaisluku, jonka numeroiden summa on jaollinen kolmella.

Väite: Luku n on jaollinen kolmella.

Todistus: Olkoon luvun n kymmenjärjestelmämuoto $a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0$ eli

$n = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + a_k \cdot 10^k$. Tutkitaan kymmenenpotensseja kongruenssin modulo 3 avulla. Koska

$10^p = (9+1)^p \equiv 1 \pmod{3}$, niin

$n \equiv a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \dots + a_{k-1} \cdot 1 + a_k \cdot 1 \pmod{3} = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_k$. Siis luku n on jaollinen kolmella jos sen luvun numeroiden summa on jaollinen kolmella.

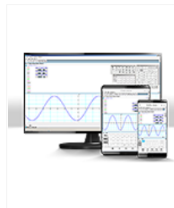
<https://www.casio-laskimet.fi/fi/tuotteet/ohjelmistotjaesityslaitteet/>



ClassWiz Emulator

Koneelle asennettava ohjelmisto, joka toimii kuten ClassWiz-sarjan laskimet

[Tuotetietoihin](#)



ClassPad II Manager UUTTA

Koneelle asennettava ohjelmisto, joka toimii kuten ClassPad fx-CP400

[Tuotetietoihin](#)



FX-CG50 Manager

Koneelle asennettava ohjelmisto, joka vastaa toiminnaltaan laskinta fx-CG50

[Tuotetietoihin](#)

jälleenmyyjien että oman nettikaupan kautta.

Lisenssin keston voi valita 1 tai 3 vuodeksi. Yhden koneen asennuksen (single license) lisäksi CASIO tukee usean koneen keskitettyä asennusta 10, 30 ja 100 koneen voluumilisensseillä (volume license), jotka sopivat ylläpidon suorittamiin asennuksiin.

[LISÄ TIETOA](#)

Kokeiluversio

Kaikista ohjelmista voi ladata 90 päivän ilmaisen kokeiluversion. Ohjelma on täysversio, joten voit tutustua monipuolisten ohjelmien kaikkiin ominaisuuksiin veloituksetta.

[LATAA ILMAISVERSIO](#)

Ilmainen opettajalisenssi

CASIO tukee opettajia tarjoamalla ilmaisen lisenssin. Lähetä koulusi nimi osoitteeseen info@casio.fi omasta työ sähköpostistasi, niin saat paluupostissa lisenssin oikeuttavan tunnuksen.

[TILAA OPETTAJALISENSSI](#)

CASIO EDU+ sovellus

11. Kokonaislukuja 12 p.

1. Kumpi luvuista

$$99^{100^{101}} \quad \text{ja} \quad 101^{100^{99}}$$

on suurempi? (4 p.)

2. Lukujono (a_n) määritellään rekursiivisesti kaavoilla $a_1 = 1$, $a_{2n} = a_n$ ja $a_{2n+1} = 1 - a_n$, kun $n = 1, 2, 3, \dots$. Määritä lukujonon seitsemäs jäsen a_7 ja 2021. jäsen a_{2021} . (8 p.)

11. Kokonaislukuja

1. Logaritmi aidosti kasvavana funktiona säilyttää suuruusjärjestyksen.

$$\log_{10}(99^{100^{101}}) = 100^{101} \cdot \log_{10}(99) = 100^2 \cdot 100^{99} \cdot \log_{10}(99), \quad \text{jossa}$$

$$100^2 \cdot \log_{10}(99)$$

19956.35195

ja

$$\log_{10}(101^{100^{99}}) = 100^{99} \cdot \log_{10}(101), \quad \text{jossa}$$

$$\log_{10}(101)$$

2.004321374

Merkitään $100^{99} = a$, jolloin luvut logaritmin ottamisen jälkeen ovat n. 19956a ja n. 2a. Näistä ensimmäinen on suurempi ($a > 0$) eli alkuperäisten lukujen suuruusjärjestys on $99^{100^{101}} > 101^{100^{99}}$.

Ehto 1. Sijoitetaan toisen rekursion kaavasta $a_n = a_{2n}$ kolmanteen rekursioyhtälöön, jolloin saadaan $a_{2n+1} + a_{2n} = 1$ eli aina parittoman lukujonon jäsenen ja sen edeltäjän summa on 1, kun $n > 1$.

Ehto 2. Lisäksi $a_{2n+1} + a_n = 1$ eli vähentämällä parittomasta indeksistä yksi ja puolittamalla se saadaan lukujonon jäsen, jonka summa alkuperäisen jäsenen kanssa on 1.

Ehto 3. Koska $a_n = a_{2n}$, niin kaikkien tunnettujen lukujonon jäsenten kaksinkertaista indeksia vastaavat jäsenet ovat samat kuin tunnetun lukujonon jäsenet, vastaavasti myös puolet indeksiltään olevat lukujonon jäsenet ovat samoja alkuperäisen kanssa.

$a_2 = a_1 = 1$ ja seuraava pariton indeksi $a_3 = 0$ ehdon 1 mukaan. Koska $a_3 = 0$, niin sen kaksinkertaista indeksia vastaava jonon jäsen on sama eli $a_6 = 0$. Koska $a_6 = 0$, niin seuraava pariton jäsen ehdon 1 mukaan on $a_7 = 1$.

Muita jonon alun jäseniä ovat

$a_4 = a_2 = 1$ ja seuraava pariton $a_5 = 0$.

$a_8 = a_4 = 1$ ja seuraava pariton $a_9 = 0$.

$a_{2021} + a_{2020} = 1$ (ehto 1)

$a_{2021} + a_{1010} = 1$ (ehto 3)

$a_{2021} + a_{505} = 1$ (ehto 3)

Parillinen indeksi voidaan siis aina puolittaa ilman, että sillä on vaikutusta

summaan. Pariton indeksi voidaan aina laskea yhteen edeltäjänsä kanssa ja summaksi saadaan aina 1.

$a_{505} + a_{504} = 1$ (ehto 1)

$a_{505} + a_{252} = 1$ (ehto 3)

$a_{505} + a_{126} = 1$ (ehto 3)

$a_{505} + a_{63} = 1$ (ehto 3)

$a_{63} + a_{62} = 1$ (ehto 1)

$a_{63} + a_{31} = 1$ (ehto 3)

$a_{31} + a_{30} = 1$ (ehto 1)

$a_{31} + a_{15} = 1$ (ehto 3)

$a_{15} + a_{14} = 1$ (ehto 1)

$a_{15} + a_7 = 1$ (ehto 3) Aiemmin jo pääteltiin, että $a_7 = 1$, joten $a_{15} = 0$, $a_{31} = 1$, $a_{63} = 0$, $a_{505} = 1$, $a_{2021} = 0$.

Vastaus: $a_7 = 1$ ja $a_{2021} = 0$.

	A	B
1	n	a_n
2	1	1
3	2	1
4	3	0
5	4	1
6	5	0
7	6	0
8	7	1
9	8	1
10	9	0
11	10	
12	11	
13	12	
14	13	

12. Piilotetut pallot 12 p.

Pöydällä on kolme 3-säteistä palloa, joista kukin pallo koskettaa kahta muuta. Pallot yritetään peittää puolipallon muotoisella kuvulla, jonka säde on R . Kupu on kuitenkin liian pieni, jolloin sen reuna jää joka kohdassa 1 yksikön korkeudelle pöydästä. Määritä säteen R tarkka arvo.

12. Piilotetut pallot

Yhdistämällä pallojen keskipisteet saadaan tasasivuinen kolmio. Sivun pituus on keskipisteiden etäisyys eli $2 \cdot 3 = 6$.

Tasasivuisen kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, missä a on kolmion sivun pituus. Siis jokainen tasasivuisen kolmion kärjistä ja siten pallojen keskipisteistä on etäisyydellä $\frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ keskinormaalien leikkauspisteestä, joka puolestaan on luotisuoraan puolipallon muotoisen kuvun ylimmän pisteen alapuolella.

Puolipallon keskipiste on 1 yksikön irti pöydästä, joten keskinormaalien leikkauspiste on 2 yksikköä keskipisteen yläpuolella. Suorakulmaisesta kolmiosta (pallon keskipiste, keskinormaalien leikkauspiste, puolipallon keskipiste) saadaan pallon ja puolipallon keskipisteiden etäisyydeksi

$$\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2}$$

4

Puolipallon säde on siis 4 (edellä) $+ 3$ (pallon säde) $= 7$ yksikköä.



13. Polynomien esitysmuodot 12 p.

Olkoot $n \geq 1$ kokonaisluku ja $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $\alpha_i \neq 0$, kaikille kokonaisluvuille $0 \leq i \leq n$.

Tutkitaan polynomeja

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0$$

ja

$$Q(x) = \left(x - \frac{1}{\alpha_1}\right) \left(x - \frac{1}{\alpha_2}\right) \cdots \left(x - \frac{1}{\alpha_n}\right) = q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \cdots + q_1 x + q_0.$$

Tässä siis kertoimet p_i ja q_i määräytyvät yhtälöiden perusteella annettujen lukujen α_j avulla.

1. Laske kaikki luvut p_i ja q_i , kun $n = 2$, $\alpha_1 = 2$ ja $\alpha_2 = 3$. (2 p.)
2. Ratkaise kaikki luvut p_i ja q_i lukujen α_1 ja α_2 avulla tapauksessa $n = 2$. (4 p.)
3. Esitä luvut q_i lukujen p_j ($0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq n$) avulla yleisessä tapauksessa. (6 p.)

13. Polynomien esitysmuodot

1. Luvut p_i ja q_i ovat polynomien termien kertoimia. Muodostetaan polynomit ja avataan sulut:

`expand((x-2)(x-3))`

$$x^2 - 5x + 6$$

joten $p_0=6$, $p_1=-5$ ja $p_2=1$. Vastaavasti

`expand((x-1/2)(x-1/3))`

$$x^2 - \frac{5x}{6} + \frac{1}{6}$$

joten $q_0=\frac{1}{6}$, $q_1=-\frac{5}{6}$ ja $q_2=1$.

2. Yleisessä muodossa edellinen tehtävä

`expand((x-α1)(x-α2))`

$$x^2 - \alpha_1 x - \alpha_2 x + \alpha_1 \alpha_2$$

`collect(ans)`

$$x^2 - (\alpha_2 + \alpha_1) \cdot x + \alpha_1 \alpha_2$$

joten $p_0=\alpha_1 \alpha_2$, $p_1=-(\alpha_2 + \alpha_1)$ ja $p_2=1$. Vastaavasti

`expand((x-1/α1)(x-1/α2))`

$$x^2 - \frac{x}{\alpha_1} - \frac{x}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2}$$

`collect(ans)`

$$x^2 - \left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_1}\right) \cdot x + \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2}$$

joten $q_0=\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2}$, $q_1=-\left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_1}\right)$ ja $q_2=1$.

3. Mietitään, miten löydetään yhteys polynomien $P(x)$ ja $Q(x)$ välille.

Koska $\frac{1}{x} - \alpha_1 = \frac{\alpha_1}{x} * \left(\frac{1}{\alpha_1} - x\right)$, niin jatketaan päättelyä muiden tulontekijöiden osalta, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{x}\right) &= \left(\frac{1}{x} - \alpha_1\right) \left(\frac{1}{x} - \alpha_2\right) \dots \left(\frac{1}{x} - \alpha_n\right) \\ &= \frac{\alpha_1}{x} * \left(\frac{1}{\alpha_1} - x\right) * \frac{\alpha_2}{x} * \left(\frac{1}{\alpha_2} - x\right) \dots \frac{\alpha_n}{x} * \left(\frac{1}{\alpha_n} - x\right) \\ &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}{x^n} \left(\frac{1}{\alpha_1} - x\right) \left(\frac{1}{\alpha_2} - x\right) \dots \left(\frac{1}{\alpha_n} - x\right). \end{aligned}$$

Tämä on etumerkkiä vaille $\frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}{x^n} * Q(x)$. Jos tulontekijöitä on parillinen määrä, niin etumerkkikin on oikein. Esim. tapaus $n=2$, jolloin

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{x}\right) &= \left(\frac{1}{x} - \alpha_1\right) \left(\frac{1}{x} - \alpha_2\right) \\ &= \frac{\alpha_1 \alpha_2}{x^2} \left(\frac{1}{\alpha_1} - x\right) \left(\frac{1}{\alpha_2} - x\right) \\ &= \frac{\alpha_1 \alpha_2}{x^2} (-1) \left(x - \frac{1}{\alpha_1}\right) (-1) \left(x - \frac{1}{\alpha_2}\right) \\ &= \frac{\alpha_1 \alpha_2}{x^2} * Q(x) \end{aligned}$$

Jos tulontekijöitä on pariton määrä, niin etumerkki pitää korjata kertoimella -1 . Esim. tapaus $n=1$, jolloin

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{x}\right) &= \left(\frac{1}{x} - \alpha_1\right) \\ &= \frac{\alpha_1}{x} \left(\frac{1}{\alpha_1} - x\right) \\ &= \frac{\alpha_1}{x} (-1) \left(x - \frac{1}{\alpha_1}\right) \\ &= -\frac{\alpha_1}{x} * Q(x) \end{aligned}$$

Saadaan yleisesti pätevä tapaus

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}{x^n} * (-1)^n * Q(x), \text{ josta} \\ \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n * (-1)^n} * x^n * P\left(\frac{1}{x}\right) &= Q(x) \\ \frac{(-1)^n}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} * x^n * \left(p_n \left(\frac{1}{x}\right)^n + p_{n-1} \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + \dots + p_1 \left(\frac{1}{x}\right) + p_0\right) &= Q(x) \\ \frac{(-1)^n}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} * (p_n + p_{n-1}x + \dots + p_1x^{n-1} + p_0x^n) &= q_nx^n + q_{n-1}x^{n-1} + \dots + q_1x + q_0 \end{aligned}$$

joten termien kertoimien vastaavuus on $\frac{(-1)^n}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} * p_{n-i} = q_i$.