CASIO

Laske Laudatur ClassPad.net -sovelluksella

Lyhyt matematiikka, kevät 2019

Tiivistelmä

Kevään 2019 yo-kokeiden ratkaisut ClassPad.net sovelluksella laskettuina.
Työkalu löytyy osoitteesta https://classpad.net

Pepe Palovaara
pepe.palovaara@casio.fi

Hyvä lukija,

Casion selainpohjainen CAS-sovellus ClassPad.net auttaa ymmärtämään ja oppimaan matematiikkaa helpommin ja nopeammin kuin koskaan! Edessäsi on sillä ratkaistut kevään 2019 lyhyen matematiikan tehtävät.

Kokeen rakenne oli entisellään, tosin pisteytys tehtävää kohden muuttui 6:sta 12:een mahdollistaen perustelujen aiempaa tarkemman pisteytyksen. Näin kokeen ohje asian kiteyttää:

”Koe koostuu 13 tehtävästä, joista vastataan kymmeneen. Tehtävät on jaettu kolmeen osaan. A-osassa on neljä kaikille pakollista tehtävää. B1-osassa on viisi tehtävää, joista vastataan kolmeen. B2-osassa on neljä tehtävää, joista vastataan kolmeen. Kaikki tehtävät arvostellaan pistein 0–12, joten kokeen maksimipistemäärä on 120.”

Mukana kokeessaoli myös tehtäviin liittyviä aineistoja. Tämä vihkonen on ladattavissa pdf-muodossa Casion kotisivuilta samoin kuin ClassPad.netin paperien linkit. Tukesi löytyy osoitteesta

http://www.casio-laskimet.fi

Casio Academy –videot soittolistalla

Tänä keväänä jo 4. kertaa pidetyssä Casio Academy -harjoittelupäivässä opiskelijoilla oli mahdollisuus harjoitella matematiikan yo-kokeisiin netin välityksellä matematiikan opettajien kera. Opiskelijoiden tukeminen ja opinnoissa auttaminen on meille tärkeää. Aiemmat malliratkaisut löytyvät tallenteina YouTubesta

https://bit.ly/casio-academy

ClassPad.net -sovellus

ClassPad.net on selainpohjainen sovellus, jossa on työkalut moneen matematiikan osa-alueeseen. Ohjelman peruskäyttö on ilmaista – riittää siirtyä sivulle https://classpad.net. Kaikki ominaisuudet voidaan ottaa käyttöön lunastamalla PLUS-tason käyttäjän vuosijäsenyys. Ohjelmaa kehitetään kovaa vauhtia, joten käyttöösi tulee uusia ominaisuuksia tasaiseen tahtiin!

Mukavia hetkiä yo-kokeiden ratkaisujen parissa!

Espoossa 26.4.2019

Pepe Palovaara

Nordic School Coordinator
Casio Scandinavia

A-osa

Ratkaise kaikki tämän osan tehtävät 1–4.

---

1. Lukujonojen määritelmiä (12 p.)

Aineisto:
1.A Luettelo: Lukujonot A–G

Yhdistä kukin lukujonon määritelmä 1.1.–1.6. siihen jonoon A–G, joka määritelmän perusteella saadaan. Kaikki jonot alkavat jäsenestä a_1, ja yksi vastausjono jää käyttämättä. Vastauksia ei tarvitse perustella.

1.1. $a_n = 2n - 1$ C. (1, 3, 5, 7, ...) (2 p.)

1.2. $a_n = n^2$ D. (1, 4, 9, 16, ...) (2 p.)

1.3. $a_n = n^3$ E. (1, 8, 27, 64, ...) (2 p.)

1.4. $a_n = 2^n$ G. (2, 4, 8, 16, ...) (2 p.)

1.5. $a_1 = 2$ ja $a_n = a_{n-1} + 2$, kun $n \geq 2$ F. (2, 4, 6, 8, ...) (2 p.)

1.6. $a_1 = 1, a_2 = 2$ ja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, kun $n \geq 3$ B. (1, 2, 3, 5, ...) (2 p.)

Huom. A-osan tehtävissä ei ole käytössä laskinohjelmia. Tehtävien ratkaisut on silti havainnollistettu ClassPad.net -sovelluksen avulla käyttämättä sen laskuominaisuuksia. Samoin kuvaajat on piirretty ClassPad.netin avulla.

2. Paraabelien huiput (12 p.)

Määritä seuraavien paraabelien huippujen x- ja y-koordinaatit. Vastaukset voi antaa vain tekstimuodossa. Vastauksia ei tarvitse perustella.
Anna vastaukset muodossa "x =___, y =___".

2.1. $y = 2x^2 + 1$ (4 p.)

2.2. $y = x^2 - 2x$ (4 p.)

2.3. $y = 3(x - 5)^2 + 7$ (4 p.)

Lyhyt matikka k2019, tehtävä 2

Uusi paperi

2.1. Paraabelin huippu on ylöspäin avautuvassa paraabelissa ainoassa derivaatan nollakohdassa. Derivaatan

$$y' = 4x$$

ainoa nollakohta on yhtälön

$$4x = 0$$

ratkaisuna x=0, jolloin huipun y-koordinaatti on

$$y = 2 \cdot 0^2 + 1 = 1.$$

2.2. Paraabelin huippu on ylöspäin avautuvan paraabelin nollakohtien puolivälissä. Nollakohdat saadaan yhtälöstä

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ tai } x = 2$$

Nollakohdan x-koordinaatti on täten

$$x = \frac{2-0}{2} = 1$$

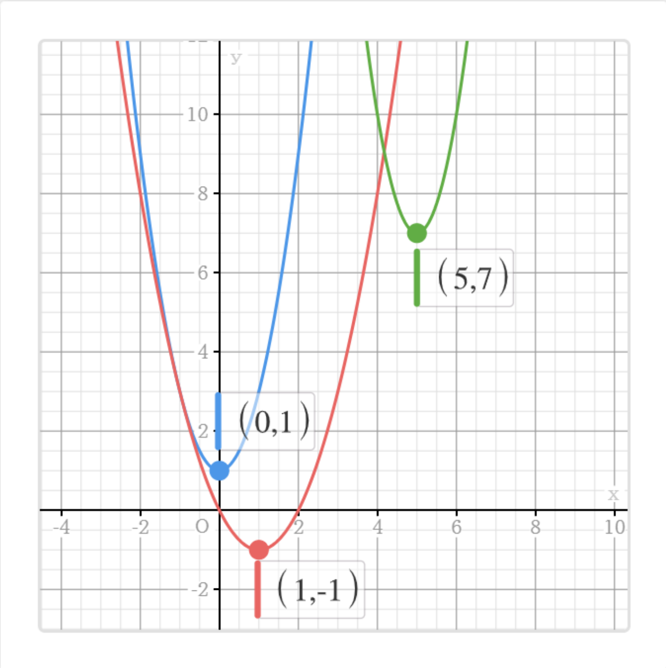
ja y-koordinaatti

$$y = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1.$$

2.3. Paraabelin huippu on luettavissa huippumuotoisesta yhtälöstä

$$y - 7 = 3(x-5)^2,$$

josta x=5 ja y=7.



$$y = 2x^2 + 1$$

$$y = x^2 - 2x$$

$$y = 3(x-5)^2 + 7$$

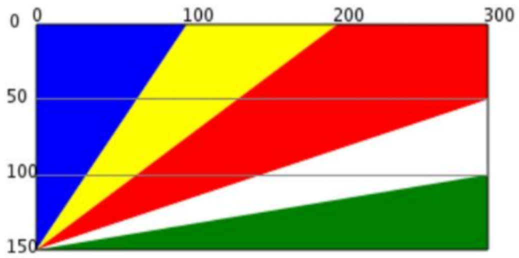
3. Värikäs lippu (12 p.)

Aineisto:
3.A Kuva: Seychellien lippu

Seychellien lipussa on viisi eri väriä kuvan 3.A mukaisesti. Kuinka monta prosenttia kukin väri peittää koko lipun pinta-alasta?

Lyhyt matematiikka k2019, tehtävä 3 | Uusi paperi

3.A Kuva: Seychellien lippu



Lähde: Prog Zoo. https://progzoo.net/wiki/Flags_with_Polygons_Tutorial. Viitattu 27.8.2018.

Sinisen kolmion pinta-ala on

$\frac{1}{2}\cdot 100\cdot 150 = 7500$ pay.

Keltaisen kolmion pinta-ala on

$\frac{1}{2}\cdot 100\cdot 150 = 7500$ pay.

Valkoisen kolmion pinta-ala on

$\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 300 = 7500$ pay.

Vihreän kolmion pinta-ala on

$\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 300 = 7500$ pay.

Loput pinta-alasta on punaista. Alueen koko saadaan vähentämällä koko suorakulmiosta edellä lasketut alat:

$150\cdot 300 - 4\cdot 7500 = 15000$ pay.

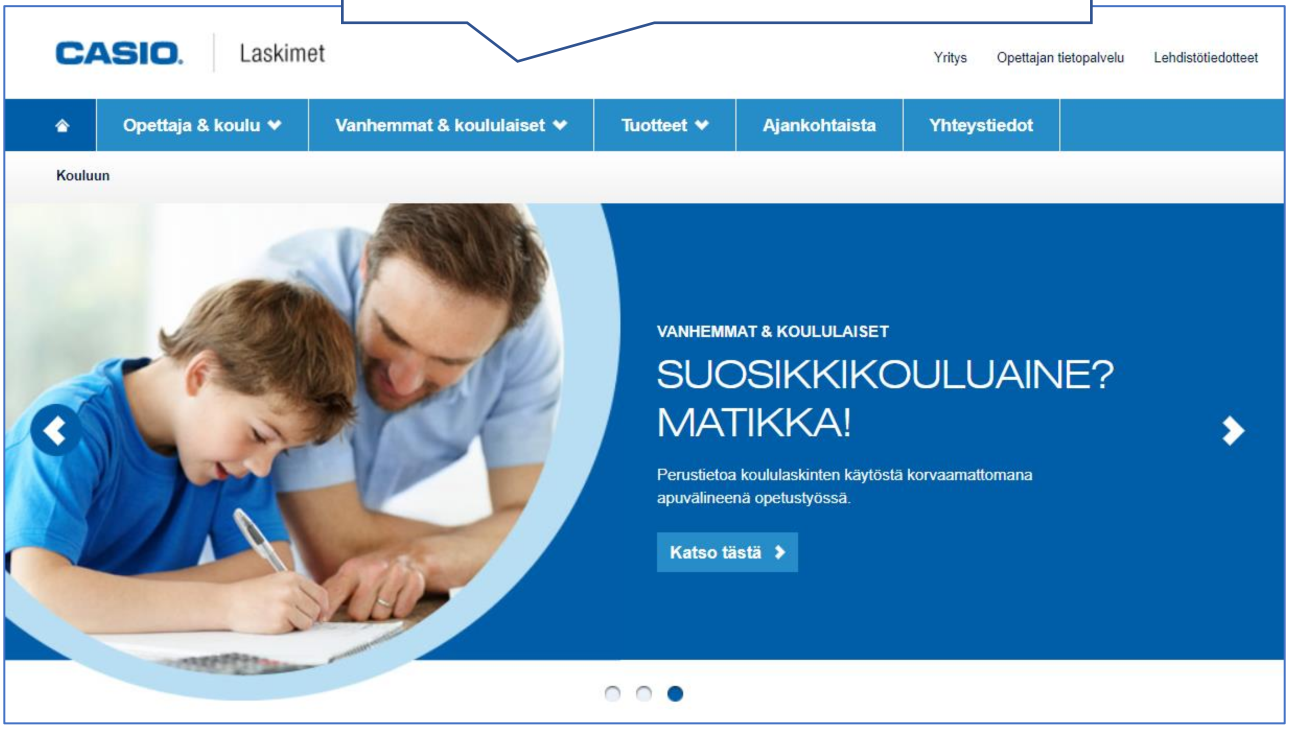
Suhteelliset osuudet lippujen punaiselle osalle on

$\frac{15000}{45000} = \frac{1}{3}$ eli n. 33,3%.

Jokaisen muun värin suhteellinen osuus on

$\frac{7500}{45000} = \frac{1}{6}$ eli n. 16,7%.

http://www.casio-laskimet.fi

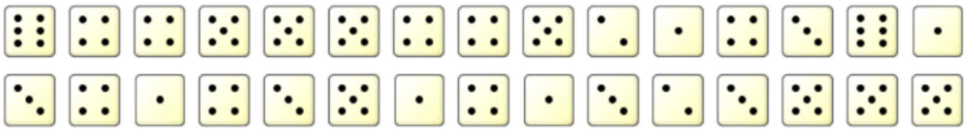


4. Tilastokysymyksiä nopanheitosta (12 p.)

Aineisto:
4.A Kuva: Nopat

Heitettiin 30 noppaa, ja saatiin kuvan 4.A mukainen tulos, jota kutsutaan tässä tehtävässä aineistoksi.

4.1. Muodosta aineiston perusteella frekvenssitaulukko. Voit laatia taulukon kaavaeditorin taulukko-ominaisuudella tai pelkkänä tekstinä. (2 p.)
4.2. Mikä on aineiston moodi? Perustele lyhyesti vastauksesi. (2 p.)
4.3. Mikä on aineiston mediaani? Perustele lyhyesti vastauksesi. (3 p.)
4.4. Mikä on aineiston keskiarvo? Perustele lyhyesti vastauksesi. (3 p.)
4.5. Mikä on silmäluvun 6 tilastollinen todennäköisyys tässä aineistossa? (2 p.)



Lähde: RANDOM.ORG. https://www.random.org/dice/. Viitattu 23.1.2018.

Lyhyt matematiikka k2019, tehtävä 4

4.1. Frekvenssitaulukko:

$$\begin{bmatrix} \text{Silmäluku} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \text{Frekvenssi} & 5 & 2 & 5 & 8 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

4.2. Moodi on eniten esiintyvä arvo(t) eli 4 ja 5, sillä niillä on suurin frekvenssi (8).

4.3. Mediaani on järjestetyn aineiston keskimmäinen tai keskimmäiset arvo(t) eli 4, sillä aineiston 15. ja 16. arvo on 4.

4.4. Keskiarvo saadaan laskemalla frekvenssillä kerrottujen arvojen summa jaettuna arvojen lukumäärällä:

$$\frac{5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{30} = 3{,}6.$$

4.5. Tilastollinen todennäköisyys on esiintymiskertojen lukumäärä jaettuna kaikkien tulosten lukumäärällä:

$$\frac{2}{30} = \frac{1}{15}, \text{ mikä on n. } 6{,}7\%.$$

Opiskelijoiden tukena.

Katso tallenteet

bit.ly/casio-academy

B1-osa

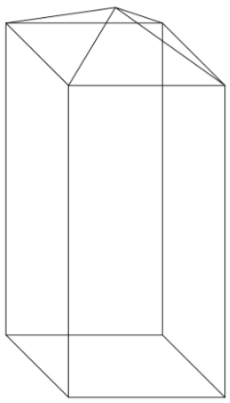
Ratkaise kolme tehtävistä 5–9. Tässä osassa saat käyttää kaikkia koejärjestelmän ohjelmia ja omaa laskintasi, kun olet palauttanut A-osan vastaukset.

---

5. Paljonko tölkissä on ilmaa? (12 p.)

Aineisto:
5.A Kuva: Maitotölkki

Maitotölkki (aineisto 5.A) sisältää $1{,}75$ litraa maitoa. Tölkin pohja on neliö, jonka sivun pituus on $9{,}25$ cm. Tölkin sisäosan kokonaiskorkeus on $23{,}0$ cm, ja sen alaosa koostuu suorakulmaisesta särmiöstä, jonka korkeus on $20{,}0$ cm. Tölkin yläosa muodostuu pyramidista. Kuinka paljon ilmaa on avaamattomassa maitotölkissä?



Kuva: YTL.

Lyhyt matematiikka k2019, tehtävä 5 — Uusi paperi

Lasketaan koko maitopurkin tilavuus lieriön ja kartion summana.

Vähennetään saadusta tuloksesta maidon määrä, jolloin saadaan ilman tilavuus kuutiosenttimetreinä.

Ilman tilavuus on n. $46{,}8\text{cm}^3$.

$$9.25^2 \cdot 20 + \frac{1}{3} \cdot 9.25^2 \cdot 3 = \frac{28749}{16}$$

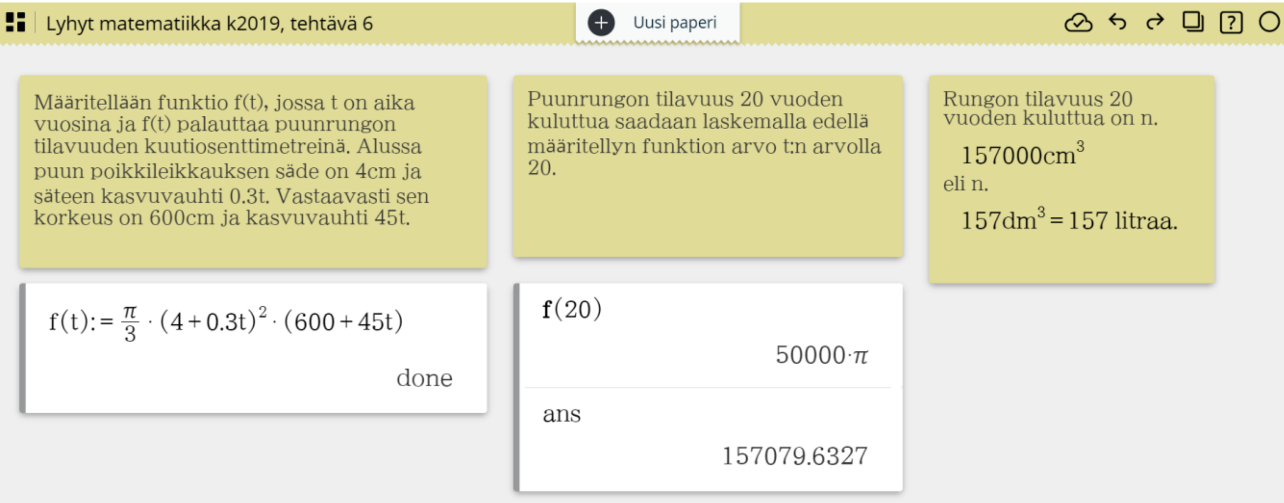
ans $= 1796.8125$

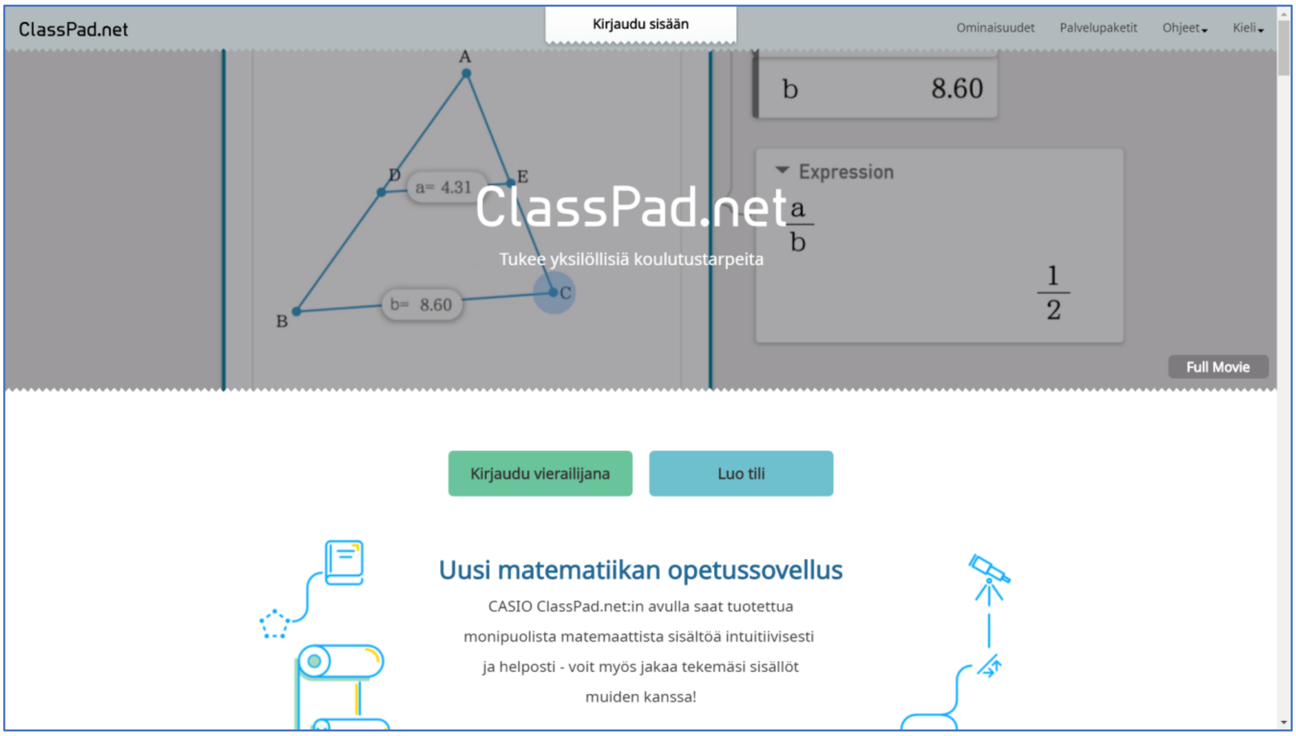
$$\frac{28749}{16} - 1750 = \frac{749}{16}$$

ans $= 46.8125$

6. Puun kasvu (12 p.)

Metsäntutkija mallintaa puun kasvua. Mallissa puunrunko ajatellaan suoraksi ympyräpohjaiseksi kartioksi. Ajanhetkellä $t = 0$ puunrunko on korkeudeltaan 6 metriä ja tyvestä halkaisijaltaan 8 cm paksu. Joka vuosi puu kasvaa pituutta 45 cm ja tyven halkaisija kasvaa $0{,}6$ cm. Muodosta funktio, joka kuvaa puunrungon tilavuutta ajan funktiona. Mikä on rungon tilavuus 20 vuoden kuluttua?





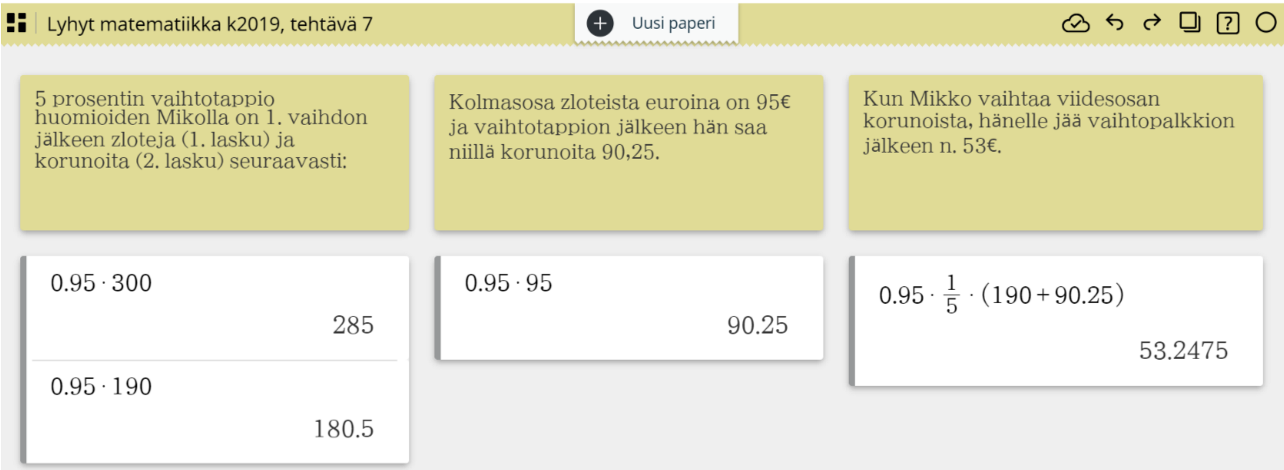
https://classpad.net

7. Mikko vaihtaa rahaa (12 p.)

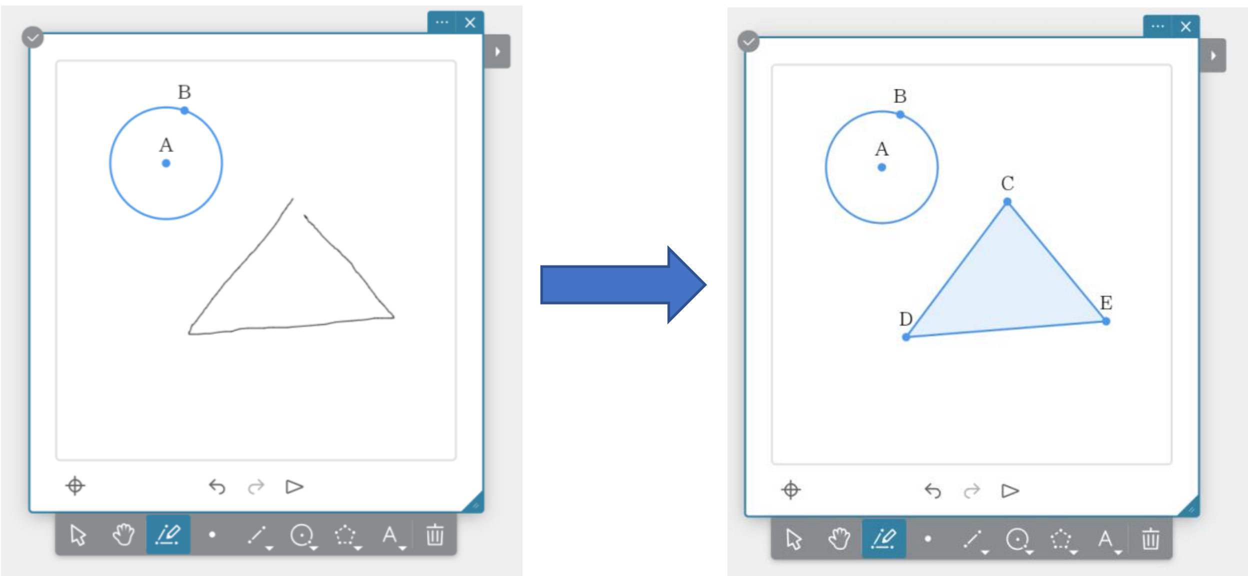
Mikko lähtee matkalle Varsovaan ja Prahaan. Hän joutuu vaihtamaan rahaa useita kertoja ennen matkaa ja matkan aikana. Jokaisessa vaihdossa hän menettää vaihtotappiona 5 prosenttia rahan arvosta. Hän vaihtaa 300 euroa Puolan złotyiksi ja 200 euroa Tšekin korunoiksi. Hän ei muista, millä kurssilla vaihto suoritettiin, mutta pitää kirjaa siitä, kuinka suuri osuus rahoista tulee käytettyä.

Puolassa hän huomaa, että kolmasosa złoteista on jäänyt käyttämättä, ja hän vaihtaa ne lähtiessään Tšekin korunoiksi. Kotiin tullessaan hänellä on vielä viidesosa kaikista korunoista jäljellä, ja hän vaihtaa ne takaisin euroiksi.

Kuinka monta euroa hän saa takaisin? Anna vastaus euron tarkkuudella.



ClassPad.net -sovelluksessa on muotojen tunnistus geometrian piirrossa!



8. Lukujonon kasvaminen ja väheneminen (12 p.)

Tarkastellaan lukuja

$$a_n = -n^3 + 1000n^2 + 100n + 2019,$$

kun $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 1000$. Etsi derivaatan avulla sellainen indeksin k arvo, että lukujono $(a_0, \ldots, a_k)$ on kasvava ja lukujono $(a_k, \ldots, a_{1000})$ on vähenevä.

Lyhyt matematiikka k2019, tehtävä 8 Uusi paperi

Lasketaan lukujonoa vastaavan funktion derivaatta ja sen nollakohdat (n>0).

$a(n):=-n^3+1000n^2+100n+2019$

done

$a'(n):=\frac{d}{dn}(a(n))$

done

$\text{solve}(a'(n)=0,n) \mid n>0$

$\left\{n=\frac{10\cdot\sqrt{10003}}{3}+\frac{1000}{3}\right\}$

ans

{n=666.7166629}

Koska derivaatta on 2. astetta ja sen kuvaaja on alaspäin avautuva paraabeli (toisen asteen termin kerroin on -3<0), niin derivaatan nollakohta on maksimikohta. Lasketaan lukujonon 666. ja 667 jäsen.

a(666)

148216323

a(667)

148216756

Koska a(667)>a(666), niin lukujono on kasvava 667. jäseneen saakka ja muuttuu sen jälkeen väheneväksi.

Kysytty indeksin k arvo on siis 667.

9.1. (Vanha opetussuunnitelma, ennen 1.8.2016 lukion aloittaneet)

Vuoroveden korkeutta kellonajan t (yksikkönä tunti, $t = 0$ keskiyöllä) funktiona voidaan kuvata funktion

$$f(t) = A + B\sin\left(\frac{2\pi}{12{,}4}(t - t_0)\right)$$

avulla. Tässä A, B ja t_0 ovat vakioita. Norjan Tromssassa merenpinta on eräänä päivänä kello 9.00 matalimmillaan. Seuraavan kerran merenpinta on matalimmillaan samana päivänä kello 21.24. Korkeimmillaan merenpinnan korkeus näin kuvattuna on 192 cm ja matalimmillaan 0 cm.

Määritä näiden tietojen avulla funktion $f(t)$ lausekkeessa esiintyvien vakioiden arvot. Anna vastaukset kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

Lyhyt matematiikka k2019, tehtävä 9.1

Uusi paperi

Koska sinifunktion on rajoitettu

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1,$$

niin funktion suurin arvo saadaan korvaamalla sinifunktion arvo luvulla 1. Suurimmaksi arvoksi saadaan

$$A + B \cdot 1 = A + B.$$

Vastaavasti pienin arvo saadaan korvaamalla sinifunktion arvo luvulla -1 ja pienimmäksi arvoksi saadaan

$$A + B \cdot (-1) = A - B.$$

Ratkaistaan näiden ehtojen ja tehtävän tietojen perusteella muodostettu yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} A + B = 192 \\ A - B = 0 \end{cases} \Bigg| \; A,B$$

$$\{A=96, B=96\}$$

Koska funktion pienin arvo saadaan ajan hetkellä t=9 (tuntia) ja koska sinifunktion pienin arvo saadaan kulman arvolla

$$\frac{3\pi}{2},$$

niin saadaan yhtälö:

$$\text{solve}\left(\frac{3\pi}{2} = \frac{2\pi}{12.4}\left(9 - t_0\right), t_0\right)$$

$$\left\{t_0 = -\frac{3}{10}\right\}$$

Kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella

$$A = B = 96{,}0$$

ja

$$t_0 = -0{,}300.$$

CASIO

9.2. (Uusi opetussuunnitelma, 1.8.2016 tai sen jälkeen lukion aloittaneet)

Aineisto:
9.A Teksti: Ilmasto-opas

Ilmasto-oppaan (aineisto 9.A) perusteella oletetaan, että vuoden 2010 tyyppisen ennätyslämpimän heinäkuun todennäköisyys on joka vuosi $\frac{1}{60}$. Tapahtumat oletetaan myös toisistaan riippumattomiksi. Kuinka suurella todennäköisyydellä Suomessa

– ei ole yhtään ennätyslämmintä heinäkuuta seuraavien 30 vuoden aikana? (4 p.)
– on vähintään kaksi ennätyslämmintä heinäkuuta seuraavien 30 vuoden aikana? (8 p.)

Korkeiden lämpötilojen todennäköisyys on moninkertaistunut jo nyt. Vaikka vuotuisten keskilämpötilojen mukainen lämpeneminen on maassamme ollut toistaiseksi suhteellisen pientä verrattuna eri vuosien väliseen suureen vaihteluun, ovat ennätyskorkeiden kuukausittaisten ja vuodenaikoja koskevien keskilämpötilojen todennäköisyydet kuitenkin jo moninkertaistuneet. Mikäli jo tähän mennessä tapahtunutta lämpenemistä ei oteta huomioon, toistuu esimerkiksi vuoden 2010 ennätyslämmin heinäkuu noin 300 vuoden välein. Kun globaali ilmastonmuutos otetaan huomioon, pienenee tämä aika noin 60 vuoteen.

Lähde: Ilmasto-opas. https://ilmasto-opas.fi/. Viitattu 13.2.2018.

Lyhyt matematiikka k2019, tehtävä 9.2 | Uusi paperi

Riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännön avulla P("Ei yhtään ennätyslämmintä heinäkuuta 30 vuoden aikana") on

$$p:=\left(1-\frac{1}{60}\right)^{30}$$

0.6039803894

Todennäköisyys on siis n. 0,60.

Todennäköisyys P("Vähintään kaksi...") saadaan helpommin vastatapahtuman avulla 1-P("Ei yhtään tai yksi...")

$$1-\left(p+\mathrm{nCr}(30,1)\cdot\left(1-\frac{1}{60}\right)^{29}\cdot\frac{1}{60}\right)$$

0.08891093806

Todennäköisyys on siis n. 0,089

10. Miten vauva kasvaa? (12 p.)

Vauvan painon voidaan arvioida kasvavan q^3-kertaiseksi, kun vauvan pituus kasvaa q-kertaiseksi. Tämä perustuu siihen, että vauva on kolmiulotteinen ja kasvua tapahtuu suurin piirtein yhtä paljon jokaiseen suuntaan. Oletetaan, että vauva on syntyessään 52 cm pitkä ja painaa $4{,}0$ kilogrammaa.

10.1. Arvioi vauvan painoa tällä menetelmällä, kun vauvan pituus on 55, 60, 65 ja 70 cm. (4 p.)
10.2. Piirrä kuvaaja, josta ilmenevät syntymämitat ja kohdassa 10.1. lasketut tiedot. (4 p.)
10.3. Voiko samaa arviointitapaa käyttää aikuiseksi asti? Valota esimerkeillä ja perustele, miksi uskot menetelmän toimivan tai olevan toimimatta. (4 p.)

Lyhyt matematiikka k2019, tehtävä 10 Uusi paperi

Vauvan painoa kuvaa pituuden funktiona kuvaa

$m(x) = k \cdot x^3$,

missä k on verrannollisuuskerroin, x on pituus (cm) ja yksikkönä on kg.

Sijoitetaan vauvan tehtävän luvut funktioon ja ratkaistaan k. Tämän jälkeen määritellään funktio m(x).

$\text{solve}(4 = k \cdot 52^3, k)$

$\{k=0.00\}$

$m(x) := \frac{1}{35152} \cdot x^3$

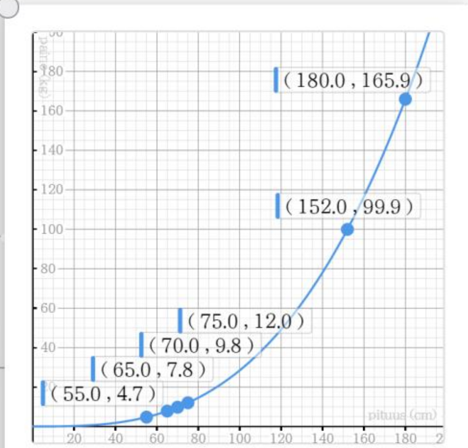
done

$y = m(x)$

Lasketaan funktion arvoja annetuille pituuksille ja piirretään sen kuvaaja.

$m(\{55,60,65,70\})$

$\{4.73,6.14,7.81,9.76\}$



Saatu malli ei sovellu aikuisen pituuden ja painon laskemiseen, sillä esim. 180cm aikuinen painaisi n. 166kg ja 100kg painoisen ihmisen tulisi olla n. 152cm pitkä.

Nämä luvut eivät vastaa normaalin aikuisen mittoja.

x	y = m(x)
55.0	4.7
60.0	6.1
65.0	7.8
70.0	9.8
180.0	165.9
152.0	99.9

11. Harrin palkka (12 p.)

Harri saa palkkaa $4\,200$ euroa kuukaudessa ja hänen työtuntimääränsä on 155 tuntia kuukaudessa. Hän arvioi tuntipalkkaansa seuraavalla tavalla: *Jos työtuntimääräni olisi 160 tuntia ja palkkani $4\,000$ euroa, niin tuntipalkkani olisi $4\,000/160 = 25$. Tässä ei ole otettu huomioon 200 euroa palkasta, joten virhe on runsas euro tuntia kohti; palkka on siis runsaat 26 euroa. Todellinen työtuntimäärä on 155, ei 160, ja siitä tulee varmaankin pieni virhe, joten todellinen tuntipalkka on ehkäpä 27 euroa.*

11.1. Kuinka monta prosenttia enemmän tai vähemmän Harri arvioi saavansa palkkaa tunnilta kuin hän oikeasti saa? (4 p.)
11.2. Selitä Harrin päättelyn vaiheita ja arvioi, perustuuko päättely päteviin arvioihin. (8 p.)

CASIO

Lyhyt matematiikka k2019, tehtävä 11 | Uusi paperi

Harrin oikea palkka on 4200€/kk. Hänen arvioimansa kuukausipalkka on 4185€/kk.

$155 \cdot 27$

4185

Arvio on siis todellista palkkaa pienempi. Suhteelliseksi virheeksi saadaan n. 0,36%.

$100 \cdot \frac{4185 - 4200}{4200}$

-0.3571428571

Arvio on siis todella tarkka. Harri pyöristää tuntimäärää ylöspäin ja samalla palkkaa alaspäin, jolloin virheet osin kumoavat toisensa. Laskettu 25€/h on oikein ja päätelmä runsaasta 26 euron tuntipalkasta on myös hyvä, sillä

$$25 + \frac{200}{160} = 26{,}25$$

Korjaus tuntimäärän osalta on myös oikean suuntainen, sillä jakajan eli tuntimäärän pienentyessä 160:sta 155:een tuntipalkka nousee.

Arvio 27€ tuntipalkasta ei heitä kauas todellisuudesta, sillä jakajan muutos nostaisi tuntipalkaksi n. 27,10€.

$\frac{160}{155} \cdot 26.25$

27.09677419

12. Elisan laina (12 p.)

Aineisto:
12.A Taulukko: Lainan korko

Elisa otti aikanaan 100 000 euron suuruiselle kymmenen vuoden tasalyhennyslainalleen korkokaton. Pankista sai lainalle 4,5 prosentin korkokaton 5 000 euron hintaan. Laina oli sidottu 12 kuukauden euriborkorkoon, joka vaihteli laina-aikana taulukon 12.A mukaan. Kaikki tehtävässä mainitut korkokannat sisältävät korkomarginaalin, ja lainaa lyhennetään kuukausittain.

Kannattiko Elisan ottaa lainalleen korkokattoa? Korkokaton sijaan hän olisi voinut sijoittaa 5 000 euroa säästötilille, jolloin talletuksen nykyinen arvo olisi 5 700 euroa. Muita rahan arvon muutoksia ei tarvitse huomioida.

Voit halutessasi esittää laskut taulukkolaskentaohjelmasta otetussa kuvakaappauksessa, kunhan vastauksesta selviää, miten tuloksiin on päästy.

12.A Taulukko: Lainan korko

Lainavuosi	Korkoprosentti
1	2,4
2	2,5
3	2,3
4	2,9
5	3,4
6	3,4
7	5,5
8	5,7
9	5,0
10	5,1

Lähde: YTL.

Näitä ratkaisuita kirjoitettaessa ClassPad.net -sovelluksen taulukkolaskenta on vielä kehitysasteella, joten tehtävän taulukko on tehty ClassPad Managerilla. ClassPad Manager on käytettävissä yo-kokeiden B-osiossa.

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla kumpaakin vaihtoehtoa koskevat lainan kustannukset.
Mikäli korkokatto kannatti ottaa, on sen säästettävä yli 5700 euroa verrattuna toiseen vaihtoehdoista.

Laskutaulukko =>

Laskukaavat ovat
- sarakkeessa C vuosikorko sarakkeesta B on jaettu 12:lla
- solualueessa D1:O12 on jäljellä olevasta lainasta vähennetty vakiolyhennys 833.33€
- solualueessa D5:O24 on jäljellä oleva lainan määrä kerrottu kuukausittaisella korkoprosentilla ja jaettu 100:lla, esim. solu E15=E3·$C15/100
- solualueessa B28:B37 on yli 4.5% vuosikorko korvattu korkokatolla
- solualue D28:D37 samoin kuin D5:O24
- sarakkeessa on laskettu yhteen kunkin kuun korkomenot ja soluiss P25 ja P37 on kokonaiskorot

Korkokaton kanssa korkojen osuus on 15160.42€ ja ilman korkokattoa 15929.17€. Koska korkokatto säästää kuluissa 15929.17−15160.42=768.75€, mutta maksaa 5700€, ei sen ottaminen kannata.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
2	vuosi	p%	kk%	tammi	helmi	maalis	huhti	touko	kesä	heinä	elo	syys	loka	marras	joulu	
3	1	2.40	0.2000	100000.00	99166.67	98333.34	97500.01	96666.68	95833.35	95000.02	94166.69	93333.36	92500.03	91666.70	90833.37	
4	2	2.50	0.2083	90000.00	89166.67	88333.34	87500.01	86666.68	85833.35	85000.02	84166.69	83333.36	82500.03	81666.70	80833.37	
5	3	2.30	0.1917	80000.00	79166.67	78333.34	77500.01	76666.68	75833.35	75000.02	74166.69	73333.36	72500.03	71666.70	70833.37	
6	4	2.90	0.2417	70000.00	69166.67	68333.34	67500.01	66666.68	65833.35	65000.02	64166.69	63333.36	62500.03	61666.70	60833.37	
7	5	3.40	0.2833	60000.00	59166.67	58333.34	57500.01	56666.68	55833.35	55000.02	54166.69	53333.36	52500.03	51666.70	50833.37	
8	6	3.40	0.2833	50000.00	49166.67	48333.34	47500.01	46666.68	45833.35	45000.02	44166.69	43333.36	42500.03	41666.70	40833.37	
9	7	5.50	0.4583	40000.00	39166.67	38333.34	37500.01	36666.68	35833.35	35000.02	34166.69	33333.36	32500.03	31666.70	30833.37	
10	8	5.70	0.4750	30000.00	29166.67	28333.34	27500.01	26666.68	25833.35	25000.02	24166.69	23333.36	22500.03	21666.70	20833.37	
11	9	5.00	0.4167	20000.00	19166.67	18333.34	17500.01	16666.68	15833.35	15000.02	14166.69	13333.36	12500.03	11666.70	10833.37	
12	10	5.10	0.4250	10000.00	9166.67	8333.34	7500.01	6666.68	5833.35	5000.02	4166.69	3333.36	2500.03	1666.70	833.37	
13				Maksettu korko kuukausittain												
14	vuosi	p%	kk%	tammi	helmi	maalis	huhti	touko	kesä	heinä	elo	syys	loka	marras	joulu	Yhteensä
15	1	2.40	0.2000	200.00	198.33	196.67	195.00	193.33	191.67	190.00	188.33	186.67	185.00	183.33	181.67	2290.00
16	2	2.50	0.2083	187.50	185.76	184.03	182.29	180.56	178.82	177.08	175.35	173.61	171.88	170.14	168.40	2135.42
17	3	2.30	0.1917	153.33	151.74	150.14	148.54	146.94	145.35	143.75	142.15	140.56	138.96	137.36	135.76	1734.58
18	4	2.90	0.2417	169.17	167.15	165.14	163.13	161.11	159.10	157.08	155.07	153.06	151.04	149.03	147.01	1897.08
19	5	3.40	0.2833	170.00	167.64	165.28	162.92	160.56	158.19	155.83	153.47	151.11	148.75	146.39	144.03	1884.17
20	6	3.40	0.2833	141.67	139.31	136.94	134.58	132.22	129.86	127.50	125.14	122.78	120.42	118.06	115.69	1544.17
21	7	5.50	0.4583	183.33	179.51	175.69	171.88	168.06	164.24	160.42	156.60	152.78	148.96	145.14	141.32	1947.92
22	8	5.70	0.4750	142.50	138.54	134.58	130.63	126.67	122.71	118.75	114.79	110.83	106.88	102.92	98.96	1448.75
23	9	5.00	0.4167	83.33	79.86	76.39	72.92	69.44	65.97	62.50	59.03	55.56	52.08	48.61	45.14	770.83
24	10	5.10	0.4250	42.50	38.96	35.42	31.88	28.33	24.79	21.25	17.71	14.17	10.63	7.08	3.54	276.25
25															TTL	15929.17
26				Maksettu korko kuukausittain korkokaton kanssa												
27	vuosi	p%	kk%	tammi	helmi	maalis	huhti	touko	kesä	heinä	elo	syys	loka	marras	joulu	Yhteensä
28	1	2.40	0.2000	200.00	198.33	196.67	195.00	193.33	191.67	190.00	188.33	186.67	185.00	183.33	181.67	2290.00
29	2	2.50	0.2083	187.50	185.76	184.03	182.29	180.56	178.82	177.08	175.35	173.61	171.88	170.14	168.40	2135.42
30	3	2.30	0.1917	153.33	151.74	150.14	148.54	146.94	145.35	143.75	142.15	140.56	138.96	137.36	135.76	1734.58
31	4	2.90	0.2417	169.17	167.15	165.14	163.13	161.11	159.10	157.08	155.07	153.06	151.04	149.03	147.01	1897.08
32	5	3.40	0.2833	170.00	167.64	165.28	162.92	160.56	158.19	155.83	153.47	151.11	148.75	146.39	144.03	1884.17
33	6	3.40	0.2833	141.67	139.31	136.94	134.58	132.22	129.86	127.50	125.14	122.78	120.42	118.06	115.69	1544.17
34	7	4.50	0.3750	150.00	146.88	143.75	140.63	137.50	134.38	131.25	128.13	125.00	121.88	118.75	115.63	1593.75
35	8	4.50	0.3750	112.50	109.38	106.25	103.13	100.00	96.88	93.75	90.63	87.50	84.38	81.25	78.13	1143.75
36	9	4.50	0.3750	75.00	71.88	68.75	65.63	62.50	59.38	56.25	53.13	50.00	46.88	43.75	40.63	693.75
37	10	4.50	0.3750	37.50	34.38	31.25	28.13	25.00	21.88	18.75	15.63	12.50	9.38	6.25	3.13	243.75
38															TTL	15160.42

13. Polynomifunktioita (12 p.)

Tutkitaan suljetulla välillä $-1 \leq x \leq 2$ määriteltyjä polynomifunktioita $p(x)$.

13.1. Anna esimerkki tällaisesta funktiosta, jonka ainoa maksimikohta on avoimella välillä $-1 < x < 2$. (6 p.)

13.2. Anna esimerkki tällaisesta funktiosta, joka saavuttaa suurimman arvonsa välin molemmissa päätepisteissä. (6 p.)

Lyhyt matematiikka k2019, tehtävä 13 | Uusi paperi

13.1. Esimerkiksi käy alaspäin avautuva paraabeli, jonka huippu osuu välille -1≤x≤2. Valitaan funktioksi

$$f(x) = -x^2$$

Koska f'(x)=-2x ja -2x=0 ainoastaan kohdassa x=0, ei funktiolla ole muita ehdokkaita ääriarvokohdaksi.

Koska f'(-0,5)=1 (positiivinen) ja f'(1)=-2 (negatiivinen), niin x=0 on maksimikohta ja kuuluu pyydetylle välille -1<x<2.

13.2. Esimerkiksi käy ylöspäin avautuva paraabeli y=g(x), missä

$$g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,\ a > 0$$

Tälle pitää päteä g(-1)=g(2). Huipun x-koordinaatti on annetun välin keskikohdassa x=0,5. Ratkaistaan funktion g(x) lauseke yhtälöryhmästä

$$g(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

done

$$\left\{\begin{array}{l} g(-1) = g(2) \\ \frac{d}{dx}(g(x)) = 0 \mid x = 0.5 \end{array}\right|_{a,b,c}$$

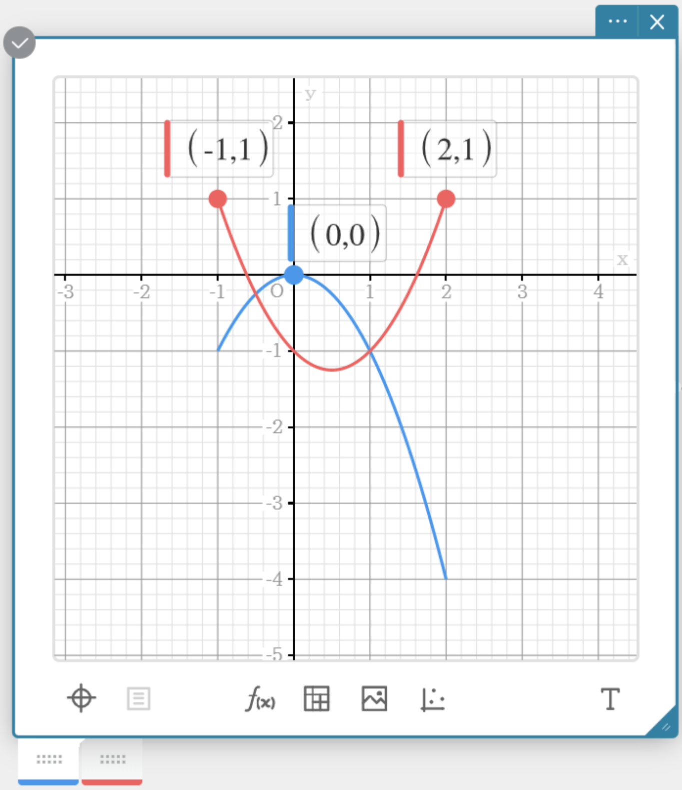
$$\{a=-b, b=b, c=c\}$$

Yhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan a=-b, b=b ja c=c. Siis kaikki luvut käyvät, kunhan a=-b ja a>0. Valitaan helpot b=c=-1, jolloin funktioksi saadaan

$$g(x) = x^2 - x - 1$$

Tämä toteuttaa annetut kriteerit, sillä sen kuvaaja on ylöspäin avautuva paraabeli ja huippu on derivaatan g'(x)=2x-1 ainoassa nollakohdassa x=0,5.

Nyt g(-1)=g(2)=1 on funktion suurin arvo välillä -1≤x≤2.



$$y = -x^2 \mid -1 \leq x \leq 2$$

$$y = x^2 - x - 1 \mid -1 \leq x \leq 2$$