

## Laske Laudatur ClassPadilla

Lyhyt matematiikka, syksy 2017



## Hyvä lukija,

Kaksiosaiset matematiikan kokeet saivat jatkoa syksyn 2017 ylioppilaskokeissa. Tehtäväjako oli perinteinen eli A-osa (ilman laskinta) sisälsi 4 tehtävää ja tämän jälkeen B1- ja B2-osat (laskimen kanssa) antoivat muutaman vaihtoehdoisen tehtävän. Kaikkiaan tuli vastata 10 tehtävään ja maksimipistemäärä oli 60.

A-osionkin tehtävien ratkaisut tätä vihkoa varten on tehty ClassPadin avulla, vaikka kokelaat tekivätkin ne käsin ja ilman laskinta. Kuitenkin A-osassa eActivity-sovellusta on käytetty vain teksti- ja matematiikka-editorina eikä sen avulla ole ratkaistu mitään laskuja, mikä vastaa käsin paperille tehtyjä ratkaisuita.

Tämä vihkonen on ladattavissa pdf-muodossa ja ClassPadin tiedostoina (.xcp) Casion kotisivuilta. ClassPadin tiedostot aukeavat suoraan eActivity -sovellukseen kaksoisklikkaamalla ja niitä voi vapaasti muokata. Muitakin tukimateriaaleja löytyy osoitteesta (Opettaja & Koulu > Opetusmateriaalia)

<http://www.casio-laskimet.fi>

## Casio Academy

Opiskelijoiden oppimisprosessi, matematiikan ymmärrys ja yo-kokeissa menestyminen on meille tärkeää. Syksyllä 2017 Casio avasi uuden palvelun, jossa opiskelijat voivat harjoitella matematiikan yo-kokeisiin netin välityksellä matematiikan opettajien laskiessa aiempien yo-kokeiden tehtäviä ja vastaillessa opiskelijoiden kysymyksiin. Seuraavan kerran Casio Academy kokoontuu kevään 2018 yo-kokeita ennen. Lisätiedot löytyvät kotisivuiltamme.



## ClassPad Manager (Win, Mac, iOS, Android)

Ratkaisut kevään yo-kokeisiin on tehty ClassPad Manager –ohjelmalla. Samat laskut voidaan tehdä myös laskimella fx-CP400 ja vastaustiedostotkin käyvät molempiin. Samankaltainen käyttöliittymä ja tuttu valikoiden käyttö tukevat siirtymistä laskimista ohjelmien käyttöön.

ClassPad Manager-ohjelma tulee laskimen mukana ja sen voi halutessaan hankkia myös ilman laskinta, oman tarpeen mukaisesti. Ohjelma sopii erinomaisesti opetuksen tueksi älytaulun tai projektorin kaveriksi ja ohjelman käyttö kotitehtävien laskemisessa ja sähköisissä kurssikokeissa auttaa siirtymisessä kohti sähköisiä kokeita. Uutena pakettina **fx-991EX 2in1** on saatavilla funktiolaskin fx-991EX ja ClassPad Managerin 3 vuoden lisenssi. **Tämän vihkosen viimeisillä sivuilla on malliratkaisut B-osan laskintehtäviin funktiolaskimella fx-991EX.** Tiesitkö, miten paljon hyvällä funktiolaskimella voi yo-kokeissa saavuttaa?

90 päivän ilmaisen trial-version Casion ohjelmiin voit ladata osoitteesta <https://edu.casio.com>, josta löydät myös mm. uusimmat käyttöjärjestelmien päivitykset ja usein kysytyt kysymykset vastauksineen.

Hyvää matematiikkaa,

Espoossa 26.9.2017

*Pepe Palovaara*

1. a) Kumpi on suurempi,  $\frac{2}{3}$  vai  $\frac{3}{5}$ ? Perustele.

b) Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} y - x + 1 = 0, \\ 4y = 12 - x. \end{cases}$$

c) Ratkaise yhtälö  $2^{3x+1} = 8$ .

a)  $\frac{2}{3} = \frac{10}{15} > \frac{3}{5} = \frac{9}{15}$ , sillä molemmat luvut ovat positiivisia, joten nimittäjien ollessa samat luvuista suurempi on se, jossa on suurempi osoittaja.

**Vastaus:**  $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$ .

b) Ylemmstä yhtälöstä voidaan ratkaista  $y = x-1$  ja sijoittamalla tämä alempaan yhtälöön saadaan  $4(x-1) = 12-x \Leftrightarrow 5x = 16 \Leftrightarrow x = \frac{16}{5}$ .

Sijoittamalla tämä yllä ratkaistuun yhtälöön saadaan  $y = \frac{16}{5} - 1 = \frac{11}{5}$ .

**Vastaus:**  $x = \frac{16}{5}$  ja  $y = \frac{11}{5}$ .

c) Kirjoitetaan yhtälön oikea puoli luvun 2 potenssien avulla, jolloin yhtälö on

$$2^{3x+1} = 2^3 \Leftrightarrow 3x+1 = 3 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

**Vastaus:**  $x = \frac{2}{3}$ .

2. Kasvihuoneen pituus on 40 m, ja sen poikkileikkaus on puoliympyrän muotoinen. Puoliympyrän säde on 5 m.

- a) Lassella ei ollut käytössään laskinta, joten hän arvioi kasvihuoneen katon, eli kaarevan osan pinta-alaa käyttämällä likiarvoa  $\pi \approx 3$ . Mikä on pinta-ala näin laskettuna?
- b) Palattuaan kotiin Lasse laski laskimella pinta-alaksi  $630 \text{ m}^2$  kymmenen neliömetrin tarkkuudella. Kuinka monta prosenttia suurempi tai pienempi tämä tulos on Lassen alkuperäiseen arvioon verrattuna?



Lähde: <<http://akglandscape.in>>. Luettu 10.3.2016.

a) Katto on lieriön vaippa ja sen ala on  $40 * 3 * 5 = 600 \text{ m}^2$ .

**Vastaus:**  $600 \text{ m}^2$ .

b) Verrataan kotona laskettua pinta-alaa alkuperäiseen ja tutkitaan kuinka moninkertainen saatu tulos oli alkuperäiseen verrattuna:

$$\frac{630}{600} = \frac{21}{20} = \frac{105}{100} = 1.05 \text{ eli kotona laskettu pinta-ala oli } 1.05\text{-kertainen}$$

mikä tarkoittaa 5% suurempaa pinta-alaa alkuperäiseen verrattuna.

**Vastaus:** 5% suurempi.

#### KÄYTTÖESIMERKKEJÄ



#### Selkeät toimintaohjeet

Laskentamenetelmät esitettynä ymmärrettävällä ja selkeällä tavalla.

#### BTS-KUVASTO



#### Kätevästi netissä

Katso Casion uusin online-kuvasto matematiikan ohjelmista ja laskimista kätevästi verkossa.

#### CASIO WORLDWIDE EDUCATION WEB



#### Tukisivusto

Kansainväliseltä tukisivustolta löydät mm. päivitykset, trial-versiot, lisenssien verkkokaupan ja ohjekirjat.

<http://www.casio-laskimet.fi>

3. a) Hannele on ratkaissut yhtälön

$$2(x^2 + x + 3) = 8(x + 1) + 2x^2,$$

mutta välivaiheet ovat menneet sekaisin.

Merkitse välivaiheet (B)–(F) alla olevaan taulukkoon niin, että ne muodostavat yhtälön loogisesti etenevän ratkaisun. Vastausta ei tarvitse perustella.

(A)  $2(x^2 + x + 3) = 8(x + 1) + 2x^2$

(B)  $-3x = 1$

(C)  $x + 3 = 4(x + 1)$

(D)  $x + 3 - 4 - x = 4x + 4 - 4 - x$

(E)  $x + 3 = 4x + 4$

(F)  $x^2 + x + 3 = 4(x + 1) + x^2$

(G)  $x = -\frac{1}{3}$

b) Myös Pauliinan laskun välivaiheet ovat menneet sekaisin, ja lisäksi mukaan on tullut yksi johonkin muuhun laskuun kuuluva välivaihe.

Tehtävänä on valita alla olevista kohdista (B)–(F) neljä ja järjestää ne niin, että niistä muodostuu yhtälön

$$20 + 4x = x^2 + 8$$

ratkaisu. Vastausta ei tarvitse perustella.

(A)  $20 + 4x = x^2 + 8$

(B)  $x^2 - 4x = 12$

(C)  $x^2 + 4x + 16 = 0$

(D)  $x - 2 = \pm 4$

(E)  $x^2 - 4x + 4 = 16$

(F)  $(x - 2)^2 = 4^2$

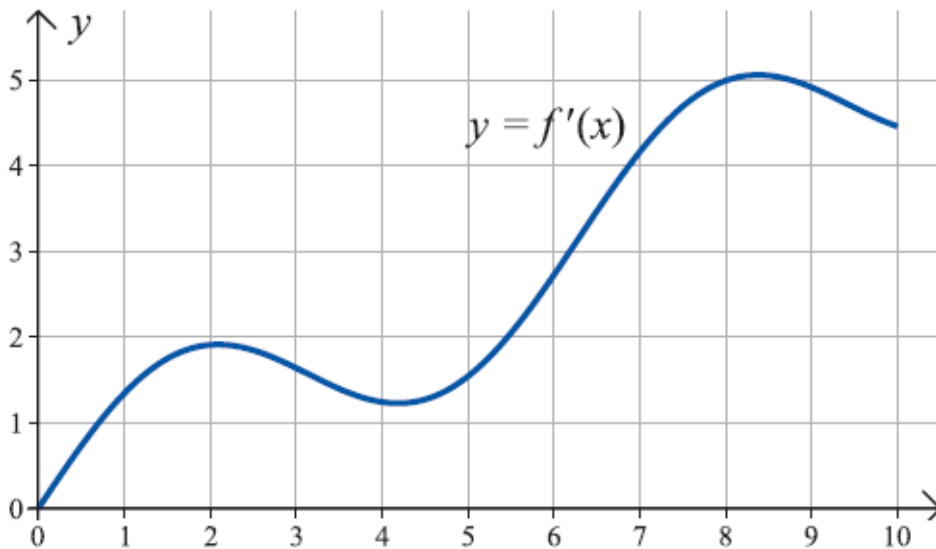
(G)  $x = -2$  tai  $x = 6$

a) Oikea järjestys on A, F, C, E, D, B, G.

b) Väärä välivaihe on C ja oikea järjestys neliöontäydentämällä ratkaistuun yhtälöön A, B, E, F, D, G.

4. Oheisessa kuvassa on funktion  $f(x)$  kuvaaja välillä  $0 \leq x \leq 10$ . Arvioi kuvaajan perusteella yhden desimaalin tarkkuudella
- missä kohdissa  $f(x) = 1,5$
  - millä väleillä funktio  $f(x)$  on vähenevä
  - mikä on funktion  $f(x)$  suurin ja pienin arvo välillä  $2 \leq x \leq 7$ .

Kuvioon tehdyt merkinnät eivät riitä vastaukseksi. Vastauksia ei tarvitse perustella.



- Kuvaaja on korkeudella 1.5 kolmessa kohdassa. Nämä yhden desimaalin tarkkuudella ovat  $x \approx 1.1$ ,  $x \approx 3.4$  ja  $x \approx 4.9$ .
- Funktio vähenee väleillä (likimäärin)  $2.1 \leq x \leq 4.2$  ja  $8.4 \leq x \leq 10$ .
- Pienin arvo välillä  $2 \leq x \leq 7$  on noin 1.2 ja suurin arvo noin 4.1.

**Huomautus!** Kuvaajassa on virheellisesti  $y=f'(x)$ . Arvioinnissa hyväksytään tulkinta suunnitellun  $y=f(x)$  ja virheellisen  $y=f'(x)$  mukaan.



**fx-991EX 2in1** paketti sisältää funktiolaskimen fx-991EX ja ClassPad Managerin 3 vuoden lisenssin (Win/Mac).

Laskin on aina valmis, nopea ja helppokäyttöinen pikaisiin laskuihin. ClassPad Manager on jyrävä CAS-ohjelmisto ja sopii lyhyen ja pitkän matematiikan sähköiseen opiskeluun ja sähköisiin kokeisiin – kuten tämän vihkon ratkaisuihinkin voidaan havaita.

Katso fx-991EX ratkaisut viimeisiltä sivuilta B-osan tehtäviin!

5. Tavaratalossa jokainen kanta-asiakas saa alennuskupongin, jonka voi käyttää yhden ostoksen yhteydessä. Ostos voi sisältää useamman tuotteen. Alennus määräytyy ostoksen kokonaissumman perusteella alla olevan taulukon mukaisesti.

Ostos (€)	Alennus (€)
50,00– 99,99	5
100,00–239,99	15
240,00–499,99	40
500,00–	100

- a) Tee taulukko alennusprosentteista, kun ostoksen kokonaissumma on 50, 100, 300 ja 600 euroa.
- b) Risto ostaa vaatteita 80 eurolla ja hänen isänsä Mauri 200 eurolla. Kuinka monta prosenttiyksikköä suurempi on Maurin alennusprosentti verrattuna Riston alennusprosenttiin?
- c) Mikä olisi ollut Riston ja Maurin yhteinen alennusprosentti, jos he olisivat yhdistäneet ostoksensa?

a) Alennusprosentit saadaan laskettua jakamalla alennus ostoksen kokonaissummalla ja muuttamalla saatu osuus prosenteiksi kertomalla sadalla:

$\frac{5}{50}$	0.1
$\frac{15}{100}$	0.15
$\frac{40}{300}$	0.1333333333
$\frac{100}{600}$	0.1666666667

Ostokset	Alennus (%)
50	10,0
100	15,0
300	13,3
600	16,7

b) Vähennetään prosenttiyksiköt keskenään:

$$100 * \frac{15}{200} - 100 * \frac{5}{80}$$

1.25

**Vastaus:** 1.25 prosenttiyksikköä.

c) Lasketaan ostosten yhteismäärää vastaava alennusprosentti kuten a-kohdassa:

$$\frac{40}{280}$$

0.1428571429

**Vastaus:** Noin 14.3%.

CASIO ACADEMY



**CASIO**  
Academy

Abien kertauspäivä

Harjoittele matikan ykkäreihin netti-opettajien  
avustuksella la 23.9 klo 12-18.

ID: m92-500-163

Uutta tukea  
opiskelijoille!



6. Suomalaisen liigajoukkueen johto pohtii vuotuisen päätapahtumansa lippujen hinnoittelua. Aikaisempien vuosien perusteella he arvioivat, että katsojia tulee 3 000, jos lipun hinta on 15 euroa. Jokaista yhden euron hinnankorotusta kohti katsojien määrä vähenee sadalla, ja vastaavasti yhden euron hinnanalennuksesta katsojamäärä kasvaa sadalla.

Millä lipun hinnalla saadaan suurimmat lipputulot? Kuinka paljon lipputulota tällöin saadaan? Anna vastaukset yhden sentin tarkkuudella.

Merkitään yhden euron hinnankorotusten määrää  $x$ , jolloin positiiviselle luvulle  $x$  vastaava muutos väkimäärään on  $-100x$ . Tuotto saadaan kertomalla lippujen hinta kävijöiden määrällä, joten määritellään sitä kuvaava funktio tulot

$$\text{Define tulot}(x) = (3000 - 100x)(15 + x)$$

done

Lasketaan, milloin tulot ovat suurimmat:

$$f_{\text{Max}}(\text{tulot}(x))$$

$$\{\text{MaxValue}=50625, x=7.5\}$$

**Vastaus:** Lipun hinnaksi kannattaa laittaa 22.50€, jolloin tulot ovat 50625.00€.

**Huom.** Tehtävän voi laskea myös sisältäen enemmän välivaiheita.

Esimerkiksi:

Funktion derivaattafunktio on

$$\frac{d}{dx}(\text{tulot}(x))$$

$$-200 \cdot x + 1500$$

joten sen nollakohdat saadaan ratkaisemalla yhtälö  $-200 \cdot x + 1500 = 0$ :

$$\text{solve}(-200 \cdot x + 1500 = 0)$$

$$\{x=7.5\}$$

Tulot-funktion kuvaaja on alaspäin avautuva paraabelin, joten sen maksimiarvo löytyy ainoastaan derivaatan nollakohdasta. Tulot ovat tällöin tulot(7.5)

$$50625$$

ja lipun hinta  $7.5 + 15 = 22.50$ €.

7. Pienestä lukiosta valmistui 22 ylioppilasta vuonna 2007. Kymmenen vuoden kuluttua valmistumisesta kaksi heistä päättää järjestää luokkakokouksen ja valitsee itselleen sopivan päivämäärän. Oletetaan, että jokaiselle muulle luokkakaverille tämä päivä sopii kuitenkin vain 85 % todennäköisyydellä.

- a) Kuinka suurella todennäköisyydellä kaikki pääsevät paikalle?  
 b) Kuinka suurella todennäköisyydellä täsmälleen yksi ei pääse paikalle?

a) Todennäköisyys, että 20 toisistaan riippumatonta asiaa (todennäköisyys oli muuttumaton 85%) tapahtuu on

$$0.85^{20}$$

0.03875953108

**Vastaus:** Noin 4% todennäköisyydellä.

b) Todennäköisyys, että täsmälleen yksi ei pääse paikalle, noudattaa binomitodennäköisyyttä ja on

$$nC_r(20, 1) * (1 - 0.85)^1 * 0.85^{19}$$

0.136798345

**Vastaus:** Noin 14% todennäköisyydellä.



Katso aiempien vuosien yo-  
kokeiden ratkaisut

[www.casio-laskimet.fi](http://www.casio-laskimet.fi)

> Opettaja & koulu

> Opetusmateriaalia

8. Monet hallinnolliset rajat seuraavat luonnollisia maaston piirteitä, kuten jokia ja vuoristoja. Sen sijaan Yhdysvalloissa Coloradon osavaltion rajat määräytyvät Maapallon leveys- ja pituusasteiden avulla seuraavista ehdoista:

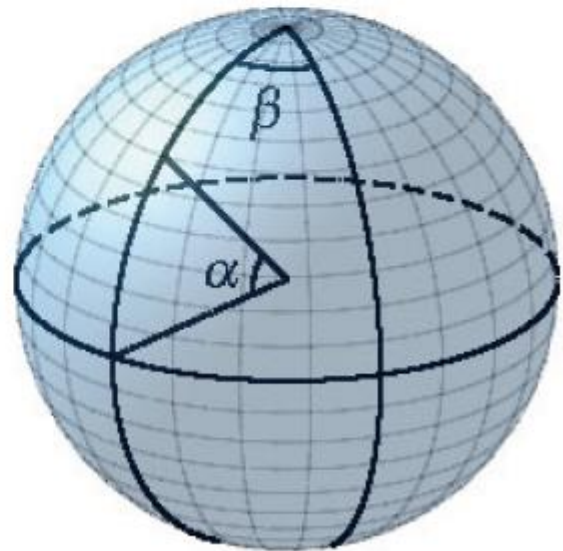
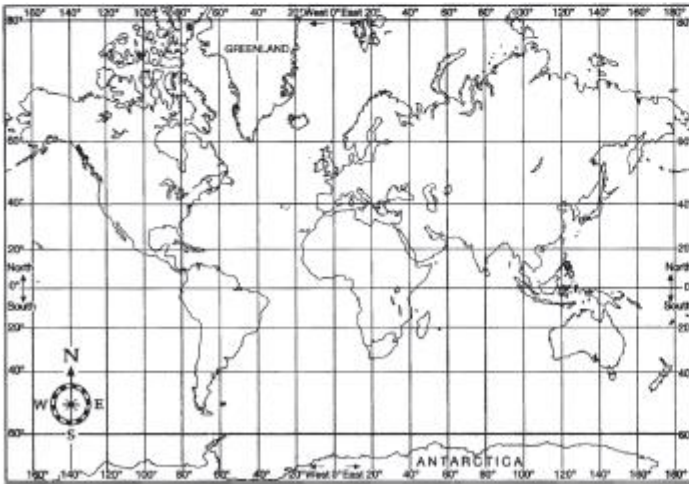
$$37^\circ \text{ N} \leq \text{leveysaste} \leq 41^\circ \text{ N},$$

$$102^\circ \text{ W} \leq \text{pituusaste} \leq 109^\circ \text{ W}.$$

- a) Laske Coloradon osavaltion länsirajan pituus.  
 b) Kumpi on pitempi, Coloradon osavaltion eteläraja vai pohjoisraja? Perustelee.

Tässä tehtävässä Maa oletetaan palloksi, jonka säde on  $R = 6\,371$  km.

Tilanteen hahmottamisen helpottamiseksi on oikean puolen kuvaan merkitty päiväntasaajan suhteen mitattava leveysaste  $\alpha$  ja Greenwichin meridiaanin suhteen mitattava pituusaste  $\beta$ .



Lähde: (vasen) <<https://cnx.org>>. Luettu 10.3.2016. (oikea) YTL.

- a) Länsiraja muodostuu  $37^\circ$  ja  $41^\circ$  pohjoista leveyttä väliin, joten sen pituus on noin

$$\frac{41^\circ - 37^\circ}{360^\circ} * 2\pi * 6371$$

444.7797066

**Vastaus:** Noin 445 km.

- b) Eteläraja on pidempi, koska Colorado on pohjoisella pallonpuoliskolla ja silloin maapallon leveyspiirien pituudet pienenevät pohjoiseen mentäessä.

9. Säätiö haluaa tukea internet-turvallisuutta seitsemän vuoden aikana yhteensä 800 000 eurolla. Rahat jaetaan niin, että jaettava summa kasvaa edellisestä vuodesta aina yhtä monta prosenttia.

- a) Oletetaan, että jaettavan summan vuotuinen kasvuprosentti on 10. Mikä pitää ensimmäisenä vuonna jaettavan summan olla, jotta koko 800 000 tulee seitsemässä vuodessa jaetuksi?
- b) Oletetaan, että ensimmäisenä vuonna jaetaan 70 000 euroa. Mikä pitää vuotuisen kasvuprosentin olla, jotta koko 800 000 euroa tulee seitsemässä vuodessa jaetuksi? Muodosta kysymykseen liittyvä yhtälö ja ratkaise se esimerkiksi kokeilemalla. Anna vastaus yhden prosenttiyksikön tarkkuudella.

a) Merkitään 1. vuotena jaettavaa rahamäärää  $a$ , jolloin saadaan yhtälö

$a+1.1a+1.1^2a+ \dots +1.1^6a=800000$ . Ratkaistaan tästä  $a$ :

$\text{solve}(a+1.1a+1.1^2a+1.1^3a+1.1^4a+1.1^5a+1.1^6a=800000, a)$

{a=84324.39976}

**Vastaus:** 1. vuonna pitää jakaa n. 84 324 euroa.

b) Merkitään vuotuista kasvuprosenttia  $k > 0$ , jolloin sitä vastaava prosenttikerroin on

$$p := 1 + \frac{k}{100}$$

$0.01 \cdot k + 1$

ja  $k$  saadaan ratkaistua yhtälöstä

$\text{solve}(70000(1+p+p^2+p^3+p^4+p^5+p^6)=800000, k) | k > 0$

{k=16.0416628}

**Vastaus:** Vuotuisen kasvuprosentin pitää olla n. 16.

**Huom.** Molemmissa kohdissa voi lyhentää laskua käyttämällä summan lyhennysmerkintää. Esim.

$\text{solve}(a * \sum_{j=0}^6 (1.1^j) = 800000, a)$

{a=84324.39976}

ja

$\text{solve}(70000 * \sum_{i=0}^6 (p^i) = 800000, k) | k > 0$

{k=16.0416628}

10. Katariina ostaa vaelluskäyttöön vedensuodattimen, joka poistaa 96 % suodatettavassa vedessä olevista bakteereista.
- Katariina suodattaa veden kaksi kertaa. Kuinka monta prosenttia bakteereista saadaan tällä tavalla pois?
  - Katariinan vaelluskaveri Nikke haluaa, että bakteereista saadaan pois 99,9995 %. Kuinka monta kertaa vesi pitää tällöin suodattaa?
  - Aikaa säästääkseen Katariina ajattelee ostavansa paremman suodattimen. Kuinka monta prosenttia bakteereista vedensuodattimen pitäisi poistaa yhdellä suodatuskerralla, jotta kahdella suodatuskerralla saataisiin poistettua 99,9995 % bakteereista?

a) Jokainen suodatus tekee bakteerien määrästä 0.04-kertaisen. Kaksi suodatusta tekee bakteerien määrän kertoimeksi

$$0.04^2$$

0.0016

mikä tarkoittaa

$$(1-0.0016)*100$$

99.84

99.84% bakteereista.

**Vastaus:** 99.84%.

b) Merkitään bakteerien määrää alussa a ja suodatuskertojen määrää x. Suodatuskertojen määrä saadaan ratkaistua yhtälöstä

$$\text{solve}(0.04^x * a = (1 - 0.999995) * a, x)$$

{x=3.792029674}

**Vastaus:** Vesi pitää suodattaa 4 kertaa.

c) Merkitään bakteerien määrää pienentävää suodattimen kerrointa  $k > 0$  ja bakteerien määrää alussa a, jolloin kerroin k saadaan ratkaistua yhtälöstä

$$\text{solve}(k^2 * a = (1 - 0.999995) * a, k) | k > 0$$

{k=0.00223606797}

Suodattimen pitää siis tehdä bakteerien määrästä 0.002236...-kertainen.

Tämä tarkoittaa, että bakteereista pitää poisaa yhdellä suodatuskerralla

$$(1 - 2.236067977E-3) * 100$$

99.7763932

n. 99.7763932%

**Vastaus:** Suodattimen pitää poistaa n. 99.78% bakteereista yhdellä suodatuskerralla.

11. a) Selitä omin sanoin mitä tarkoitetaan todennäköisyyslaskennassa vastatapahtumalla eli komplementtitapahtumalla. (2 p.)

b) Kuulusissa 1970-luvulla tehdyssä psykologian koesarjassa Tversky ja Kahneman osoittivat, ettei ihmisten intuitio todennäköisyysarvioinnista ole erityisen luotettava. Eräässä näistä kokeista he esittivät koehenkilöille seuraavan kertomuksen:

Linda on 31-vuotias, naimaton, sanavalmis ja hyvin fiksu. Hän valmistui yliopistosta pääaineenaan filosofia. Opiskelijana hän oli hyvin kiinnostunut syrjäntäkysymyksistä ja sosiaalisesta oikeudenmukaisuudesta, ja hän osallistui myös ydinvoimaa vastustaviin mielenosoituksiin.

Koehenkilöitä pyydettiin tämän perusteella arvioimaan, kumpi seuraavista väitteistä on todennäköisempi:

(A) Linda on pankkivirkailija.

(B) Linda on pankkivirkailija ja hän on aktiivinen feministiliikkeessä.

Kokeessa 85 % vastaajista oli sitä mieltä, että väittämä (B) on todennäköisempi. Perustele todennäköisyyslaskennan keinoin ja merkinnöin, että nämä vastaajat ovat väärässä. (4 p.)

a) Tapahtuman A vastatapahtuma sisältää kaikki ne alkeistapaukset, joita tapahtuma A ei sisällä. Yhteensä ne kattavat kaikki tapaukset, joten  $P(A) + P(A:n \text{ vastatapahtuma}) = 1$ .

b) Merkitään satunnaismuuttujalla  $A = \text{"Linda on aktiivinen feministiliikkeessä"}$ . Koska ei ole mahdotonta eikä täysin varmaa, että Linda olisi aktiivinen feministiliikkeessä, niin  $0 < P(A) < 1$ .

Linda voi myös olla pankkivirkailija tai olla olematta, koska näitä tietoja ei ole tehtävässä varmistettu. Merkitään  $B = \text{"Linda on pankkivirkailija"}$ . Siis  $0 < P(B) < 1$ .

Tapahtumien todennäköisyyksien kertolaskusäännön nojalla  $P(A \text{ ja } B) = P(A) * P(B|A)$ .

Mikäli feministiliikkeessä toimiminen on riippumaton pankkivirkailijan työssä olemisesta, niin  $P(B|A) = P(B)$  ja  $P(A \text{ ja } B) < P(A)$ . Tällöin vastaajat ovat väärässä.

Mikäli pankkivirkailijana toimimisen todennäköisyyttä muuttaa aktiivisena feministiliikkeen toimijana oleminen, niin  $P(B|A) \neq P(B)$ . Silti  $P(B|A) < 1$  ja sillä kertominen pienentää todennäköisyyttä  $P(A)$ . Tällöinkin vastaajat ovat väärässä.

12. Rahtilaiva lähtee Hangon satamasta Saksan Rostockiin. Laivan navigointijärjestelmä kertoo reitin vektorimuodossa. Laiva kulkee ensin vektorin  $\vec{a} = 3,5\vec{i} - 3,5\vec{j}$  verran, sitten vektorin  $\vec{b} = -5,0\vec{i}$  verran ja lopuksi vektorin  $\vec{c} = -4,1\vec{j}$  verran. Yksikkönä on kilometri. Kuinka kaukana laiva on tällöin lähtöpisteestä? Anna vastaus sadan metrin tarkkuudella. Maan pinnan kaareutumista ei tarvitse tässä tehtävässä ottaa huomioon.

Matka saadaan laskettua kuljettujen vektorien summan pituutena. Merkitään kuljettua vektoria muuttujana summa:

$$\text{summa} = [3.5 \ -3.5] + [-5.0 \ 0] + [0 \ -4.1]$$

$$\left[ -\frac{3}{2} \ -\frac{38}{5} \right]$$

ja lasketaan sen pituuden likiarvo

$$\text{norm}(\text{summa})$$

$$7.746612163$$

**Vastaus:** Laivan etäisyys lähtöpisteestä on n. 7700 metriä.

**Huom.** Kuljetun summavektorin pituuden voi laskea myös neliöjuuren avulla

$$\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{38}{5}\right)^2}$$

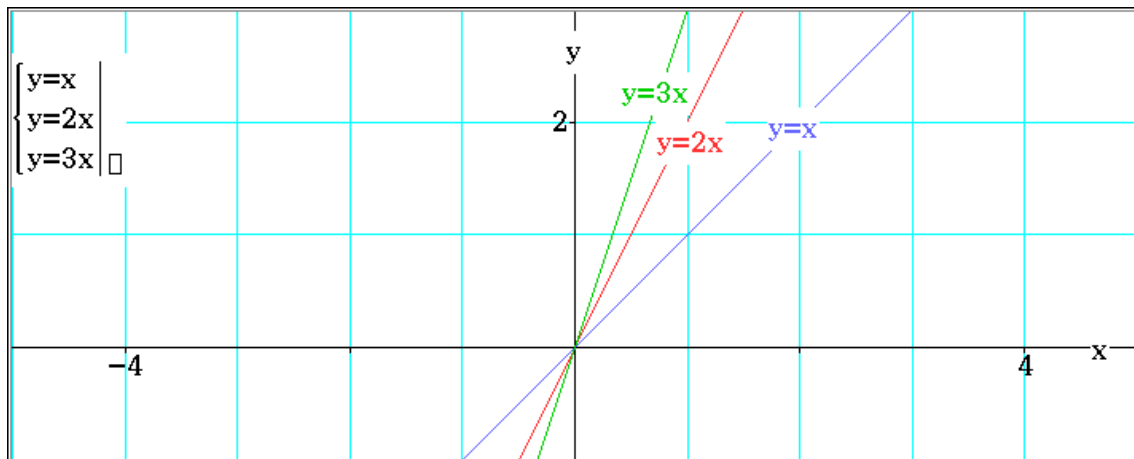
$$7.746612163$$

13. Tarkastellaan kahden muuttujan  $x$  ja  $y$  ensimmäisen asteen yhtälöitä ja niistä muodostettuja yhtälöryhmiä.
- Anna esimerkki yhtälöryhmästä, joka koostuu kolmesta eri yhtälöstä ja jolla on täsmälleen yksi ratkaisu.
  - Anna esimerkki yhtälöryhmästä, joka koostuu kolmesta eri yhtälöstä ja jolla ei ole yhtään ratkaisua.
  - Tulkitse a- ja b-kohdissa antamasi esimerkit graafisesti.

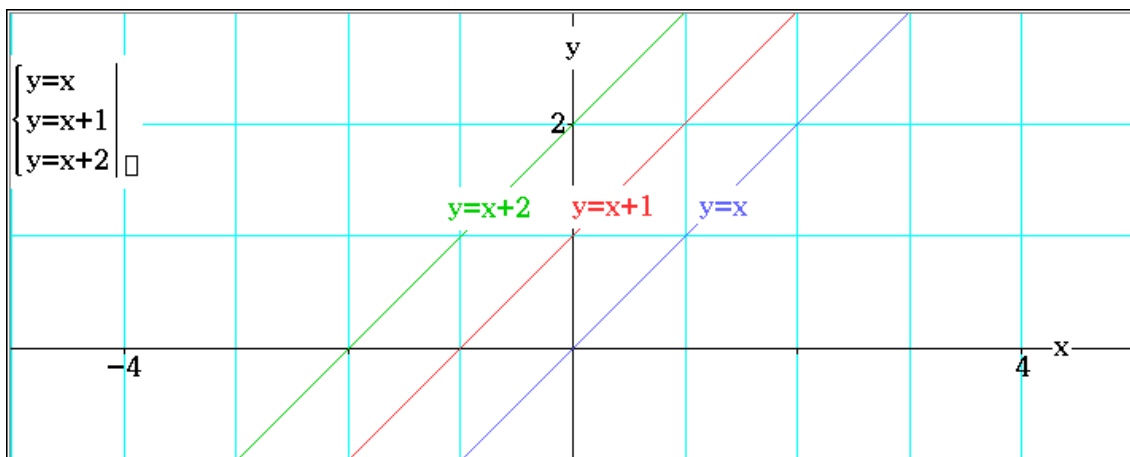
a) 
$$\begin{cases} y=x \\ y=2x \\ y=3x \end{cases} \square$$

b) 
$$\begin{cases} y=x \\ y=x+1 \\ y=x+2 \end{cases} \square$$

c) a-kohdassa on kyseessä origon kautta kulkevat suorat, joilla on eri jyrkkyys. Kaikki leikkaavat origossa ja piste  $(0,0)$  onkin yhtälöryhmän ratkaisu.



b-kohdassa suorilla on sama jyrkkyys, mutta ne kulkevat päällekkäin eivätkä siten leikkaa. Myöskään vastaavalla yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.





ClassWiz fx-991EX lyhyen matematiikan B-osan tehtävissä 5,6,7,8,9,10 ja 12.

5) Taulukko on tehty Spreadsheet-sovellukseen ja laskut Calculate-sovelluksessa.

<p>8: Spreadsheet</p>				<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>5</td> <td>50</td> <td>0.1</td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>15</td> <td>100</td> <td>0.15</td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>40</td> <td>300</td> <td>0.1333</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>100</td> <td>600</td> <td>0.1666</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>=A1÷B1</p>		A	B	C	D	1	5	50	0.1		2	15	100	0.15		3	40	300	0.1333		4	100	600	0.1666	
	A	B	C	D																									
1	5	50	0.1																										
2	15	100	0.15																										
3	40	300	0.1333																										
4	100	600	0.1666																										
$100 \times \frac{15}{200} - 100 \times \frac{5}{80}$ <p>1.25</p>		$100 \times \frac{40}{280}$ <p>14.28571429</p>																											

6) Polynomiyhtälön suurin arvo on laskettu Equation/Func-sovelluksessa.

<p>A: Equation/Func</p>		$ax^2+bx+c$ $- 100x^2+ 1500x + 45000$ <p>45000</p>	
$\text{Max of } y=ax^2+bx+c$ $x=$ <p>7.5</p>		$\text{Max of } y=ax^2+bx+c$ $y=$ <p>50625</p>	

7) Binomijakauman arvo on ratkaistu Distribution-sovelluksessa ja toinen lasku Calculate-sovelluksessa.

<p>7: Distribution</p>		<p>Binomial PD</p> <p>X : 20</p> <p>N : 20</p> <p>p : 0.85</p>	
$P=$ <p>0.03875953108</p>		$20C1 \times 0.15 \times 0.85^{19}$ <p>0.136798345</p>	

8) Calculate-sovelluksessa voi vaihtaa tarkan arvon ja likiarvon välillä näppäimestä S<->D.

$$\frac{41^\circ - 37^\circ}{360^\circ} \times 2\pi \times 6371$$

$$\frac{6371}{45} \pi$$

$$\frac{41^\circ - 37^\circ}{360^\circ} \times 2\pi \times 6371$$

$$444.7797066$$

9) Yhtälö syötetään Calculate-sovellukseen ja käytetään numeerista ratkaisinta alkuarvolla 50000.

$$x + 1.1x + 1.1^2x + 1.1^3x$$

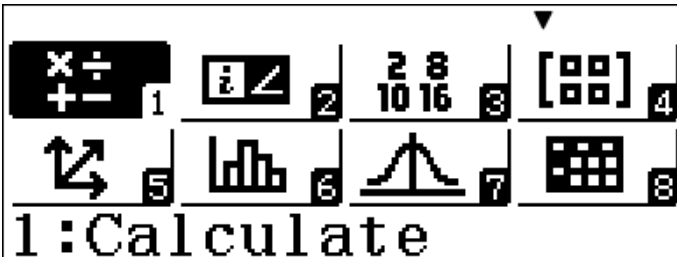
$$x = 50000$$

$$x + 1.1x + 1.1^2x + 1.1^3x$$

$$x = 84324.39976$$

$$L-R = 0$$

Alkuarvona prosenttikertoimelle x on käytetty lukua 10:



$$1 : \text{Calculate}$$

$$70000x(1+x+x^2+x^3)$$

$$x = 10$$

$$70000x(1+x+x^2+x^3)$$

$$x = 1.160416628$$

$$L-R = 0$$

$$(Ans-1) \times 100$$

$$16.0416628$$

10) Calculate-sovelluksessa suoritettavat laskut ja yhtälönratkaisu Newtonin menetelmällä:

$$(1 - 0.04^x) \times 100$$

$$99.84$$

$$0.04^x = 1 - 0.999995$$

$$x = 2$$

$$0.04^x = 1 - 0.999995$$

$$x = 3.792029674$$

$$L-R = 0$$

c-kohdassa alkuarvona on käytetty myös lukua 2

$$x^2 = 1 - 0.999995$$

$$x = 2.2360679 \times 10^{-3}$$

$$L-R = 0$$

$$(1 - \text{Ans}) \times 100$$

$$99.7763932$$

12) Käytetään Vector-sovellusta, johon määritellään vektorit A, B ja C. OPTN-näppäimestä voi hakea vektorien laskutoimitukset, muokata ja lisätä vektoreita.

Calculator interface showing the Vector application menu. The '5: Vector' option is highlighted.

VctA=

$$\begin{bmatrix} 3.5 \\ -3.5 \end{bmatrix}$$

$$-3.5$$

VctB=

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$0$$

VctC=

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -4.1 \end{bmatrix}$$

$$-4.1$$

Lasketaan summavektori ja sen pituus (km)

$$\text{VctA} + \text{VctB} + \text{VctC}$$

VctAns=

$$\begin{bmatrix} -1.5 \\ -7.6 \end{bmatrix}$$

$$-7.6$$

$$\sqrt{(\text{VctAns} \cdot \text{VctAns})}$$

$$7.746612163$$

ClassWiz fx-991EX  
Huima tehopakkaus  
taskukoossa.



Muistiinpanoja ja huomioita

Blank lined area for notes, consisting of 12 horizontal light blue bars.