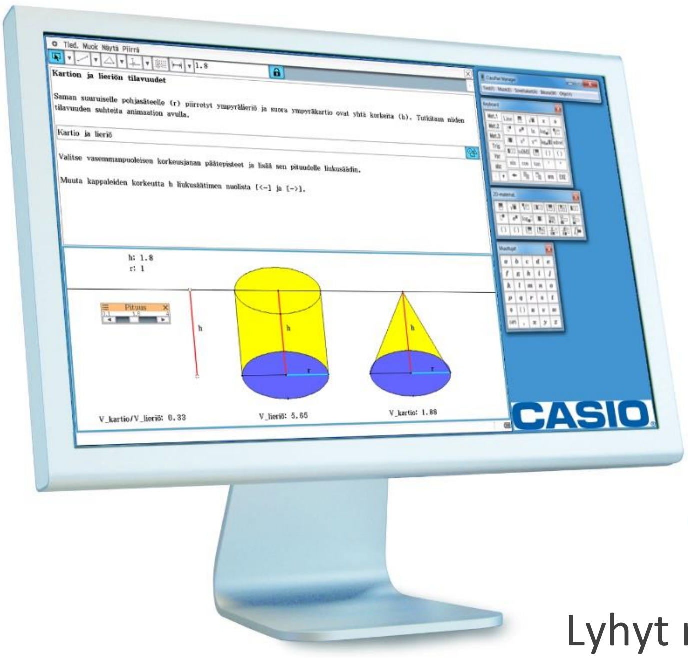
CASIO®



LASKE LAUDATUR CLASSPADILLA

Lyhyt matematiikka, syksy 2018

Tiivistelmä

Syksyn 2018 yo-kokeiden ratkaisut ClassPad Managerilla laskettuina. Laskujen tiedostot ovat ladattavissa Casion tukisivuilta osoitteesta https://www.casio-laskimet.fi

Pepe Palovaara
pepe.palovaara@casio.fi

Hyvä lukija,

Käsissäsi on viimeinen paperille vastattu matematiikan yo-koe! Keväästä 2019 alkaen vastausvälineenä niin A- kuin B-osan tehtäviinkin on tietokone. Toki suttupaperia saa käyttää ja B-osassa laskinkin saa olla mukana. Vastaukset kuitenkin siirretään YTL:n sähköiseen vastauskenttään Abitissa.

A-osion tehtävien ratkaisut tätä vihkoa varten on tehty ClassPadin avulla, vaikka kokelaat tekivätkin ne käsin ja ilman laskinta. A-osassa eActivity-sovellusta on käytetty vain teksti- ja matematiikka-editorina eikä sen avulla ole ratkaistu mitään laskuja. Tämä vastaa käsin paperille tehtyjä ratkaisuja. B-osiossa on hyödynnetty CAS-laskentaa.

Tämä vihkonen on ladattavissa pdf-muodossa ja kaikki tehtävien ratkaisut ovat saatavilla myös ClassPadin tiedostoina (.xcp) Casion kotisivuilta. ClassPadin tiedostot aukeavat suoraan eActivity -sovellukseen kaksoisklikkaamalla ja niitä voi vapaasti muokata. Tiedostot voidaan myös siirtää laskimeen. Tukesi pähkinänkuoressa löytyy osoitteesta

http://www.casio-laskimet.fi

Casio Academy – videot soittolistalla

Syksyllä 2017 Casio avasi uuden palvelun, jossa opiskelijoilla on mahdollisuus harjoitella matematiikan yo-kokeisiin netin välityksellä matematiikan opettajien kera. Harjoitellaan yhdessä kokeiden tehtäviä ja lasketaan esimerkkejä lukiomatematiikasta. Opiskelijoiden tukeminen ja opinnoissa auttaminen on meille tärkeää. Viimeisimmät malliratkaisut löytyvät tallenteina YouTubesta osoitteesta

https://bit.ly/casio-academy

ClassPad Manager (Win, Mac, iOS, Android)

Siirtyminen ClassPadin kämmenlaitteesta fx-CP400 tietokoneohjelman ClassPad Manager käyttöön ei vaadi käyttäjältä kummoisia toimia. Laskin itsessään on jo kuin tablettilaite: suuri kosketus-näyttö, näkymä vaakaan ja pystyyn, käyttö sormella tai kosketuskynällä, komennot alasveto-valikoista, jne. Nyt työtilan kooksi saadaan koko näyttö ja tiedostojen siirtely on nopeampaa!

Mukavia hetkiä syksyn 2018 yo-ratkaisujen parissa!

Espoossa 1.10.2018

Pepe Palovaara

Nordic School Coordinator
Casio Scandinavia

A-osa

Ratkaise kaikki tämän osan tehtävät 1–4. Tehtävät arvostellaan pistein 0–6. Kunkin tehtävän ratkaisu kirjoitetaan tehtävän alla olevaan ruudukkoon. Vastausta voi tarvittaessa jatkaa erillisellä puoliarkilla. Apuvälineenä saat käyttää taulukkokirjaa. Laskimen käyttö ei ole sallittua sinä aikana, kun tämä koevihko on hallussasi. Koevihko ja mahdolliset A-osan erilliset vastausarkit on palautettava viimeistään kolmen tunnin kuluttua kokeen alkamisesta lukion määräämällä tavalla.

1. Tarkastellaan funktiota $f(x) = (x-2)(x+3)$.

a) Laske $f(4)$. **b)** Ratkaise yhtälö $f(x) = 0$. **c)** Ratkaise yhtälö $f(x) = -6$.

Tied. Muok Lisää Toiminto

a) $f(4)=(4-2)(4+3)=2\cdot7=14$

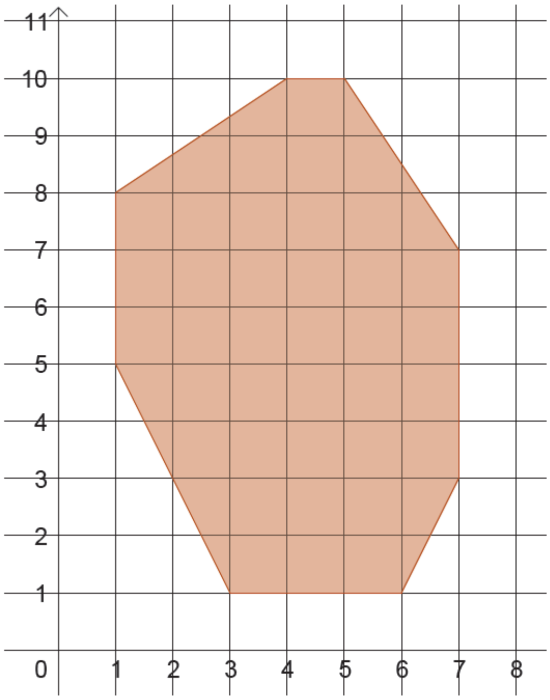
b) $f(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \lor x+3=0 \Leftrightarrow x=2 \lor x=-3$

c) $f(x)=-6 \Leftrightarrow (x-2)(x+3)=-6 \Leftrightarrow x^2+3x-2x-6=-6 \Leftrightarrow x^2+x=0$

$\Leftrightarrow x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \lor x+1=0 \Leftrightarrow x=0 \lor x=-1$

Vastaus: **a)** 14 **b)** $x=2 \lor x=-3$ **c)** $x=0 \lor x=-1$

2. Muotoilukilpailun palkintolautakunta myöntää muistolaatan kilpailun parhaille teoksille. Lautakunnan taiteellinen avustaja tekee ensimmäisen version laatan pienoismallista käyttämällä Geogebra-ohjelman koordinaatistopiirrosta. Hän aloittaa suorakulmiosta, jonka leveys on 6 ja korkeus 9 pituusyksikköä. Leikkaamalla pois tämän suorakulmion kaikki neljä kulmaa eri tavoilla hän päätyy viereisen kuvion monikulmioon. Määritä tämän monikulmion pinta-ala.



Tied. Muok Lisää Toiminto

Vähentämällä suorakulmiosta kulmiin jäävien suorakulmaisten kolmioiden pinta-alat saaadaan

$6\cdot9-\frac{1}{2}\cdot3\cdot2-\frac{1}{2}\cdot2\cdot3-\frac{1}{2}\cdot1\cdot2-\frac{1}{2}\cdot2\cdot4$

$=54-3-3-1-4=43$

CASIO

3. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut x, joilla lukujono 27, x, 3 on

a) aritmeettinen b) geometrinen.

Tied. Muok Lisää Toiminto

a) Jono on aritmeettinen, jos sen jäsenten erotus pysyy vakiona. Saadaan yhtälö
$3-x=x-27 \Leftrightarrow 2x=30 \Leftrightarrow x=15$

b) Jono on geometrinen, jos sen jäsenten suhde (jakolaskun vastaus) pysyy vakiona. Saadaan verrantoyhtälö, joka voidaan ratkaista ristiinkertomalla
$\frac{3}{x}=\frac{x}{27} \Leftrightarrow x^2=81 \Leftrightarrow x=\pm 9$, joista tehtävän toimeksiannossa rajataan pois negatiivinen vastaus. Siis $x=9$.

4. Hyttysten määrä oli kesätapahtuman alkaessa klo 16.00 noin 80, tuntia myöhemmin noin 120 ja klo 19.00 noin 270. Oletetaan, että hyttysten määrä noudattaa eksponentiaalisen kasvun mallia.

a) Arvioi mallin perusteella hyttysten määrää tilaisuuden päättyessä klo 20.00.

b) Mikä seuraavista lausekkeista kuvaa parhaiten hyttysten määrää, kun aikaa t mitataan tunteina tilaisuuden alusta lähtien:
$80 + 40t$ vai $80 \cdot 1{,}5^t$ vai $8 \cdot 10^{t+1}$?
Perustele vastauksesi.

Tied. Muok Lisää Toiminto

Eksponentiaalinen malli tarkoittaa, että hyttysten määrä muuttuu joka tunti yhtä moni kertaiseksi. Jokaisen tunnin määrän kasvua kuvaava kerroin k saadaan ratkaisemalla yhtälö $k \cdot 80=120 \Leftrightarrow k=120 \div 80=1.5$

a) Tilaisuuden päättyessä klo 20 on hyttysten määrä tullut 1.5–kertaiseksi siitä, mitä se oli klo 19. Hyttysiä on siis $1.5 \cdot 270=405$, joka pyöristettynä on 400.

b) Malliksi sopii $80 \cdot 1.5^t$, koska siinä on oikea kasvukerroin 1.5 ja tilaisuuden alussa eli kun $t=0$, arvoksi saadaan $80 \cdot 1.5^0=80 \cdot 1=80$, mikä vastaa tehtävän alkuarvoa.

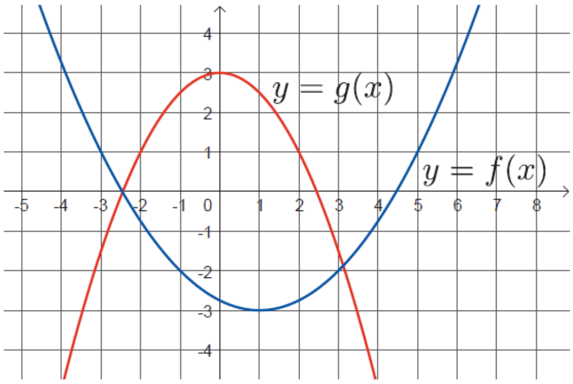
B1-osa Ratkaise kolme tehtävistä 5–9.

5. Oheiseen koordinaatistoon on piirretty funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$ kuvaajat. Arvioi seuraavien yhtälöiden ratkaisuja kuvan perusteella.

a) $f(x) = g(x)$

b) $f'(x) = 0$

c) $g'(x) = 1$



Tied. Muok Lisää Toiminto

a) f(x)=g(x) ratkeaa, kun funktioiden kuvaajat leikkaavat. Ratkaisu on leikkauspisteiden x-koordinaatit, jotka kuvaajasta luettuna ovat $x \approx -2.5$ ja $x \approx 3.2$.

b) f'(x)=0 ratkeaa, kun kuvaajalle y=f(x) piirretty tangentti on vaakasuorassa eli piirrettynä sinisen kuvaajan alimpaan kohtaan. Tässä pisteessä $x \approx 1.0$.

c) g'(x)=1 ratkeaa, kun kuvaajalle y=g(x) piirretty tangentti on nouseva suora 45° kulmassa eli taustaruudukon ruudun vasemmasta alanurkasta oikeaan ylänurkkaan piirretyn suoran suuntainen. Tällaisia pisteitä on yksi ja sen x-koordinaatti on $x \approx -1.0$.

6. Lahjaveroa on maksettava, kun omaisuus siirtyy toiselle henkilölle lahjana ja lahjan arvo on 5 000 euroa tai enemmän. Lahjaveroa on maksettava myös silloin, kun samalta lahjan antajalta kolmen vuoden aikana saatujen lahjojen yhteisarvo on 5 000 euroa tai enemmän. Tällöin lahjojen arvo lasketaan yhteen ja verotus toimitetaan yhteissumman perusteella. Aiemmin maksetut lahjaverot vähennetään maksettavan veron määrästä.

Lahjan arvo (euroa)	Vero alarajan kohdalla (euroa)	Veroprosentti ylimenevästä osasta
5 000–25 000	100	8 %
25 000–55 000	1 700	10 %
55 000–200 000	4 700	12 %
200 000–1 000 000	22 100	15 %
1 000 000–	142 100	17 %

Lähde: <vero.fi>. Luettu 22.11.2017.

Jannika sai isoäidiltään kolmena vuonna peräkkäin rahalahjan. Hän sai ensimmäisenä vuonna 4 300 €, seuraavana 3 800 € ja kolmantena vuonna 2 100 €.

Kuinka paljon Jannika maksaa eri vuosina veroa saamistaan lahjoista? Oletetaan, että verotus pysyy samana koko kolmen vuoden ajan.

Tied. Muok Lisää Toiminto

Ensimmäisenä vuonna veroja ei mene, koska lahjan suuruus 4300€ alittaa veron maksun alarajan 5000€.

Toisena vuonna veroja pitää maksaa. Lahjaksi lasketaan kahden ensimmäisen vuoden rahat 4300€+3800€=8100€ ja veroja menee 100+0.08·(8100−5000)=348€.

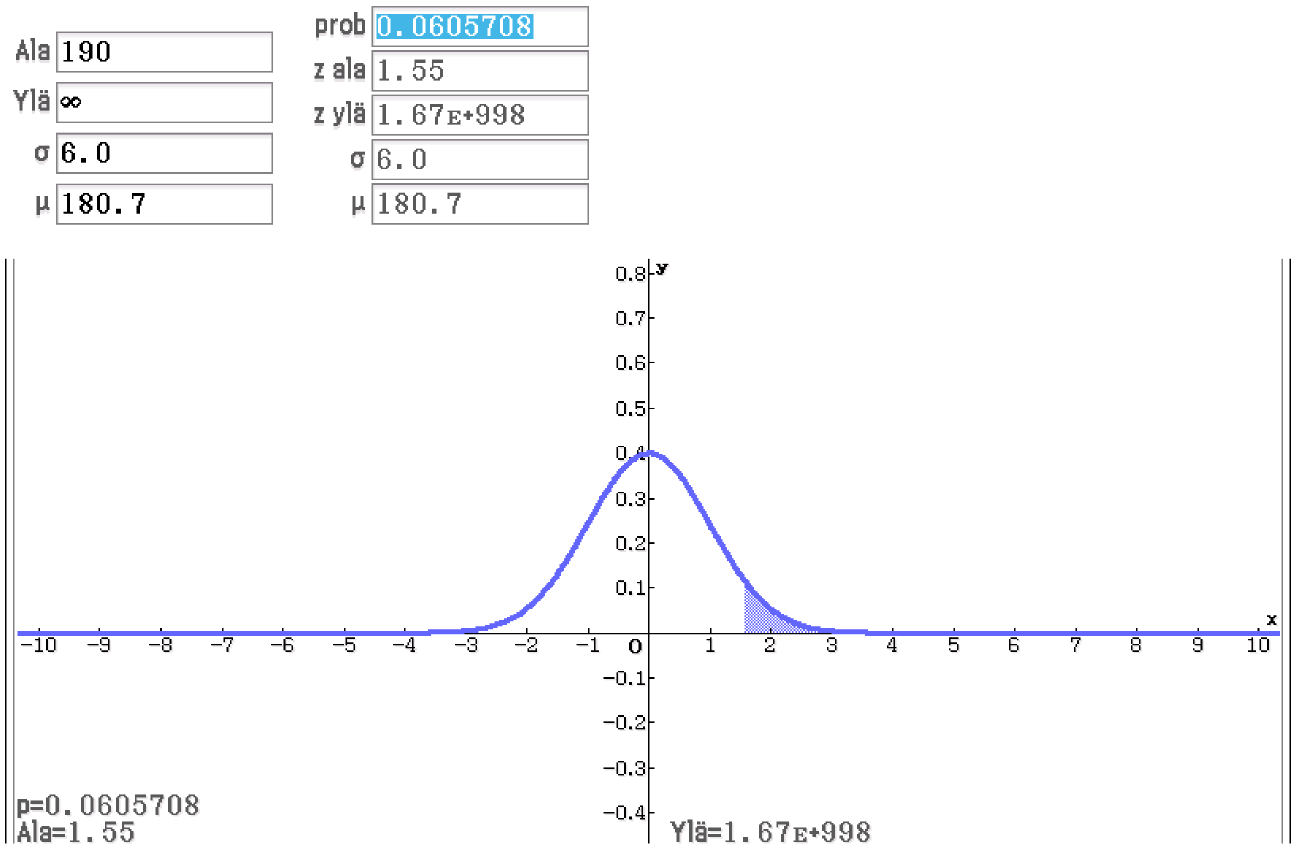
Kolmantena vuonna verotettavaksi lahjaksi lasketaan kaikkien kolmen vuoden lahjat yhteensä eli 8100€+2100€=10200€, joista verotaulukon mukaan maksettavaa tulisi 100+0.08·(10200−5000)=516€. Tästä kuitenkin vähennetään jo maksetut verot eli kaikkiaan veroja pitää maksaa 516€−348€=168€.

7. Suomalaiset ovat viimeisten vuosikymmenten aikana kasvaneet entistä pidemmiksi, minkä vuoksi poikien ja tyttöjen kasvukäyrät on täytynyt uudistaa. Täysikasvuisen miehen pituus noudattaa nykyisin normaalijakaumaa niin, että keskiarvo on 180,7 cm ja keskihajonta 6,0 cm. Täysikasvuisen naisen pituus on normaalijakautunut, keskiarvo on 167,5 cm ja keskihajonta 5,4 cm.

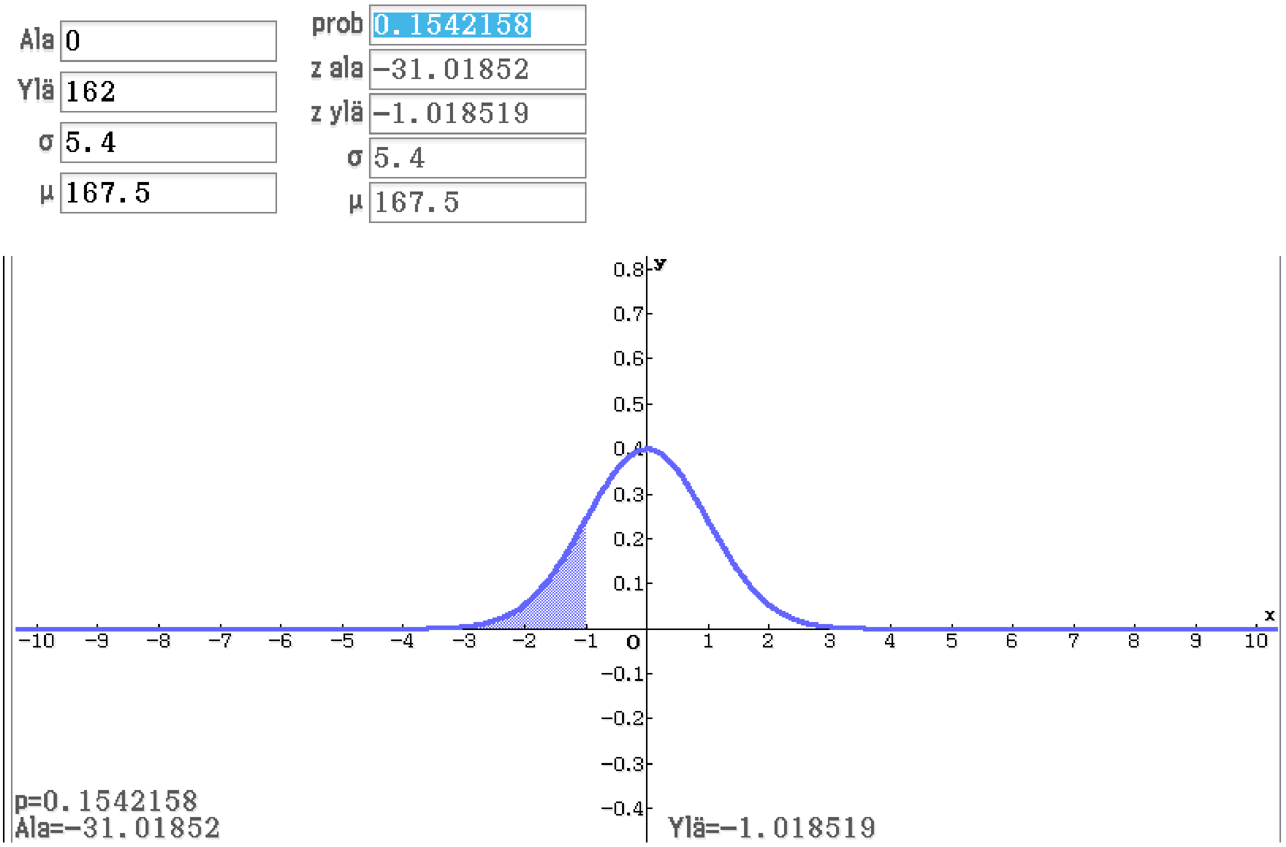
a) Kuinka suurella todennäköisyydellä umpimähkään valittu täysikasvuinen suomalaismies on vähintään 190 cm pitkä?

b) Kuinka suuri prosentuaalinen osuus kaikista täysikasvuisista suomalaisnaisista on pituudeltaan alle 162 cm? Anna vastaus yhden prosenttiyksikön tarkkuudella.

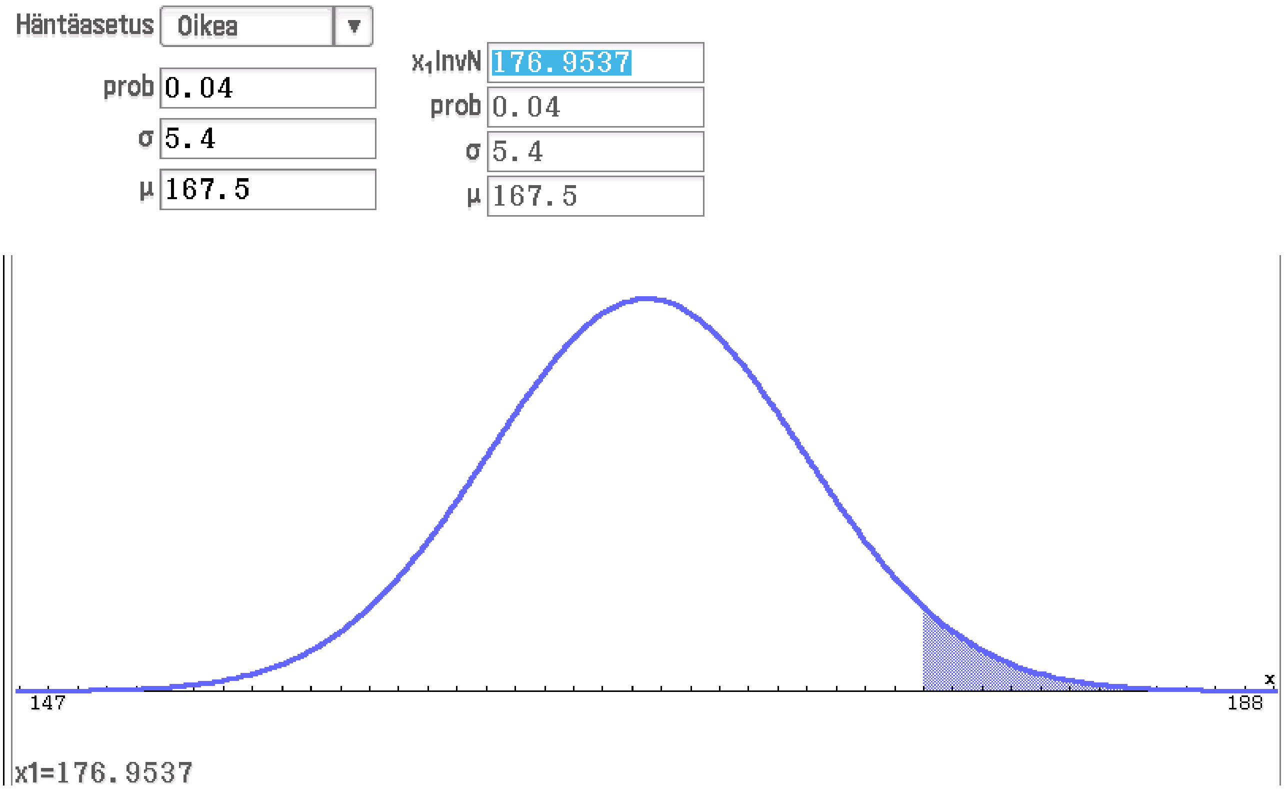
c) Millä pituuden arvolla L on voimassa: Vain 4,0 % naisista kasvaa pidemmäksi kuin L? Anna vastaus yhden senttimetrin tarkkuudella.



Vastaus: Noin 6.1%.



Vastaus: Noin 15%.



Vastaus: Noin 177 cm.

8. Digitaalisessa muodossa tallennetun tiedoston koko ilmoitetaan yleensä tavuina. Tavun tavallisimmat monikerrat ovat kilotavu (10^3 tavua), megatavu (10^6 tavua) ja gigatavu (10^9 tavua). Käytännössä tiedot tallennetaan kuitenkin binaarisessa muodossa, jolloin kilo-, mega- ja gigatavun oikea koko on vastaavassa järjestyksessä 2^{10}, 2^{20} ja 2^{30} tavua. Oheinen taulukko kuvaa sitä, kuinka monta prosenttia pienempiä ovat kymmenen potensseina esitetyt tavun monikerrat, kun niitä verrataan vastaaviin kakkosen potensseihin. Selvitä, kuinka taulukkoon merkityt giga- ja teratavujen prosenttien lukuarvot saadaan.

kilotavu	2,34 %
megatavu	4,63 %
gigatavu	6,87 %
teratavu	9,05 %
petatavu	11,18 %
eksatavu	13,26 %

Tied. Muok Lisää Toiminto

Verrataan, kuinka monta tavua vähemmän kymmenen potensseina ilmoitetussa tallennuskoossa on verrattuna binaariseen muotoon ja lasketaan virhe prosenteissa.

Gigatavujen kohdalla suhteellinen virhe prosentteina on

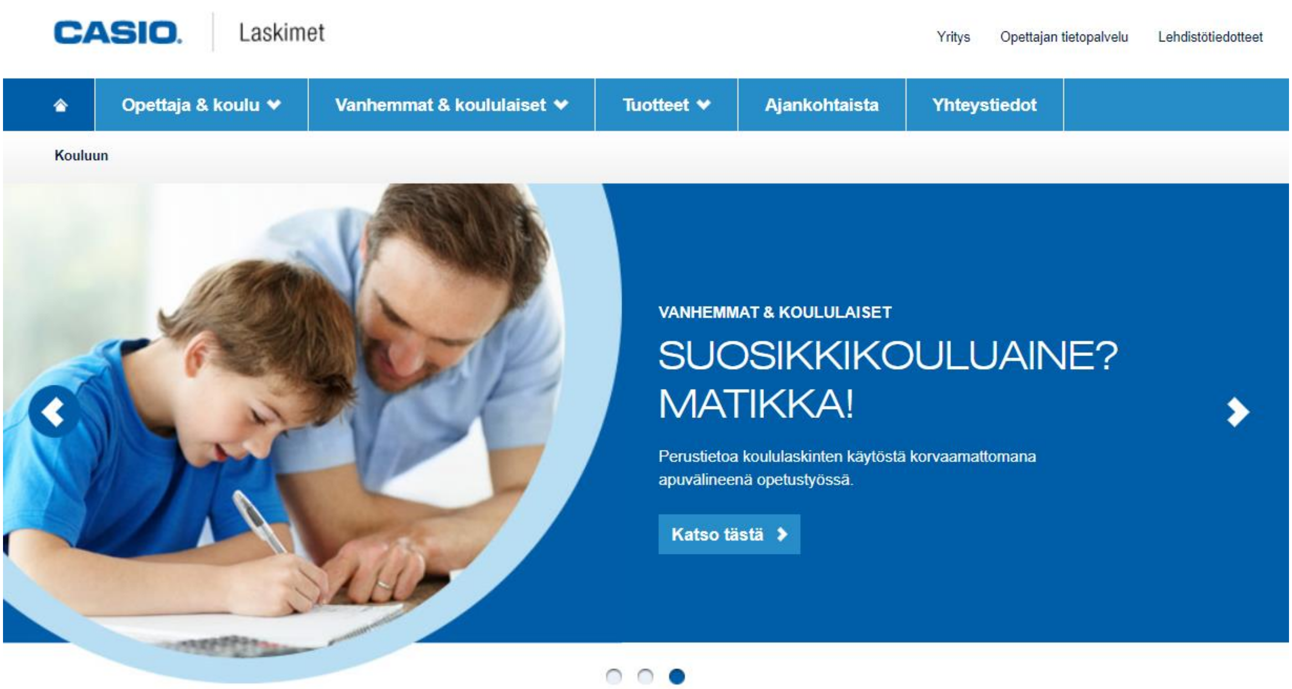
$$\frac{10^9-2^{30}}{2^{30}}*100$$

$$-6.867742538$$

ja teratavujen kohdalla suhteellinen virhe prosentteina on

$$\frac{10^{12}-2^{40}}{2^{40}}*100$$

$$-9.050529823$$



9. Jos valitset tämän tehtävän, ratkaise joko 9.1 TAI 9.2. (Voit valita kumman tahansa tehtävän riippumatta siitä, minkä opetussuunnitelman mukaan olet opiskellut.)

9.1 (Vanha opetussuunnitelma, ennen 1.8.2016 lukion aloittaneet)

Tarkastellaan muotoa $a_n = 2\sin(\frac{\pi}{2}n) + 5\cos(\frac{\pi}{2}n)$ olevia lukuja, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$ Laske niin monta jonon alkupään lukua, että huomaat jonon toistavan itseään eli olevan jaksollinen. Näyttää siltä, että jollakin luvulla $k \geq 1$ on voimassa $a_{n+k} = a_n$ kaikilla indeksin n arvoilla. Mikä on pienin tällainen luku k?

Tied. Muok Lisää Toiminto

Muodostetaan lukujonoa vastaava funktio ja lasketaan sille riittävä määrä arvoja.

define $a(n)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}*n\right)+5\cos\left(\frac{\pi}{2}*n\right)$

done

a({1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20})

{2,−5,−2,5,2,−5,−2,5,2,−5,−2,5,2,−5,−2,5,2,−5,−2,5}

Pienin luku k=4, sillä $a_1=a_{1+4}=2$ ja $a_2=a_{2+4}=-5$, jne.

9.2 (Uusi opetussuunnitelma, 1.8.2016 tai sen jälkeen lukion aloittaneet)

Tiettyä kolikkoa heitettiin 10 kertaa. Mikä on todennäköisyys, että tuloksena oli 8 klaavaa ja 2 kruunaa? Oletetaan, että sekä kruunan että klaavan todennäköisyys on $\frac{1}{2}$.

Tied. Muok Lisää Toiminto

Kolikon heittokerrat ovat toisistaan riippumattomia eli se, oliko edellisen heiton tuloksena kruuna tai klaava, ei vaikuta seuraavan heiton todennäköisyyteen. Todennäköisyys saadaan binomijakauman avulla.

P("10 heitosta 8 klaavaa ja 2 kruunaa")=

$nCr(10,8)*0.5^8*(1-0.5)^{10-8}$

0.0439453125

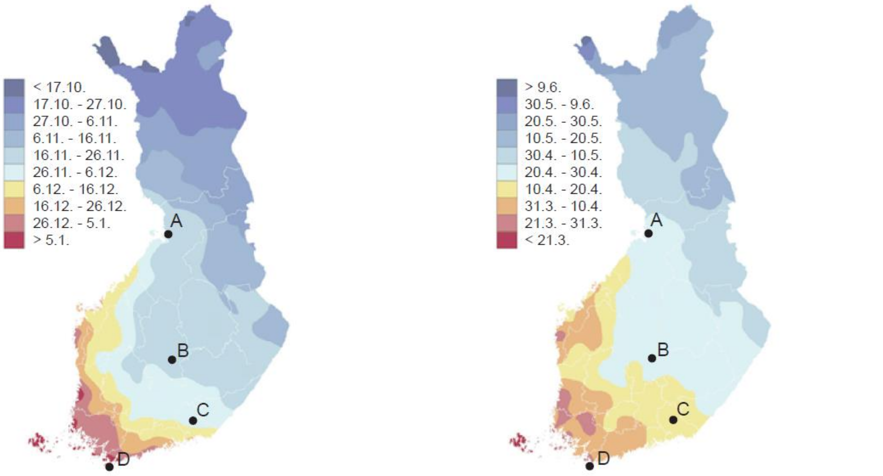
Todennäköisyys on n. 4.4%.

B2-osa Ratkaise kolme tehtävistä 10–13.

10. Ilmatieteen laitoksen tilastoista selviää, milloin maamme eri osiin tulee pysyvä lumipeite ja milloin se lähtee. Ajalla, jona lumipeite on pysyvä, tarkoitetaan talven pisintä jaksoa, jolloin lunta on maassa yhtäjaksoisesti vähintään 1 cm.

a) Kartassa on esitetty pistein neljä kaupunkia A–D. Arvioi ja laske, kuinka kauan kunkin neljän kaupungin alueella on pysyvä lumipeite.

b) Eräässä Pohjois-Suomen kaupungissa pysyvän lumipeitteen kesto on arviolta 210 päivää. Kyseisen kaupungin lumipeitteen kestoa merkitään indeksiarvolla 100. Arvioi ja laske, mitä lukuarvoja kaupungit A–D saavat, kun indeksiarvot ovat suoraan verrannollisia pysyvän lumipeitteen kestoon.



Pysyvän lumipeitteen tulon ajankohta vertailukaudella 1981–2010

Pysyvän lumipeitteen lähtemisen ajankohta vertailukaudella 1981–2010

Lähde: <ilmatieteenlaitos.fi>. Luettu 1.3.2018. Muokkaus: YTL.

Tied. Muok Lisää Toiminto

a) Lasketaan paikkakunnan A pisin ja lyhin mahdollinen pysyvän lumipeitteen kesto päivissä:

26.11.–30.4.=155 päivää
6.12.–20.4.=135 päivää

Siis paikkakunnalla A lumipeite on mittausjaksolla ollut 135–155 päivää.

Vastaavasti muille paikkakunnille saadaan
B: 16.11.–30.4.=165 päivää ja 26.11.–20.4.=145 päivää → 145–165 päivää.
C: 26.11.–20.4.=145 päivää ja 6.12.–10.4.=125 päivää → 125–145 päivää.
D: 5.1.–31.3.=85 päivää ja 5.1.–21.3.=75 päivää → 75–85 päivää.

Tied. Muok Lisää Toiminto

b) Indeksit saadaan jakamalla tutkittavan kaupungin pysyvän lumen päivien määrä vertailukaupungin päivien lukumäärällä ja kertomalla osamäärä sadalla. Indeksirajat kaupungeille ovat

$$A\_ala := 100\left(\frac{135}{200}\right)$$

67.5

$$A\_ylä := 100\left(\frac{155}{200}\right)$$

77.5

$$B\_ala := 100\left(\frac{145}{200}\right)$$

72.5

$$B\_ylä := 100\left(\frac{165}{200}\right)$$

82.5

$$C\_ala := 100\left(\frac{125}{200}\right)$$

62.5

$$C\_ylä := 100\left(\frac{145}{200}\right)$$

72.5

$$D\_ala := 100\left(\frac{75}{200}\right)$$

37.5

$$D\_ylä := 100\left(\frac{85}{200}\right)$$

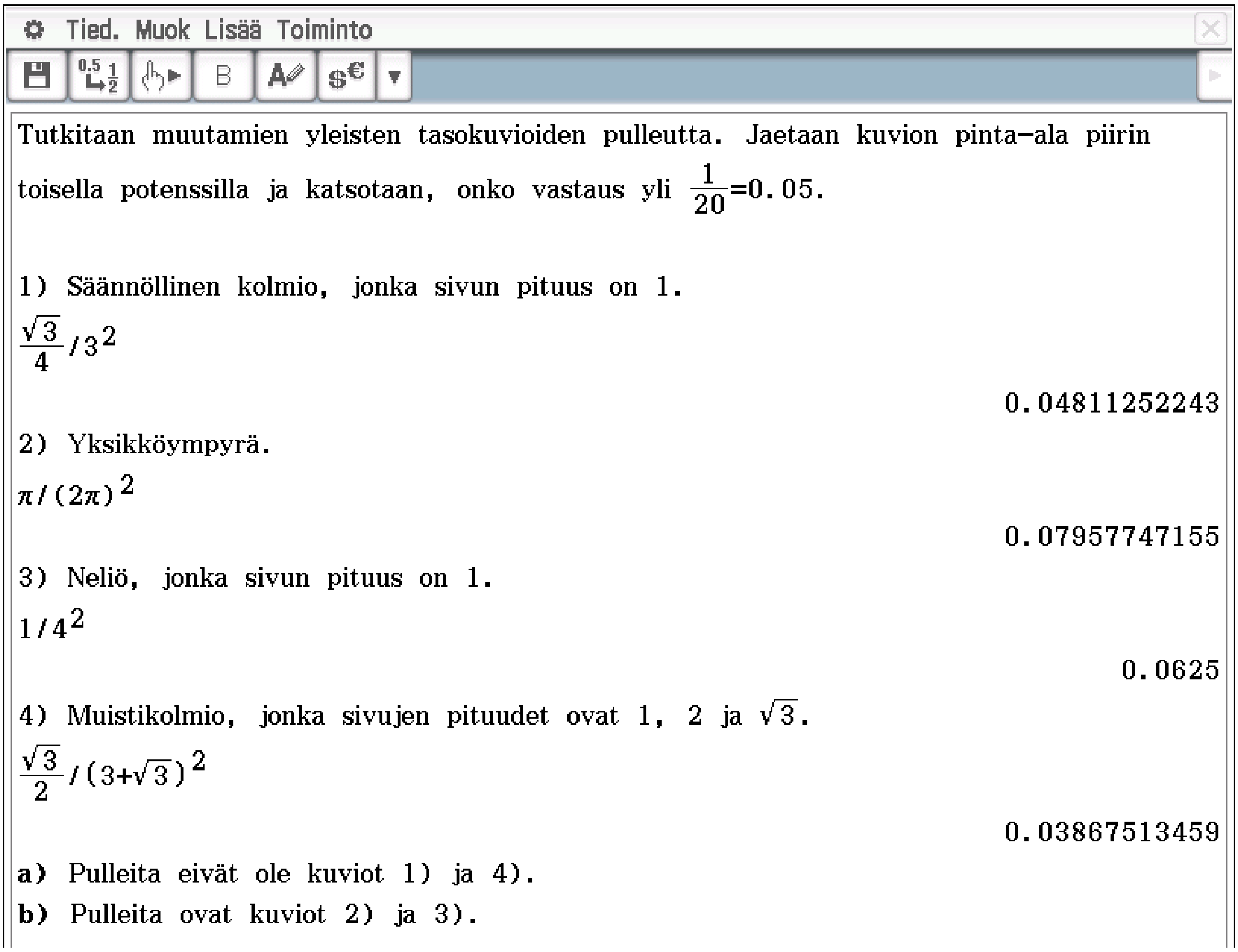
42.5

11. Eräs dosentti pohti tasokuvioiden pinta-alojen ja piirien suhteita. Hänen mukaansa tasokuviota sanotaan *pulleaksi*, jos sen pinta-ala on suurempi kuin kahdeskymmenesosa sen piirin toisesta potenssista.

a) Anna kaksi eri esimerkkiä kuvioista, jotka eivät ole pulleita (dosentin määritelmän mukaan).

b) Anna kaksi eri esimerkkiä kuvioista, jotka ovat pulleita (dosentin määritelmän mukaan).

Eri esimerkeiksi lasketaan kuviot, jotka eivät ole yhdenmuotoisia. Muista myös perustella, miksi antamasi esimerkit ovat tai eivät ole pulleita.



Tutkitaan muutamien yleisten tasokuvioiden pulleutta. Jaetaan kuvion pinta−ala piirin toisella potenssilla ja katsotaan, onko vastaus yli $\frac{1}{20}=0.05$.

1) Säännöllinen kolmio, jonka sivun pituus on 1.

$\frac{\sqrt{3}}{4}/3^2$

0.04811252243

2) Yksikköympyrä.

$\pi/(2\pi)^2$

0.07957747155

3) Neliö, jonka sivun pituus on 1.

$1/4^2$

0.0625

4) Muistikolmio, jonka sivujen pituudet ovat 1, 2 ja $\sqrt{3}$.

$\frac{\sqrt{3}}{2}/(3+\sqrt{3})^2$

0.03867513459

a) Pulleita eivät ole kuviot 1) ja 4).
b) Pulleita ovat kuviot 2) ja 3).

12. Moodi ja keskiarvo ovat esimerkkejä jakauman sijaintiluvuista.

a) Kerro sanallisesti, miten jakauman moodi ja keskiarvo lasketaan.

b) Anna esimerkki yhdestä jakaumasta, jossa moodi ja keskiarvo ovat yhtä suuret, ja toisesta jakaumasta, jossa ne ovat eri suuret. Muista myös perustella, miksi esimerkeilläsi on vaaditut ominaisuudet.

Tied. Muok Lisää Toiminto

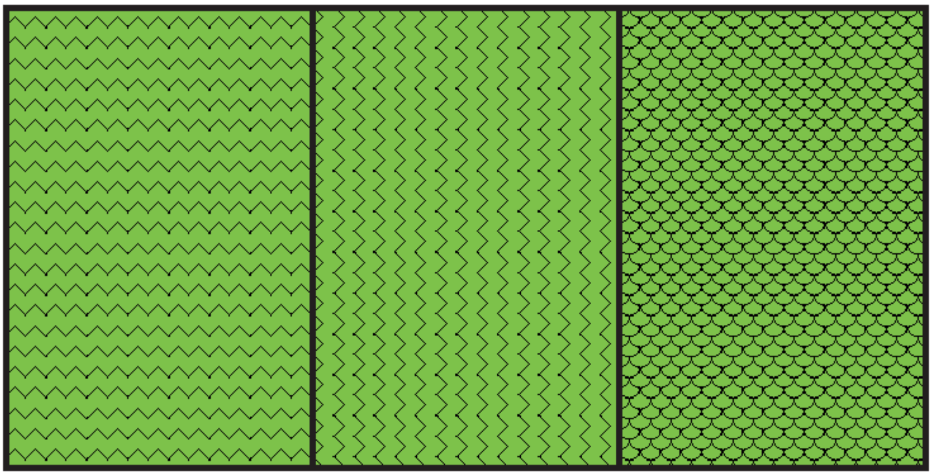
a) Moodi on tyyppiarvo eli lukumääräisesti eniten jakaumassa esiintyvä(t) tilastoalkiot. Mikäli usealla tilastoalkiolla on sama korkein frekvenssi, ne kaikki käyvät moodeiksi. Jatkuvissa jakaumissa käytetään moodina eniten tapauksia sisältävää luokkaa tai luokkia.

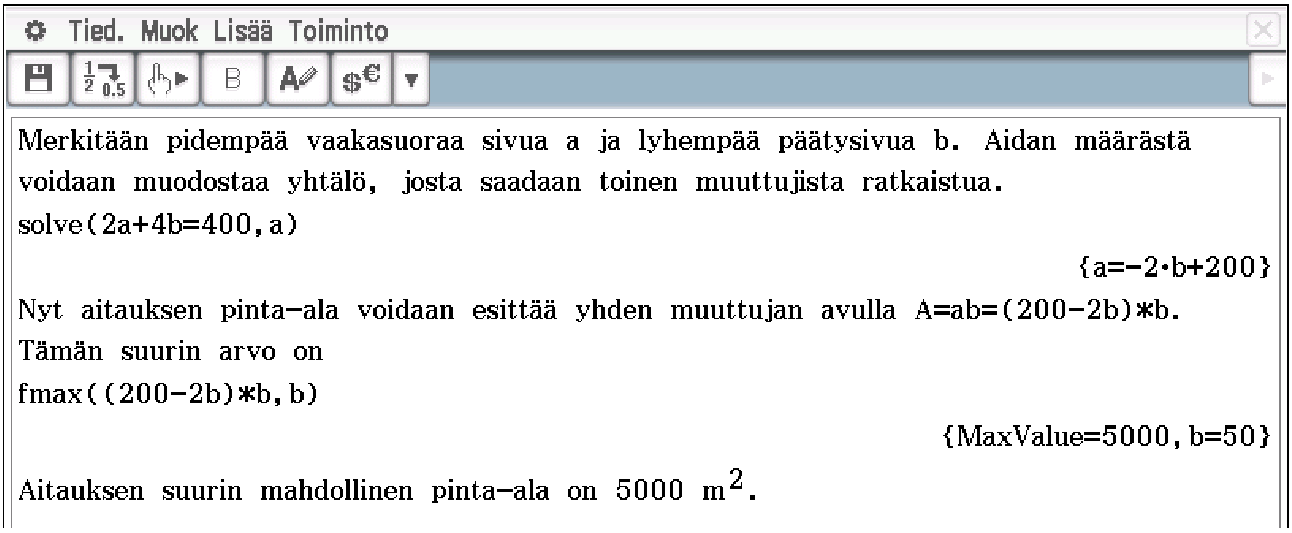
Keskiarvossa lasketaan kaikki tilastoalkiot yhteen ja jaetaan alkioiden lukumäärällä. Laskua voidaan lyhentää kertomalla tilastoalkiot suhteellisilla frekvensseillään ja laskemalla sitten niiden summa. Jatkuvissa jakaumissa kutakin luokkaa edustaa luokkakeskus, jota käytetään keskiarvon laskemisessa yksittäisen arvon sijasta.

b) Esim. koulukurssien arvosanat 7,8,8,9. Moodi on 8 (frekvenssi 2) ja keskiarvo on 8=(7+8+8+9)/4.

Esim. koulukurssien arvosanat 8,8,10,10. Moodi on 8 ja 10 (frekvenssit 2) ja keskiarvo on 9=(8+8+10+10)/4.

13. Luomuviljelijä on hankkinut materiaalin 400 metrin pituiseen aitaan. Hän aikoo rajata sillä niitystä suorakulmion muotoisen alan, joka lisäksi jaetaan kuvion mukaisesti kolmeen yhtäsuureen osaan kahdella ulkoreunan suuntaisella sisäaidalla. Määritä aitauksen suurin mahdollinen kokonaispinta-ala.





Merkitään pidempää vaakasuoraa sivua a ja lyhempää päätysivua b. Aidan määrästä voidaan muodostaa yhtälö, josta saadaan toinen muuttujista ratkaistua.

solve(2a+4b=400,a)

{a=−2·b+200}

Nyt aitauksen pinta−ala voidaan esittää yhden muuttujan avulla A=ab=(200−2b)*b.

Tämän suurin arvo on

fmax((200−2b)*b,b)

{MaxValue=5000,b=50}

Aitauksen suurin mahdollinen pinta−ala on 5000 m^2.

Muistiinpanoja