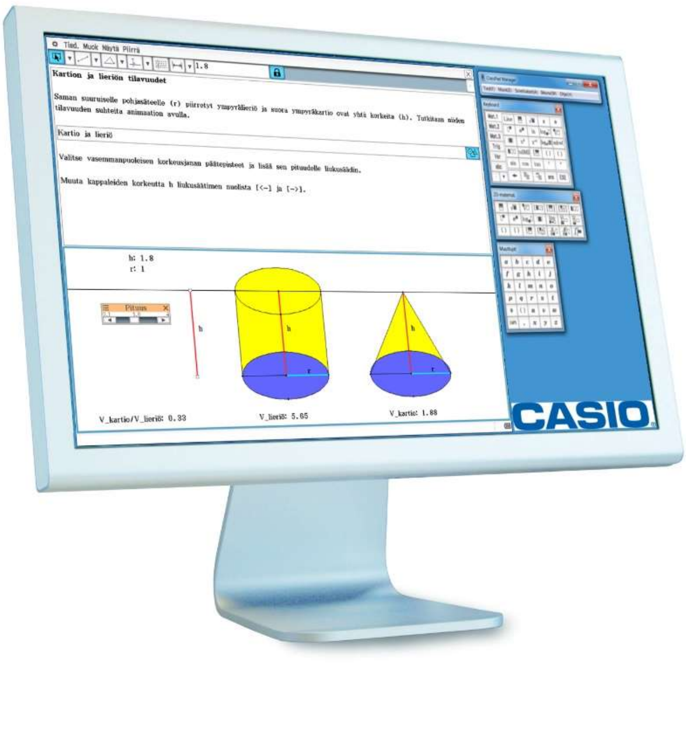
Laske Laudatur ClassPadilla
Pitkä matematiikka, syksy 2021



Tiivistelmä

Syksyn 2021 sähköisten yo-kokeiden ratkaisut ClassPad Managerilla laskettuina.

Pepe Palovaara
pepe.palovaara@fintegrity.fi

A-osa

Vastaa neljään tehtävään.

1. Sopivia lukuja 12 p.

Valitse oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 3 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

1.1 Mikä on lausekkeen $1-3x$ arvo, kun $x=2$? 3 p.

-5

1.2 Jonon (a_n) yleinen termi on muotoa $a_n = 3\cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Mikä on termi a_3? 3 p.

24

1.3 Jono (b_n) toteuttaa ehdot $b_6 = 6$ ja $b_{n+1} = b_n + 4$, $n \in \mathbb{N}$. Mikä on termi b_4? 3 p.

-2

1.4 Polynomi $(x^2+5x+1)(x+3)$ kerrotaan auki, jolloin muodostuu kolmannen asteen polynomi. Mikä on sen toisen asteen termin kerroin? 3 p.

8

2. Geometrisia pikkutehtäviä 12 p.

Valitse oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

2.1 Paraabelit $y = 4x^2$ ja $y = x^2 - 1$ 2 p.

eivät leikkaa

2.2 Pisteiden $(1, 6)$ ja $(-1, -6)$ välisen janan keskinormaalin kulmakertoimelle k on voimassa 2 p.

$-1 < k < 0$

2.3 Ympyrän $9x^2 + 9y^2 = 1$ säde on 2 p.

$1/3$

2.4 Tasokäyrä koostuu kaikista niistä pisteistä, jotka ovat yhtä kaukana yhdestä kiinteästä pisteestä ja yhdestä kiinteästä suorasta. Tämä tasokäyrä on 2 p.

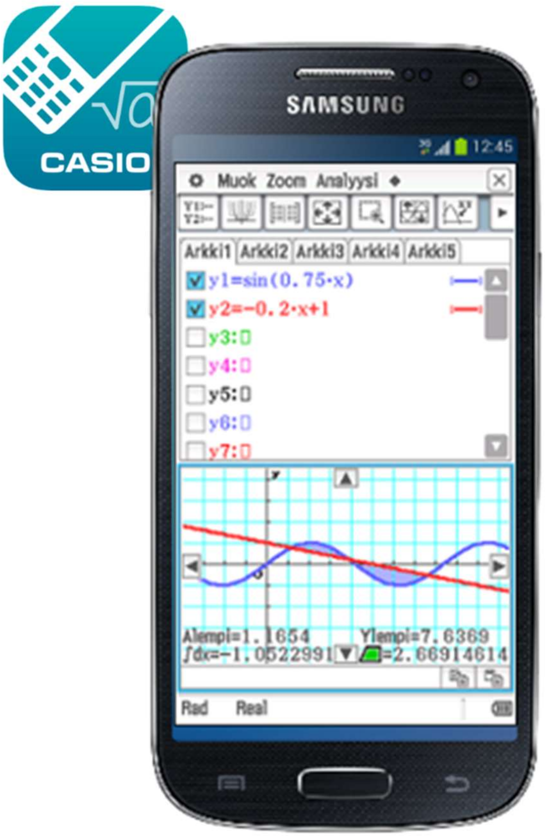
paraabeli

2.5 Kuinka monta ratkaisua on yhtälöllä $\cos(3x) = 0{,}5$ välillä $0 < x < \pi$? 2 p.

3

2.6 Ympyrälle $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ on piirretty tangentti, joka kulkee pisteen $(0, -4)$ kautta. Tangentti 2 p.

voi olla laskeva tai nouseva



Tiesitkö, että ClassPad Manager toimii myös iOS- ja Android-alustoilla?

Lataa ohjelma AppStoresta tai Play-kaupasta ja voit käyttää sitä kännykällä tai tabletilla.

Kosketusnäyttökynä auttaa kursorin sijoittamisessa haluttuun paikkaan, mutta ohjelman on käytettävissä myös sormella.

3. Integraaleja 12 p.

Jokaisesta osatehtävästä voi saada 4 pistettä.

1. Laske
$$\int (x^2+1)\,dx.$$
2. Laske
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\,dx.$$
3. Laske
$$\int_{-1}^{1} |x|^3\,dx.$$

1. $\frac{1}{3}x^3 + x + C$

2. $\frac{1}{2}\Big/_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin(2x)) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \sin(2\cdot 0)\right) = 0$

3. $\int_{-1}^{0} (-x)^3 dx + \int_0^1 x^3 dx = -\frac{1}{4}\Big/_{-1}^{0} (x^4) + \frac{1}{4}\Big/_{0}^{1} (x^4)$

$= -\frac{1}{4}\left(0^4 - (-1)^4\right) + \frac{1}{4}\left(1^4 - 0^4\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

4. Tasokäyrä 12 p.

Tarkastellaan vektoreita $\overline{v}(t) = t\,\overline{i} + \frac{1}{t^2}\,\overline{j}$, kun $t > 0$.

1. Laske pistetulo $(\overline{i} - \overline{j}) \cdot \overline{v}(3)$. **(3 p.)**
2. Määritä vektorin $\overline{v}(3)$ pituus. **(2 p.)**
3. Millä muuttujan $t > 0$ arvolla vektori $\overline{v}(t)$ on mahdollisimman lyhyt? **(7 p.)**

Tällaista jatkuvaa vektoriarvoista funktiota kutsutaan *käyrän parametrisoinniksi*.

1. $(\bar{\mathrm{i}} - \bar{\mathrm{j}}) \cdot \left(3\bar{\mathrm{i}} + \frac{1}{3^2}\bar{\mathrm{j}}\right) = 1\cdot 3 - 1\cdot\frac{1}{9} = \frac{26}{9}$

2. $|v(3)| = \sqrt{3^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{730}{81}} = \frac{1}{9}\sqrt{730}$

3. Vektorin $\overline{v}(t)$ pituus on $\sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{t^2}\right)^2} = \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^4}}$. Koska neliöjuuri on aidosti kasvava funktio, saa pituus pienimmän arvon silloin, kun juurrettava on pienin. Juurrettavan derivaatta on $2t - 4t^{-5} = \frac{2t^6 - 4}{t^5}$ ja sen nollakohdat saadaan ratkaistua yhtälöstä $2t^6 - 4 = 0 \Leftrightarrow t^6 = 2 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt[6]{2}$. Tehtävän ehdon mukaan vain positiivinen juuri käy Derivaatan merkit nollakohdan läheisyydessä ovat $\frac{2\cdot 1^6 - 4}{1^5} = -2 < 0$ ja $\frac{2\cdot 2^6 - 4}{2^5} = \frac{124}{32} > 0$ eli merkki vaihtuu - + ja pituuden pienin arvo saadaan kun $t = \sqrt[6]{2}$.

B1-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

5. Ilmanpaine 12 p.

Ilmanpaine pienenee maanpinnalta ylöspäin noustaessa kaavan

$$p(h) = p_0\left(1 - \frac{0{,}00976h}{T_0}\right)^{3{,}50}$$

mukaisesti, kun p_0 ja T_0 ovat ilmanpaine ja lämpötila maanpinnalla (yksikköinä kPa ja K), ja h on korkeus maanpinnalta (m). Lentokoneen lähtiessä nousuun on $p_0 = 101{,}3$ (kPa) ja $T_0 = 301$ (K). Kuinka monta prosenttia ilmanpaine muuttuu, kun lentokone nousee kahden kilometrin korkeudesta kolmen kilometrin korkeuteen?

Lasketaan, kuinka monikertaiseksi ilmanpaine muuttuu:

$$\frac{101.3*\left(1-\frac{0.00976*3000}{301}\right)^{3.50}}{101.3*\left(1-\frac{0.00976*2000}{301}\right)^{3.50}}$$

0.8838106336

Väheneminen prosentteina on

(1−0.8838106336)*100

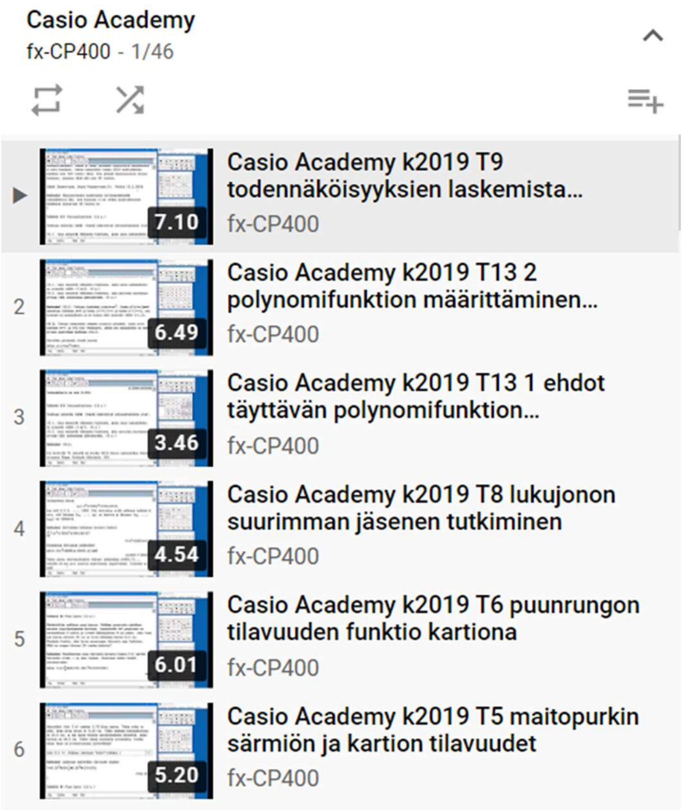
11.61893664

Vastaus: Ilmanpaine vähenee n. 11.6%.

Casio Academy

Katso esimerkkejä ja yo-tehtävien ratkaisuja kätevästi videoiden avulla. Helppo tapa kerrata lukion matematiikkaa!

bit.ly/casio-academy



6. Yhtälöitä tasossa 12 p.

1. Tasojoukko A koostuu niistä pisteistä (x, y), joiden etäisyys pisteestä $(-3, 1)$ on 4. Mikä yhtälö kuvaa joukon A pisteitä? Miksi joukon A pisteitä ei voida esittää muodossa $y = f(x)$ minkään funktion f avulla? **(6 p.)**
2. Määritä niiden ympyröiden yhtälöt, joiden keskipiste on $(1, 2)$ ja jotka sivuavat ympyrää $x^2 + (y-2)^2 = 4$. **(6 p.)**

1\. Joukko A muodostuu ympyrän kehän pisteistä, joiden etäisyys pisteestä $(-3,1)$ on säteen 4 verran. Tätä kuvaa yhtälö $(x+3)^2+(y-1)^2=4^2$. Funktion määritelmään kuuluu, että mitään muuttujan x arvoa ei voi vastata kaksi eri funktion arvoa. Esim. kohdassa $x=-3$ ympyrällä on pisteet $(-3,-3)$ ja $(-3,5)$, joten mikään $y=f(x)$ muotoinen funktio ei voi kuvata ympyrää.

2\. Merkitään pyydetyn ympyrän sädettä r. Ratkaistaan, millä säteen r arvolla ympyröillä on vain yksi yhteinen piste eli ne sivuavat toisiaan. Tällöin niiden yhtälöitä vastaavalla yhtälöparilla saa olla vain yksi ratkaisu.

$$\left.\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=r^2\\ x^2+(y-2)^2=4\end{cases}\right|_{x,y}$$

$$\left\{\left\{x=\frac{-r^2}{2}+\frac{5}{2}, y=\frac{-\sqrt{-r^4+10\cdot r^2-9}}{2}+2\right\}, \left\{x=\frac{-r^2}{2}+\frac{5}{2}, y=\frac{\sqrt{-r^4+10\cdot r^2-9}}{2}+2\right\}\right\}$$

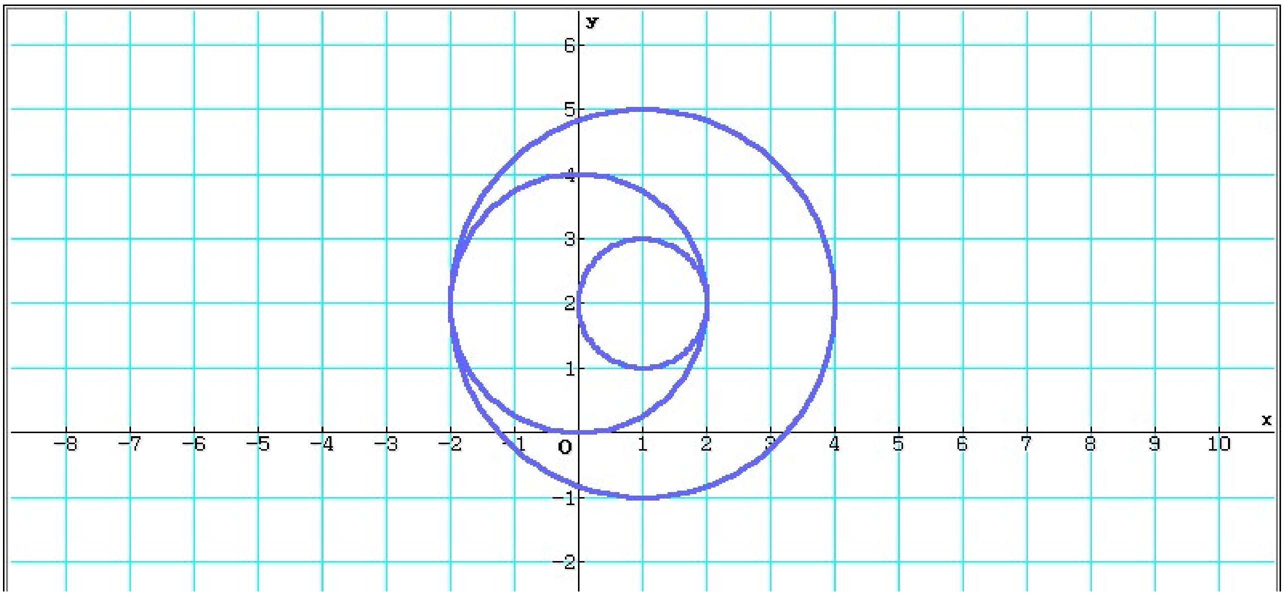
Ratkaisuja on vain yksi, kun y-koordinaatit ovat samat.

$$\text{solve}\left(\frac{-\sqrt{-r^4+10\cdot r^2-9}}{2}+2=\frac{\sqrt{-r^4+10\cdot r^2-9}}{2}+2, r\right)$$

$$\{r=-3, r=-1, r=1, r=3\}$$

Säteeksi käy vain positiivinen luku, joten $r=1$ tai $r=3$.

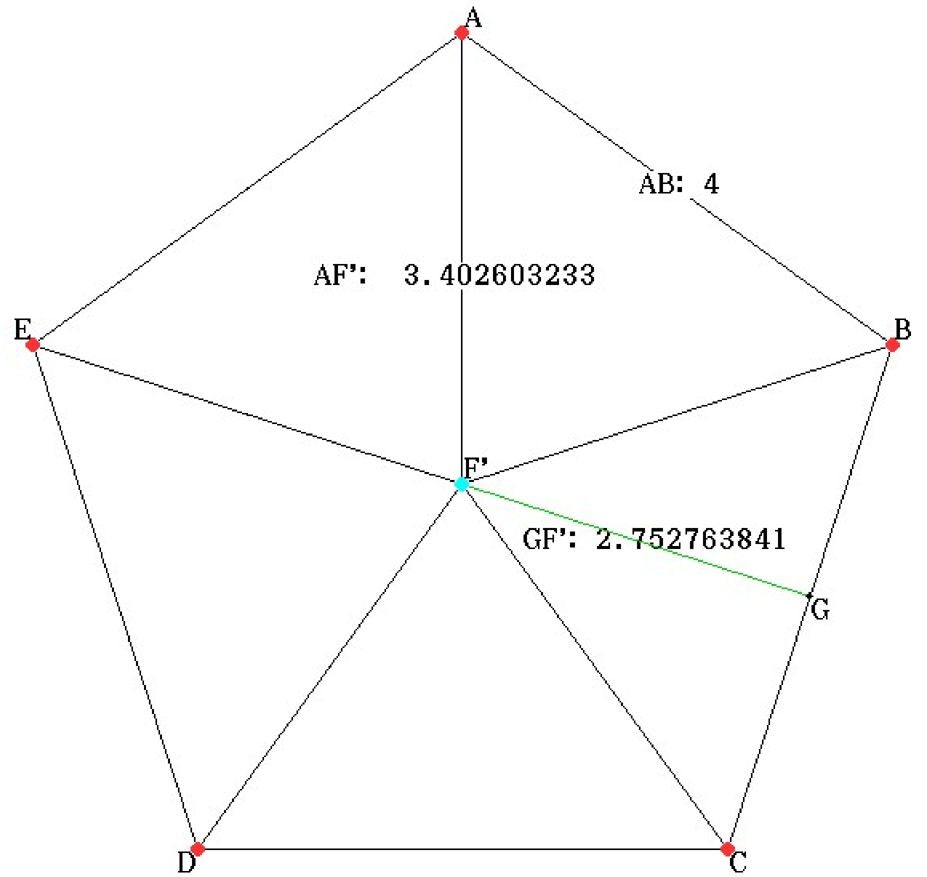
Vastaus: $(x-1)^2+(y-2)^2=1^2$ ja $(x-1)^2+(y-2)^2=3^2$.



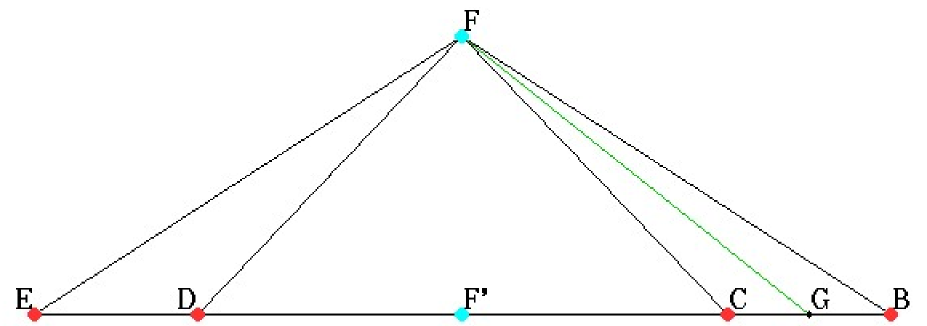
7. Avaruuskappale 12 p.

Tämä tehtävä on tarkoitettu ratkaistavaksi ohjelmistolla. Vastaukset voi antaa likiarvoina, ja perusteluiksi riittävät kuvakaappaukset tai selitykset, joista ilmenee, mitä on mitattu. Tehtävän voi myös ratkaista algebrallisesti laskemalla. Tarkastellaan monitahokasta $M = ABCDEF$, jonka pohja $ABCDE$ on säännöllinen viisikulmio ja jonka sivutahkot ovat tasasivuisia kolmioita.

1. Piirrä kuva monitahokkaasta M. **(4 p.)**
2. Määritä monitahokkaan M särmän AF ja pohjan välinen kulma. **(2 p.)**
3. Määritä monitahokkaan M tahkon ABF ja pohjan välinen kulma. **(2 p.)**
4. Määritä monitahokkaan M tilavuus, kun särmän pituus on a. **(4 p.)**



Projektio ylhäältä



Projektio sivulta sivun DC suunnasta

Monitahokkaan ylhäältä kuvatusta 2D-projektiosta voidaan ClassPad Managerin geometria-sovelluksessa laskea suoraan pohjalle ABCDE projisoidun janan AF' pituus eli pohjan kärkipisteen etäisyys viisikulmion keskipisteestä.

Kuvan säännöllisen kolmion ABF sivun pituudeksi on asetettu 4, koska sivun pituus ei vaikuta laskettavien kulmien suuruuteen. Laskimesta projektion AF' pituus on n. 3.402603233. Pythagoraan lauseella saadaan monitahokkaan korkeudeksi

$$\sqrt{4^2-3.402603233^2}$$

2.102924449

ja särmän AF ja pohjan väliseksi kulmaksi

$$\cos^{-1}\left(\frac{3.402603233}{4}\right)$$

31.71747442

Vastaavasti yläprojektiosta laskemalla saadaan pohjan yhden sivun keskipisteen G etäisyydeksi pohjan keskipisteestä F' n. 2.752763841, jolloin tahkon ABF ja pohjan välinen kulma on

$$\tan^{-1}\left(\frac{2.102924449}{2.752763841}\right)$$

37.37736815

Symmetrian takia ei ole merkitystä, minkä tahkon ja pohjan välistä kulmaa lasketaan. Monikulmion tilavuus sivun pituudella 4 on

$$\frac{1}{3}*5*\frac{1}{2}*4*2.752763841*2.102924449$$

19.29618128

Sivun pituudella 1 yhdenmuotoisuuden perusteella tilavuudeksi saadaan

$$\frac{19.29618128}{4^3}$$

0.3015028325

ja edelleen sivun pituudella a yhdenmuotoisuuden perusteella $0.3015028325a^3$.

Vastaus: Särmän AF ja pohjan välinen kulma on n. 31.72°, tahkon ABF ja pohjan välinen kulma n. 37.38° ja tilavuus särmän pituudella a n. $0.30a^3$.

8. Raja-arvon suhteellinen virhe 12 p.

Tarkastellaan raja-arvoa

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin t - \frac{1}{\sqrt{2}}}{t - \frac{\pi}{4}}.$$

1. Laske raja-arvolle likiarvot, kun $t - \frac{\pi}{4} = 10^{-k}$, $k = 2, 3, 4$. **(4 p.)**
2. Osoita, että raja-arvon tarkka arvo on $\frac{1}{\sqrt{2}}$ tulkitsemalla tutkittava lauseke erotusosamääräksi. **(4 p.)**
3. Määritä osatehtävässä 1 laskemiesi likiarvojen suhteelliset virheet. **(4 p.)**

1. Lasketaan likiarvot laskimella

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+10^{-2}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}}{10^{-2}} \right)$$

0.7035594917

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+10^{-3}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}}{10^{-3}} \right)$$

0.70675311

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+10^{-4}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}}{10^{-4}} \right)$$

0.7070714246

2. Lauseke on sinin erotusosamäärän raja-arvo kohdassa $\frac{\pi}{4}$, joten sen arvo on sinin derivaattafunktion cos(x) arvo kohdassa $\frac{\pi}{4}$.

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, joten kohta 2 on osoitettu.

3. Suhteelliset virheet saadaan vertaamalla likiarvoa tarkkaan arvoon ja muuttamalla virhe prosenteiksi.

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}-0.7035594917}{\frac{1}{\sqrt{2}}}*100$$

0.5016624902

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}-0.70675311}{\frac{1}{\sqrt{2}}}*100$$

0.05001665886

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}-0.7070714246}{\frac{1}{\sqrt{2}}}*100$$

5.000176422E-3

Vastaus: Suhteelliset virheet ovat n. 0.50%, 0.050% ja 0.0050%.

9. Tilin tyhjennys 12 p.

Mikko tyhjentää tilinsä nostamalla pankkiautomaatista 370 euroa. Automaatti antaa hänelle x kappaletta kahdenkymmenen ja y kappaletta viidenkymmenen euron seteleitä.

1. Muodosta tapahtumaa kuvaava yhtälö, jonka luvut x ja y toteuttavat. **(3 p.)**
2. Kuinka monella eri tavalla automaatti voi antaa 370 euroa pelkkinä 20 ja 50 euron seteleinä? Seteleiden järjestystä ei oteta huomioon. **(9 p.)**

1. $20x+50y=370$, missä x ja y ovat epänegatiivisia kokonaislukuja.

2. Koska rahamäärä ei ole jaollinen 50, niin sitä ei voi muodostaa pelkästään 50 euron seteleistä. Koska se ei myöskään ole jaollinen 20, niin sitä ei voi muodostaa pelkästään 20 euron seteleistä. Molempia seteleitä siis tarvitaan.

50 euron seteleiden lukumäärän on oltava 1 ja 7 välillä, koska 8*50=400. Vaihtoehtoja on niin rajallinen määrä, että yhtälön ratkaiseminen Diofantoksen yhtälöllä on turhan työläs. Käydään läpi vaihtoehdot luettelemalla:

1 kpl 50 seteleitä: 370−1*50=320, mikä tarkoittaa 320/20=16 kpl 20 seteleitä.
2 kpl 50 seteleitä: 370−2*50=270, mikä ei ole 20 jaollinen.
3 kpl 50 seteleitä: 370−3*50=220, mikä tarkoittaa 220/20=11 kpl 20 seteleitä.
4 kpl 50 seteleitä: 370−4*50=170, mikä ei ole 20 jaollinen.
5 kpl 50 seteleitä: 370−5*50=120, mikä tarkoittaa 120/20=6 kpl 20 seteleitä.
6 kpl 50 seteleitä: 370−6*50=70, mikä ei ole 20 jaollinen.
7 kpl 50 seteleitä: 370−7*50=20, mikä tarkoittaa 20/20=1 kpl 20 seteleitä.

Vastaus: Automaatti voi antaa 370 euroa neljällä eri tavalla.

B2-osa

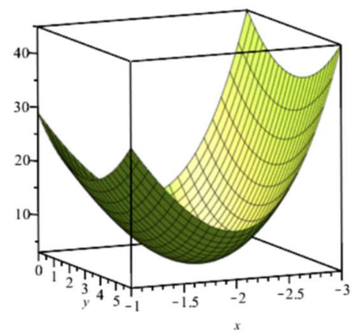
Vastaa kolmeen tehtävään.

10. Osittaisderivaatta 12 p.

Aineisto

10.A Kuva: Funktion kuvaaja

10.A Kuva: Funktion kuvaaja



Lähde: YTL.

Tarkastellaan kahden muuttujan funktiota

$$f(x, y) = x^4 + 32x + y^2 - 6y + 60.$$

1. Laske funktion f osittaisderivaatat f_x ja f_y. **(4 p.)**
2. Oletetaan tunnetuksi, että tämän funktion f pienin arvo saadaan siinä tason pisteessä, jossa yhtälöpari

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

toteutuu (ks. kuva 10.A). Määritä funktion f pienin arvo tätä tietoa käyttämällä. **(8 p.)**

Huomautus: Osittaisderivaatalle f_x käytetään myös merkintöjä $f'_x, D_x f, D_1 f, \frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\partial_1 f$; vastaavalla tavalla osittaisderivaatalle f_y.

1. Osittaisderivaatat ovat

$\frac{d}{dx}(x^4+32x+y^2-6y+60)$

$4\cdot x^3+32$

$\frac{d}{dy}(x^4+32x+y^2-6y+60)$

$2\cdot y-6$

2. Ratkaistaan muuttujien arvot

solve($4\cdot x^3+32=0$, x)

{x=−2}

solve($2\cdot y-6=0$, y)

{y=3}

Funktion pienin arvo on siis

$x^4+32x+y^2-6y+60 \mid \{x=-2, y=3\}$

3

Vastaus: Osittaisderivaatat ovat $4\cdot x^3+32$ ja $2\cdot y-6$ ja funktion pienin arvo on 3.

11. Noppapeli 12 p.

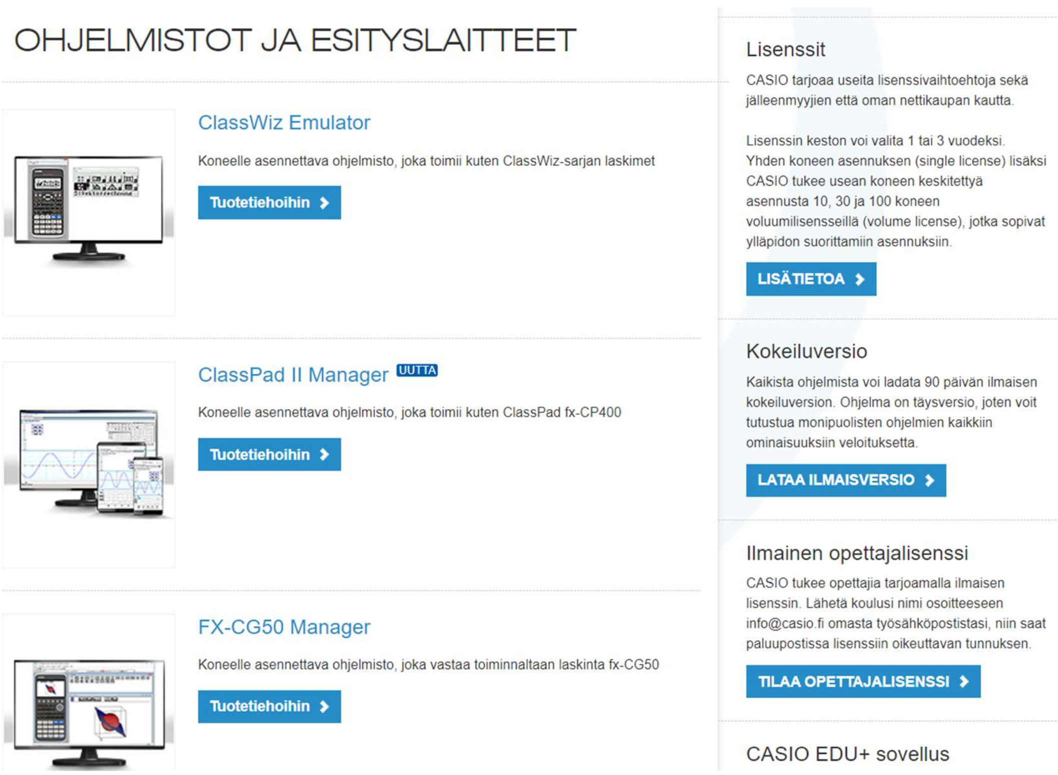
Eräässä pelissä kaksi pelaajaa A ja B heittävät noppaa vuorotellen, kunnes toinen pelaaja voittaa ja peli loppuu.
Pelaaja A voittaa pelin, jos hän heittää vuorollaan tuloksen 1 tai 2.
Pelaaja B voittaa pelin, jos hän heittää vuorollaan tuloksen 1, 2 tai 3.
Pelaaja A aloittaa.

1. Millä todennäköisyydellä peli päättyy siihen, että A voittaa ensimmäisellä heitollaan? **(2 p.)**
2. Millä todennäköisyydellä peli päättyy siihen, että B voittaa ensimmäisellä heitollaan? **(4 p.)**
3. Mikä on kummankin pelaajan todennäköisyys voittaa peli? **(6 p.)**

1. P("A voittaa 1. heitolla")=P("A heittää 1 tai 2")=$\frac{1}{3}$.

2. P("B voittaa 1. heitolla")=P("A ei voita ja B heittää 1, 2 tai 3")=$\frac{2}{3}*\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$.

3. Koska kummallakin pelaajalla on yhtä suuri todennäköisyys voittaa ensimmäisellä kierroksella ja kaikki kierrokset ovat identtisiä, on kummankin pelaajan voittotodennäköisyys 50%.



https://www.casio-laskimet.fi/fi/tuotteet/ohjelmistotjaesityslaitteet/

12. Paraabelialueita 12 p.

Tarkastellaan paraabeleja, jotka kulkevat pisteiden $(-1, 0)$ ja $(1, 0)$ kautta ja ovat y-akselin suhteen symmetrisiä.

1. Kirjoita tällaisen paraabelin yleinen yhtälö. **(2 p.)**
2. Millä ehdolla kaksi tällaista paraabelia leikkaa toisensa kohtisuorassa? **(5 p.)**
3. Tarkastellaan pinta-alaa, joka jää kahden tällaisen toisensa kohtisuoraan leikkaavan paraabelin väliin. Mikä on tämän pinta-alan pienin mahdollinen arvo? **(5 p.)**

1. Määritellään y-akselin suhteen symmetrinen paraabeli yleisessä muodossa ja sijoitetaan siihen annetut pisteet.

define $f(x)=ax^2+bx+c$

done

$\begin{cases} f(-1)=0 \\ f(1)=0 \end{cases} \Big| a, b, c$

$\{a=a, b=0, c=-a\}$

Siis paraabeli on muotoa $y=ax^2-a$, missä $a\neq 0$.

2. Koska $y'=2ax$, on paraabelille $y=ax^2-a$ kohtaan $x=1$ piirretyn tangentin kulmakerroin $2a$. Toiselle paraabelille $y=ex^2-e$ kohtaan $x=1$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $2e$. Jos tangentit leikkaavat toisensa kohtisuorasti, myös paraabelit leikkaavat toisensa kohtisuorasti. Kohtisuoruusehdosta saadaan $2a*2e=-1$, josta $e=-\frac{1}{4a}$.

3. Olkoot $a>0$, jolloin $e=-\frac{1}{4a}<0$ ja paraabelit avautuvat eri suuntiin. Niiden välinen pinta-ala saadaan integroimalla.

$\int_{-1}^{1} ex^2-e-(ax^2-a)dx=$

$\int_{-1}^{1} -\frac{1}{4a}x^2+\frac{1}{4a}-(ax^2-a)dx$

$\frac{4\cdot a}{3}+\frac{1}{3\cdot a}$

Tämän lausekkeen pienin arvo saadaan derivaatan nollakohdasta.

$\frac{d}{da}\left(\frac{4\cdot a}{3}+\frac{1}{3\cdot a}\right)$

$\frac{4\cdot a^2-1}{3\cdot a^2}$

$\text{solve}\left(\frac{4\cdot a^2-1}{3\cdot a^2}=0, a\right) | a>0$

$\left\{a=\frac{1}{2}\right\}$

Pinta-alan pienin arvo on

$\frac{4\cdot a}{3}+\frac{1}{3\cdot a} | \left\{a=\frac{1}{2}\right\}$

$\frac{4}{3}$

Vastaus: Pinta-alan pienin arvo on $\frac{4}{3}$.

13. Eksponenttiyhtälö 12 p.

Tutki yhtälön $e^{ax} = \ln x$ positiivisten ratkaisujen lukumäärää kaikilla parametrin $a > 0$ eri arvoilla.

Muodostetaan erotusfunktio

define $f(x)=e^{ax}-\ln(x)$

done

Funktion $f(x)$ on jatkuva ja derivoituva määrittelyjoukossaan $x>0$. Sen 1. kertaluvun derivaattafunktio on

$\frac{d}{dx}(f(x))$

$$\frac{a\cdot x\cdot e^{a\cdot x}-1}{x}$$

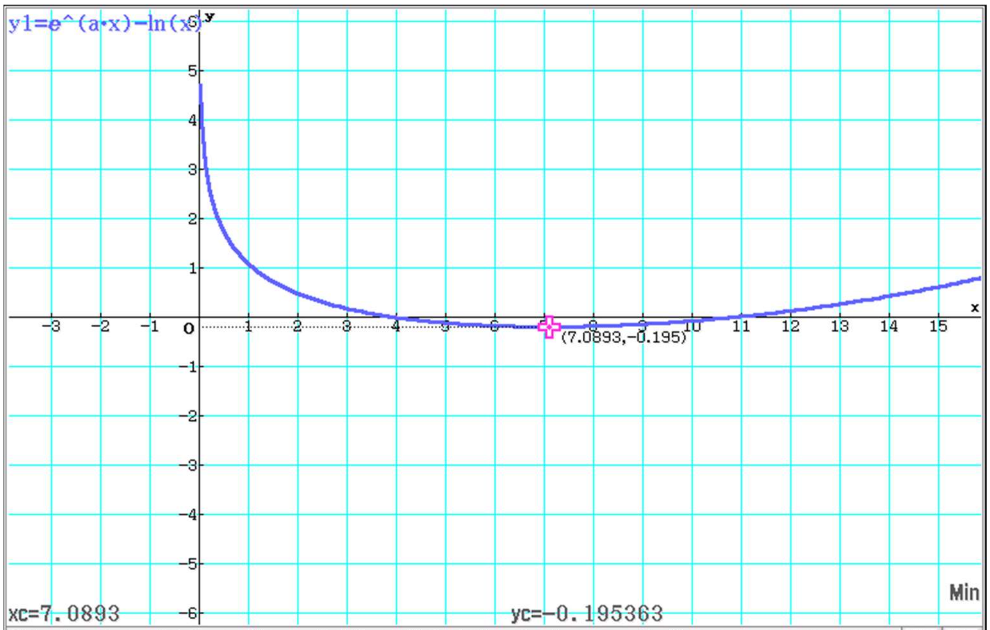
ja 2. kertaluvun derivaattafunktio on

$\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$

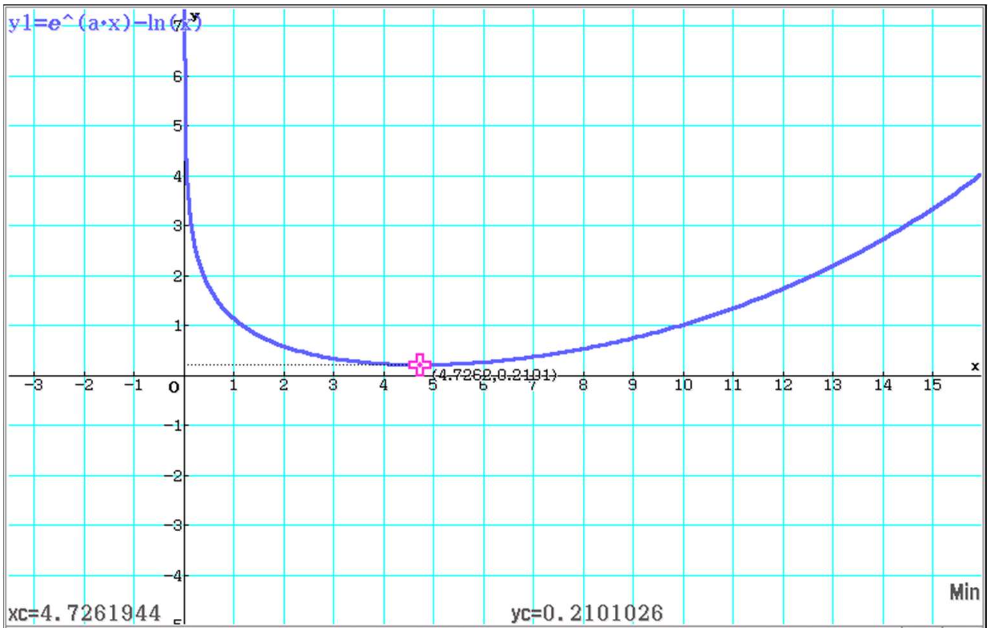
$$\frac{a^2\cdot x^2\cdot e^{a\cdot x}+1}{x^2}$$

Koska $\frac{a^2\cdot x^2\cdot e^{a\cdot x}+1}{x^2}>0$, on 1. kertaluvun derivaatta aidosti kasvava funktio. Niinpä sillä voi olla korkeintaan yksi nollakohta ja funktiolla $f(x)$ korkeintaan kaksi nollakohtaa. Koska funktion $f(x)$ nollakohtien määrä on sama kuin yhtälön $e^{ax}=\ln(x)$ ratkaisujen lukumäärä, on annetulla yhtälölläkin korkeintaan kaksi nollakohtaa.

Hahmotellaan funktion $f(x)$ kuvaajaa eri parametrin $a>0$ arvoilla dynaamisen graafin avulla.



Käyrä parametrin arvolla a=0.08. Minimi ja pienin arvo < 0.



Käyrä parametrin arvolla a=0.12. Minimi ja pienin arvo > 0.

Havaitaan, että funktiolla on kaksi ratkaisua, kun esim. a=0.08.

solve$(e^{0.08x}-\ln(x)=0, x)$

{x=3.935514869, x=10.87050989}

Havaitaan, että funktiolla ei ole lainkaan ratkaisuja, kun esim. a=0.12. Tällöin derivaatan ainoa nollakohta on funktion pienin arvo on positiivinen.

Koska funktio on jatkuva parametrin a suhteen, on välillä $0.08 < a < 0.12$ oltava jokin parametrin a arvo, jolloin funktiolla on täsmälleen yksi nollakohta. Niinpä funktiolla on 0, 1 tai 2 ratkaisua parametrin $a > 0$ eri arvoilla.