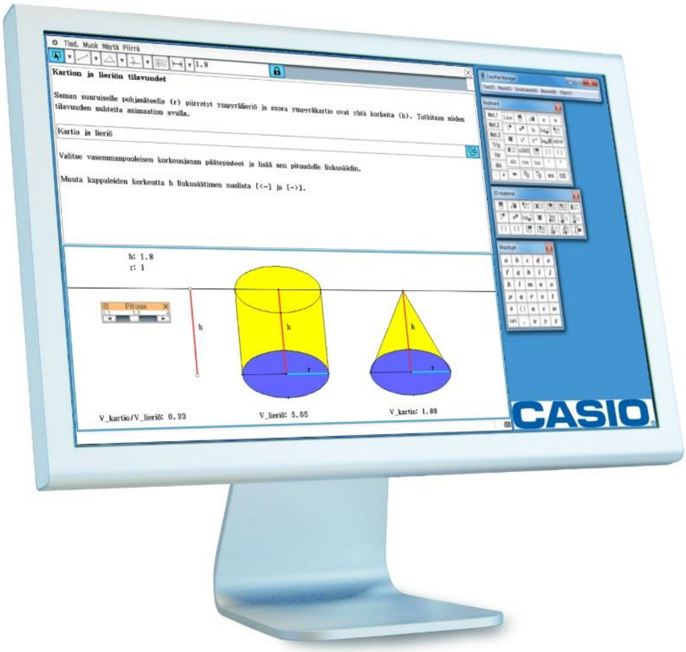
CASIO®

Laske Laudatur ClassPadilla



Tiivistelmä

Kevään 2020 sähköisten yo-kokeiden ratkaisut ClassPad Managerilla laskettuina. Laskujen tiedostot ovat ladattavissa Casion tukisivuilta osoitteesta https://www.casio-laskimet.fi

Pepe Palovaara

pepe.palovaara@casio.fi

Hyvä lukija,

Pitkän matematiikan kokeen A-osa koostui sekä yksinkertaisista peruslaskuista kuten yhtälöistä, epäyhtälöistä ja vektorien laskutoimituksista että vaativammista integraali- ja differentiaalilaskennan tehtävistä. B1-osa käsitteli lausekkeen minimointia, tangenttien muodostamista, todennäköisyyksiä ja geometriaa. Olipa mukana oman funktion muodostamista, kuten lyhyessäkin matematiikassa, ja jopa polynomien jakoalgoritmi!

B2-osassa oli lukujen tutkimista logaritmien avulla, todistuksia ja taulukkolaskennan soveltamista.

Päivitetty Casio Academy soittolista YouTubessa

Opiskelijoiden tueksi kehitetty Casio Academy auttaa harjoittelemaan kokeisiin ja kertaamaan lukion matematiikan kurssit. Soittolistalla on lähes 50 videota, joissa käydään perustellusti läpi esimerkkejä ja aimpia yo-koetehtäviä. Vastaukset on kirjoitettu reaaliajassa ClassPad Managerin eActivity-sovellukseen, josta tämänkin vihkosen vastaukset on ruudunkaappauksina poimittu.

Tiesitkö, että ClassPad Managerista saat ruudunkaappauksen suoraan funktionäppäimellä F8? eActivity-sovelluksessa lasku- ja tekstirivin välillä vaihda näppärästi Ctrl + m tai Cmd + m näppäinyhdistelmällä.

Katso videot osoitteessa https://bit.ly/casio-academy

ClassPad-perhe

ClassPad Manager on monen koulun käyttämä sähköisen opiskelun ja vastaamisen alusta. Sen sovellukset vastaavat hyvin lukion matematiikan kurssien sisältöjä. eActivity-sovelluksessa voit kerätä kaikkien sovelluste ominaisuudet yhteen sähköiseen vastaukseen avaamalla sovellukset omiksi laskuvöikseen.

ClassPad Managerin rinnalle kehitetään selaimessa toimivaa ClassPad.net -sovellusta. Voit tutustua ClassPad.netin toimintaan osoitteessa https://classpad.net > For Teachers / Students.

Espoossa 18.3.2020

Pepe Palovaara

Nordic School Coordinator
Casio Scandinavia

CASIO

A-osa

Vastaa neljään tehtävään.

1. Yhtälöt ja epäyhtälöt 12 p.

Tässä tehtävässä riittää pelkkä vastaus. Älä perustele tämän tehtävän vastauksia. Tässä tehtävässä ei voi käyttää kuvakaappauksia eikä kaavaeditoria. Kunkin vastauksen enimmäispituus on 30 merkkiä.

1.1. Ratkaise yhtälö $-4x+2=0$. **2 p.**

Vastaus: x=1/2

1.2. Ratkaise epäyhtälö $2x+4<-6$. **3 p.**

Vastaus: x<-5

1.3. Ratkaise yhtälö $x^6+x^3=0$. **3 p.**

Vastaus: x=0 tai x=-1

1.4. Mitkä luvut $x \in \mathbf{R}$ toteuttavat molemmat epäyhtälöt $-3x+6<0$ ja $x^2-9<0$? **4 p.**

Vastaus: 2<x<3

2. Vektorilaskuja 12 p.

Tutkitaan vektoreita $\overline{a} = 7\overline{i} + 2\overline{j}$ ja $\overline{b} = -3\overline{i} + 5\overline{j}$.
Älä perustele tämän tehtävän vastauksia. Tässä tehtävässä ei voi käyttää kuvakaappauksia eikä kaavaeditoria, joten $\overline{i}$ ja $\overline{j}$ kirjoitetaan muodossa i ja j. Kunkin vastauksen enimmäispituus on 30 merkkiä.

2.1. Laske $\overline{a} + \overline{b}$. 2 p.

$\overline{a} + \overline{b}$ = 4i+7j

2.2. Laske $\overline{b} - 2\overline{a}$. 2 p.

$\overline{b} - 2\overline{a}$ = -17i+j

2.3. Laske $|\overline{b}|^2$. 2 p.

$|\overline{b}|^2$ = 34

2.4. Laske vektorin $\overline{a} + \overline{b}$ pituus kahden desimaalin tarkkuudella. 2 p.

Vastaus: 8,06

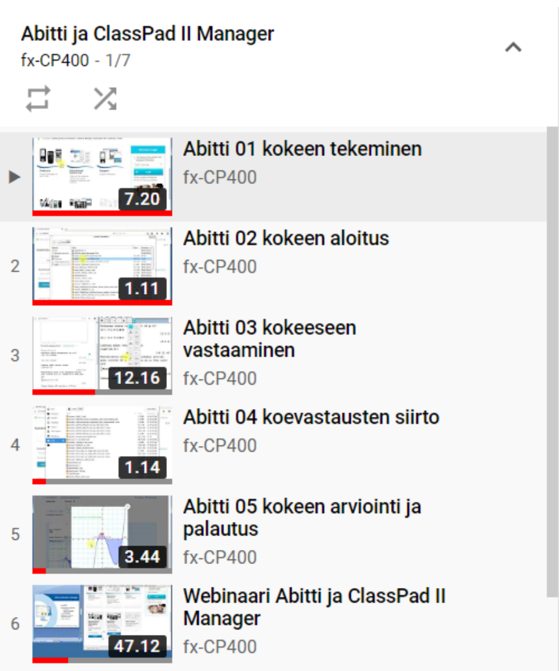
2.5. Laske $\overline{a} \cdot \overline{b}$. 2 p.

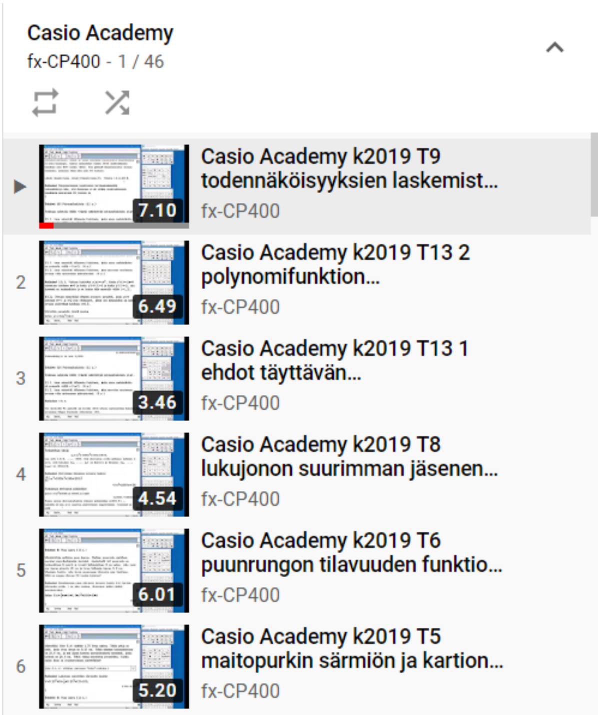
$\overline{a} \cdot \overline{b}$ = -11

2.6. Laske vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma asteen tarkkuudella. 2 p.

Vastaus: 105 astetta.

Apua ja tukea on mm. YouTube-kanavalla:





3. Pinta-alan ääriarvo (12 p.)

1. Laske integraali $\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx$. **(3 p.)**
2. Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ kuvaajan ja x-akselin rajoittamasta alueesta leikataan pystysuora kaistale suorilla $x = t$ ja $x = t + \frac{1}{2}$. Millä parametrin arvolla $0 \le t \le \frac{3}{2}$ kaistaleen pinta-ala on suurin mahdollinen? **(9 p.)**

1. $F(x) = \int \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$F(2)-F(0) = -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}*2\right)-\left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}*0\right)\right) = -\frac{2}{\pi}*(-1)-\left(-\frac{2}{\pi}*1\right) = \frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}$

2. Kohdan 1. nojalla $\int_t^{t+\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}*\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)-\left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}*t\right)\right)$

$= \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) := f(t)$

Tutkitaan funktion f(t) maksimiarvoa derivoimalla se.

$f'(t) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

Derivaatan nollakohdat saadaan yhtälön $-\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0$ ratkaisuna:

$\sin\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

$\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi t}{2}+n*2\pi$ tai $\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi t}{2}+n*2\pi$

ei ratkea $\quad \pi t=\frac{3\pi}{4}+n*2\pi$

$t=\frac{3}{4}+n*2$, missä $n\in Z$

Välille $0\le t\le\frac{3}{2}$ tulee vain yksi nollakohta $t=\frac{3}{4}$.

Koska $f'(0.1)\approx 0.65>0$ ja $f'(1)\approx -0.29<0$ on kyseessä maksimikohta.

Pinta-ala on suurin, kun $t=\frac{3}{4}$.

4. Suurin etäisyys 12 p.

Piste (x, y) toteuttaa epäyhtälön $x^4 + y^2 \leq 1$. Määritä pisteen (x, y) suurin mahdollinen etäisyys origosta.

Pisteen koordinaatit ovat muotoa $(x, \pm\sqrt{1-x^4})$. Tällaisen pisteen etäisyys origosta on $\sqrt{x^2+\left(\pm\sqrt{1-x^4}\right)^2} = \sqrt{x^2+1-x^4} := f(x)$. Koska neliöjuuri on aidosti kasvava funktio, on etäisyys suurin täsmälleen silloin kun juurrettava x^2+1-x^4 on suurin. Merkitään tätä funktiolla $g(x)$.

$g'(x) = 2x-4x^3 = 0 \Leftrightarrow x(2-4x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ tai $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Tehdään kulkukaavio funktiolle $g(x)$. Lasketaan derivaatan merkit nollakohtien ympäristössä:

$g'(-1) = 2 > 0$

$g'(-0.5) = -0.5 < 0$

$g'(0.5) = 0.5 > 0$

$g'(1) = -2 < 0$

Derivaatan merkit vaihtuvat $+ - + -$, joten mahdollinen suurin arvo saadaan kohdissa $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ tai $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Lasketaan suoraan funktion $f(x)$ arvot näissä pisteissä suurimman etäisyyden määrittämiseksi:

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4} = \sqrt{\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4} = \sqrt{\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Suurin etäisyys on $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

B1-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

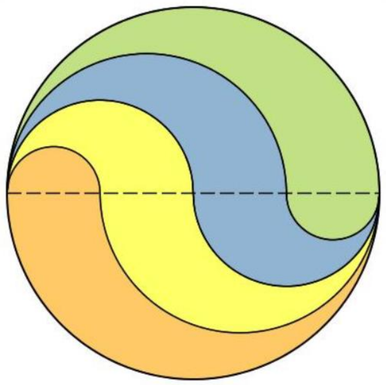
5. Kuvioita ympyrässä 12 p.

Aineisto

5. A Kuvio: Ympyrä

Ympyrän säde on 4. Sen sisälle piirretään kolme käyrää, jotka yhdistävät ympyrän vaakasuoran halkaisijan päätepisteet kuvion 5. A osoittamalla tavalla. Jokainen käyrä koostuu kahdesta puoliympyrän kaaresta, ja ne jakavat ympyrän vaakasuoran halkaisijan neljään yhtä suureen osaan. Yhdessä käyrät jakavat ympyrän neljään eriväriseen alueeseen. Osoita, että niillä kaikilla on sama pinta-ala.

5. A Kuvio: Ympyrä



Lähde: YTL.

Kuvio on symmetrinen (oranssi alue on sama kuin vihreä ja keltainen on sama kuin sininen). Koko ympyrän ala on 16π, joten jokaisen eri värisen alueen tulee olla 4π.

Oranssi alue saadaan vähentämällä 4-säteisen puoliympyrän alasta (puolet koko kuviosta) 3-säteisen puoliympyrän ala (tiukempi oranssi kaari) ja lisäämällä siihen 1-säteisen puoliympyrän ala (katkoviivan yläpuolelle jäävä oranssi alue):

$$8\pi-\frac{1}{2}\pi*3^2+\frac{1}{2}\pi*1^2 = 4\pi.$$

Keltainen alue saadaan vähentämällä 3-säteisen puoliympyrän alasta (suurimman keltaisen kaaren rajaama puoliympyrä) 2-säteisen puoliympyrän ala (katkoviivan alapuolella sinisen ja keltaisen rajaviiva) ja lisäämällä siihen katkoviivan yläpuoliset keltainen alue eli 2-säteisen puoliympyrän ala vähennettynä 1-säteisen puoliympyrän alalla:

$$\frac{1}{2}\pi*3^2-\frac{1}{2}\pi*2^2+\frac{1}{2}\pi*2^2-\frac{1}{2}\pi*1^2 = 4\pi.$$

Täten kaikkien eriväristen pinta-alojen rajaamat alueet ovat yhtäsuuret.

6. Paraabeli ja piste 12 p.

Tässä tehtävässä vastaukset voi antaa joko tarkkoina arvoina tai likiarvoina kahden desimaalin tarkkuudella.

Tarkastellaan paraabelia $y = x^2$ ja pistettä $A = (1, -1)$.

1. Mihin paraabelin pisteisiin piirretyt tangentit kulkevat pisteen A kautta? **(4 p.)**
2. Määritä pistettä A lähinnä oleva paraabelin piste ja sen etäisyys pisteestä A. **(8 p.)**

1. Paraabelin pisteet ovat muotoa (a, a^2). Koska $y' = 2x$, niin pisteen (a, a^2) kautta kulkevien tangenttien yhtälöt ovat muotoa $y-a^2 = 2a(x-a)$. Suoran on kuljettava myös pisteen $(1,-1)$ kautta, joten sen koordinaatit toteuttavat tangentin yhtälön:

$-1-a^2 = 2a(1-a) \Leftrightarrow -a^2+2a+1=0 \Leftrightarrow a = -\sqrt{2}+1$ tai $a = \sqrt{2}+1$.

y−koordinaatit ovat $-2\cdot\sqrt{2}+3$ ja $2\cdot\sqrt{2}+3$, vastaavasti.

Paraabelin pisteet ovat $(-\sqrt{2}+1, -2\cdot\sqrt{2}+3)$ ja $(\sqrt{2}+1, 2\cdot\sqrt{2}+3)$.

2. Paraabelin pisteen (a, a^2) ja pisteen $(1,-1)$ etäisyys on $\sqrt{(a-1)^2+\left(a^2+1\right)^2}$. Koska neliöjuuri on aidosti kasvava funktio, niin etäisyys on pienin täsmälleen silloin, kun juurrettava $(a-1)^2+\left(a^2+1\right)^2 := f(a)$ on pienin.

$$f'(a) = 4\cdot a^3+6\cdot a-2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\left((54\cdot\sqrt{3}+54)^{\frac{2}{3}}-18\right)\cdot(2\cdot(\sqrt{3}-1))^{\frac{1}{3}}}{36} = 0.312908...$$

Tutkitaan funktion kulkua kulkukaavion avulla:

$f'(0) = -2 < 0$

$f'(1) = 8 > 0$

Derivaatan merkit vaihtuvat − +, joten kyseessä on paikallinen minimikohta ja samalla koko funktion pienin arvo saadaan tässä pisteessä, jonka y−koordinaatti on $a^2 = 0.312908...^2 = 0.097911....$ Piste on siis kahden desimaalin tarkkuudella $(0.31;0.10)$.

Lyhin etäisyys saadaan sijoittamalla a:n arvo etäisyyden lausekkeeseen $\sqrt{(a-1)^2+\left(a^2+1\right)^2}$:

$$\sqrt{(0.312908...-1)^2+\left(0.312908...^2+1\right)^2} \approx 1.30.$$

7. Yatzy 12 p.

Yatzy-noppapelissä pelaaja heittää viittä noppaa. Tutkitaan tarkemmin heittoja, joiden tuloksena saadaan *täyskäsi* tai *neliluku* yhdellä viiden nopan heitolla. Täyskädellä tarkoitetaan tulosta, jossa yksi silmäluku esiintyy kolme kertaa ja joku toinen silmäluku kaksi kertaa. Neliluvussa esiintyy neljä samaa silmälukua ja yksi muu silmäluku.

1. Määritä todennäköisyys sille, että saadaan täyskäsi, jossa esiintyy kolme kuutosta ja kaksi viitosta. **(3 p.)**
2. Määritä todennäköisyys sille, että saadaan täyskäsi. **(6 p.)**
3. Määritä todennäköisyys sille, että saadaan neliluku. **(3 p.)**

1\. Viidestä nopasta kolme kuutosta ja kaksi viitosta voivat olla {6,6,6,5,5}, {6,6,5,6,5}, {6,5,6,6,5}, {5,6,6,6,5}, {5,6,6,5,6}, {5,6,5,6,6}, {5,5,6,6,6}, {6,6,5,5,6}, {6,5,5,6,6} tai {6,5,6,5,6} eli 10 eri osajoukossa. Kaikkiaan 5 nopasta saadaan 6^5 eri osajoukkoa, koska jokainen osajoukon alkio voidaan valita 6 eri tavalla. Kysytty todennäköisyys on siis $\frac{10}{6^5} = 0.001286... \approx 0.0013.$

2\. Kolme samaa voi olla joko {1,1,1}, {2,2,2}, ... tai {6,6,6} eli joukkoja on 6 erilaista. Kaksi samaa voi olla kaikkien muiden silmälukujen paitsi saatujen kolmen saman silmäluvun joukot, joita on 5 erilaista. Esim. jos kolmoset ovat {1,1,1}, niin pariksi käyvät {2,2}, {3,3}, {4,4}, {5,5} ja {6,6}. Näiden kombinaatioita on tuloperitaatteen nojalla 5*6 = 30 kpl. Koska jokainen kombinaatio voi tulla missä tahansa silmälukujen järjestyksessä, on eri vaihtoehtoja suotuisille osajoukoille kohdan 1. nojalla 10-kertainen määrä eli kaikkiaan 10*30 = 300 kpl. Kysytty todennäköisyys on $\frac{300}{6^5} = 0.0385802... \approx 0.039.$

3\. Vaihtoehtoja neljälle samalla silmäluvulle on 6 ja viidenneksi nopaksi käy mikä tahansa, paitsi em. nelikon silmäluku, eli yhteensä 5 vaihtoehtoa. Nelikolle on 5 eri mahdollisuutta osajoukkoina, esim. {1,1,1,1,2}, {1,1,1,2,1}, {1,1,2,1,1}, {1,2,1,1,1} ja {2,1,1,1,1}. Tuloperiaatteella suotuisia osajoukkoja on 5*6*5 = 150 kpl ja kysytty todennäköisyys on $\frac{150}{6^5} = 0.01929... \approx 0.019.$

8. Polynomien jakoalgoritmi 12 p.

Polynomien jakoalgoritmilla voi jakaa esimerkiksi polynomin

$$p(x) = x^6 - 4x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 3x + 4$$

polynomilla $q(x) = x^2 - 3x + 1$. Tässä on suoritettu jakoalgoritmin ensimmäiset vaiheet:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 q(x) + 3x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 3x + 4 \\ &= (x^4 + 3x^3)q(x) + 4x^4 - x^3 + 7x^2 - 3x + 4. \end{aligned}$$

Selitä sanallisesti, mitä tässä on tehty, ja suorita jakoalgoritmi välivaiheineen loppuun asti.

Jaetaan jaettavan eli polynomin p(x) korkeimman asteen termi jakajan eli polynomin q(x) korkeimman asteen termillä. Merkitään osamäärä talteen ja kerrotaan sillä koko jakaja q(x), joka vähennetään polynomista p(x) ja saadaan uusi erotus eli seuraavan kierroksen jaettava. Näin saadaan polynomi esitettyä muodossa
p(x) = osamäärä * q(x) + erotus.

Jatketaan soveltamalla samaa jakosääntöä erotuksena saatuun polynomiin ja toistetaan, kunnes erotuksena saadun polynomin asteluku on pienempi kuin jakajan asteluku. Osamäärän termien lukumäärä kasvaa ja erotuksen asteluku pienenee. Tässä koko algoritmi jakokulmassa

$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 11x + 36 \\
x^2-3x+1 \mid x^6+0x^5-4x^4+2x^3+7x^2-3x+4 \\
\qquad -(x^6-3x^5+x^4) \\
\qquad ---------- \\
\qquad\qquad 3x^5-5x^4+2x^3+7x^2-3x+4 \\
\qquad\quad -(3x^5-9x^4+3x^3) \\
\qquad\quad ----------- \\
\qquad\qquad\qquad 4x^4-x^3+7x^2-3x+4 \\
\qquad\qquad -(4x^4-12x^3+4x^2) \\
\qquad\qquad ------------ \\
\qquad\qquad\qquad\quad 11x^3+3x^2-3x+4 \\
\qquad\qquad\quad -(11x^3-33x^2+11x) \\
\qquad\qquad\quad ------------- \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 36x^2-14x+4 \\
\qquad\qquad\qquad -(36x^2-108x+36) \\
\qquad\qquad\qquad ----------- \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 94x-32
\end{array}$$

Jakokulman tulosta hyödyntämällä voidaan polynomi p(x) esittää halutussa muodossa

$$\begin{aligned}
p(x) &= x^6-4x^4+2x^3+7x^2-3x+4 \\
&= x^4q(x)+3x^5-5x^4+2x^3+7x^2-3x+4 \\
&= (x^4+3x^3)q(x)+4x^4-x^3+7x^2-3x+4 \\
&= (x^4+3x^3+4x^2)q(x)+11x^3+3x^2-3x+4 \\
&= (x^4+3x^3+4x^2+11x)q(x)+36x^2-14x+4 \\
&= (x^4+3x^3+4x^2+11x+36)q(x)+94x-32
\end{aligned}$$

Vinkki: ClassPadin komento propFrac antaa polynomien jakolaskun tuloksen:

$$\text{propFrac}\left(\frac{x^6-4x^4+2x^3+7x^2-3x+4}{x^2-3x+1}\right)$$

$$x^4+3\cdot x^3+4\cdot x^2+11\cdot x+\frac{94\cdot x}{x^2-3\cdot x+1}-\frac{32}{x^2-3\cdot x+1}+36$$

$$\text{combine}\left(\frac{94\cdot x}{x^2-3\cdot x+1}-\frac{32}{x^2-3\cdot x+1}\right)$$

$$\frac{94\cdot x-32}{x^2-3\cdot x+1}$$

$$x^4+3\cdot x^3+4\cdot x^2+11\cdot x+36+\frac{94\cdot x-32}{x^2-3\cdot x+1}$$

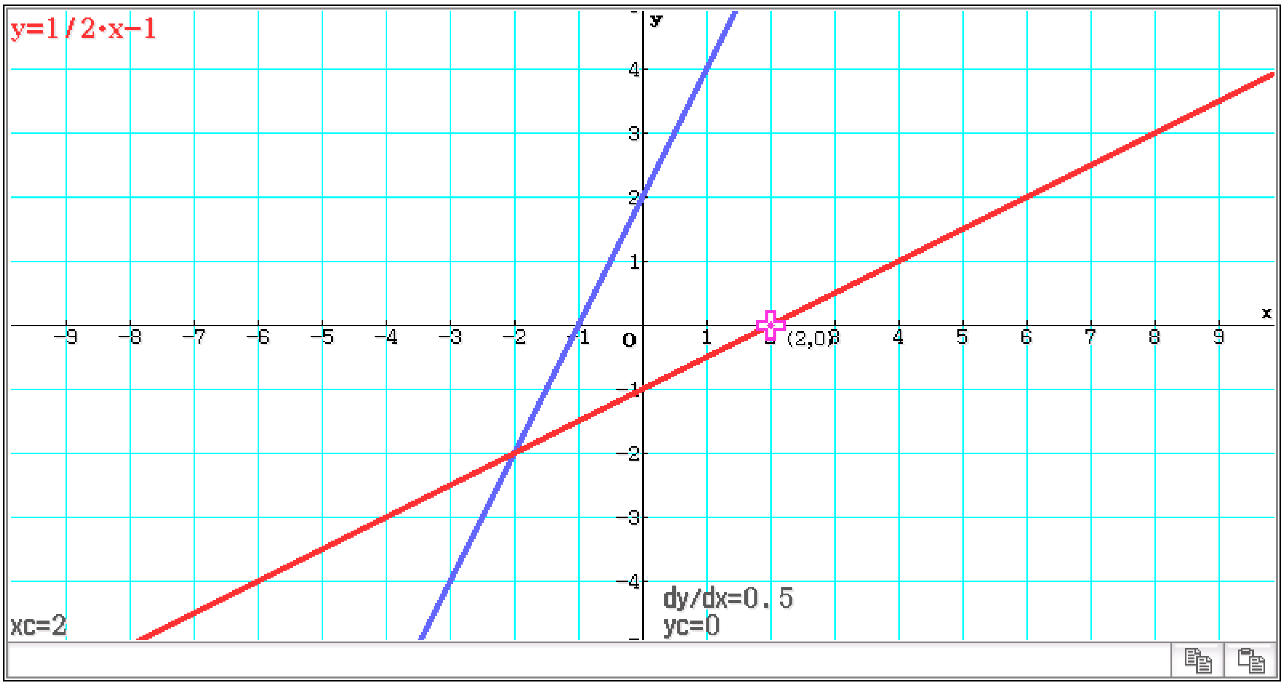
9. Käänteisfunktion derivaatta 12 p.

Anna esimerkki funktiosta f, jonka käänteisfunktion derivaatalle pätee $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{2}$. Muista perustella, miksi esimerkilläsi on vaadittu ominaisuus.

Valitaan käänteisfunktioksi suora, jonka kulmakerroin on $\frac{1}{2}$. Tällöin sen derivaatta on jokaisessa pisteessä $\frac{1}{2}$, erityisesti pisteessä $x = 2$. Esim. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 1$, jolloin $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{2}$ ja $f(x)$ saadaan ratkaistua yhtälöstä

$y = \frac{1}{2}x - 1 \Leftrightarrow x = 2y + 2 := f(y) \rightarrow f(x) = 2x + 2.$

Esimerkki ehdot täyttävästä funktiosta on $f(x) = 2x + 2$.



B2-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

10. Suuren luvun logaritmi 12 p.

Luvun $a = 1234\ldots 9101112\ldots 99100101\ldots 998999$ kymmenjärjestelmäesitys saadaan kirjoittamalla luvut $1, 2, 3, \ldots, 998$ ja 999 peräkkäin.

1. Millä kokonaisluvulla k pätee $a \approx 1{,}23 \cdot 10^k$? **(3 p.)**
2. Määritä luvun $\ln a$ kokonaisosa. **(9 p.)**

1. Luku a koostuu ensin kaikista yksinumeroisista luvuista, joita on 9 kpl. Niitä seuraa kaksinumeroiset luvut, joita on välillä 10–99 yhteensä 99–10+1 = 90 kpl, joten niissä on 2*90 = 180 numeroa. Näiden jälkeen on kolminumeroiset luvut, joita on välillä 100–999 yhteensä 999–100+1 = 900 kpl, joten niissä on 3*900 = 2700 numeroa. Koko luvussa a on siis 9+180+2700 = 2899 numeroa. Pilkkua pitää siirtää 2888 kertaa oikealle, joten k = 2888.

2. $a \approx 1.23*10^{2888}$, joten varmuudella

$1.23*10^{2888} < a < 1.24*10^{2888}$.

Ottamalla puolittain logaritmi saadaan

$\ln(1.23*10^{2888}) < \ln(a) < \ln(1.24*10^{2888})$,

sillä logaritmi on aidosti kasvava funktio ja säilyttää siten suuruusjärjestyksen. Käyttämällä logaritmin laskusääntöjä saadaan

$\ln(1.23)+\ln(10^{2888}) < \ln(a) < \ln(1.24)+\ln(10^{2888})$
$\ln(1.23)+2888\ln(10) < \ln(a) < \ln(1.24)+2888\ln(10)$
$6650.0727... < \ln(a) < 6650.080...$

Siis luvun ln(a) kokonaisosa on 6650.

11. Lukujono 12 p.

Olkoon $a_1 = \sqrt{2}$ ja $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, kun $n \geq 1$.

1. Osoita induktiolla, että jono (a_n) on kasvava. **(4 p.)**
2. Osoita induktiolla, että $a_n < 2$ kaikilla $n \geq 1$. **(4 p.)**
3. Määritä lausekkeen

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$$

arvo tulkitsemalla se jonon (a_n) raja-arvoksi. **(4 p.)**

Neliöjuurifunktio on aidosti kasvava, joten se säilyttää suuruusjärjestyksen. Laskuissa n on positiivinen kokonaisluku.

1.

alkuaskel (n=1): $a_2 = \sqrt{2+a_1} = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$ on tosi
induktio–oletus: pätee $a_n > a_{n-1}$, kun $n \geq 2$
induktioväite: pätee $a_{n+1} > a_n$, kun $n \geq 2$
induktiotodistus: $a_{n+1} = \sqrt{2+a_{n+1}}$ (kaavaan sijoittamalla) $> \sqrt{2+a_n}$ (induktio–oletuksen nojalla) $= a_n$
Induktioperiaatteen mukaan väite on tosi kaikille $n \geq 2$ ja lukujono on aidosti kasvava.

2.

alkuaskel (n=1): $a_1 = \sqrt{2} < 2$ on tosi
induktio–oletus: pätee $a_n < 2$, kun $n \geq 1$
induktioväite: pätee $a_{n+1} < 2$, kun $n \geq 1$
induktiotodistus: $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ (kaavaan sijoittamalla) $< \sqrt{2+2}$ (induktio–oletuksen nojalla) $= 2$
Induktioperiaatteen mukaan väite on tosi kaikille $n \geq 1$ ja lukujonon jäsenille pätee siis $a_n < 2$.

3. Edellä todistettiin, että lukujono a_n on aidosti kasvava ja ylhäältä rajoitettu, koska sen kaikille jäsenille pätee $a_n < 2$. Jos ylhäältä rajoitettu ja kasvava lukujono a_n suppenee kohti raja–arvoa $a > 0$, niin sen kaikki jäsenet (myös a_{n+1}) suppenevat kohti samaa raja–arvoa.

Täten $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \rightarrow a = \sqrt{2+a}$, kun $n \rightarrow \infty$. Puolet ovat positiiviset, joten yhtälö voidaan korottaa puolittain toiseen potenssiin ja saadaan $a^2 = 2+a$, jonka ratkaisut laskimella ovat $a = -1$ tai $a = 2$. Näistä vain positiivinen juuri käy. Siis $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}} = 2$.

12. Geometrisen keskiarvon todennäköisyyksiä 12 p.

Kahden positiivisen luvun a ja b *geometrinen keskiarvo* on $\sqrt{ab}$.

1. Anna esimerkki välin 2–100 kahdesta eri kokonaisluvusta a ja b, joille $\sqrt{ab}$ on kokonaisluku. **(3 p.)**
2. Satunnaislukugeneraattori arpoo toisistaan riippumatta kaksi kokonaislukua väliltä 1–100 niin, että jokaisen luvun todennäköisyys on $\frac{1}{100}$. Mikä on todennäköisyys sille, että arvottujen lukujen geometrinen keskiarvo on kokonaisluku? Voit laskea tapahtuman klassisen todennäköisyyden tarkasti tai esittää sille simulointiin perustuvan arvion. **(9 p.)**

1. Mitkä tahansa luvut käyvät, jos niiden tulo on neliöllinen luku. Esim. 36 on neliöllinen luku, joten a = 9 ja b = 4 käyvät. Nyt $\sqrt{ab} = \sqrt{9*4} = \sqrt{36} = 6$ on kokonaisluku.

2. vaatii taulukkolaskentaohjelma käyttöä. Tässä on Excelissä laadittu taulukko, jossa

- 1. välilehdellä on sarakkeet A ja B täytetty luvuilla 1-100
  - sarakkeisiin C-CX laskettu kaikki tulot
- 2. välilehdellä on laskettu 1. välilehden tulojen neliöjuuret komennolla ”=neliöjuuri”
- 3. välilehdellä on palautettu lukujen desimaaliosat komennolla ”=solu-kokonaisluku(solu)”
- 4. välilehdellä on merkitty ”1” ne luvut, joiden desimaaliosa on 0 eli kokonaisluvut juuren oton jälkeen, muut luvut on merkitty ”0”.
  - riville 101 laskettu niiden solujen määrä, joissa on arvo ”1”
  - soluun CW:101 laskettu yhteen rivin 101 luvut

Näin saadaan suotuisten alkeistapausten määräksi 310 ja kysytyksi todennäköisyydeksi 310/10000 = 0,0310

13. Trigonometrisiä epäyhtälöitä 12 p.

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan funktioita

$$f(x) = \sin(\tfrac{x}{n}) \quad \text{ja} \quad g(x) = n\cos x.$$

Osoita, että yhtälön $f(x) = g(x)$ ratkaisulle $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ pätee $g'(x_0) < -n + 1$.

$\sin\left(\frac{x_0}{n}\right) = n*\cos(x_0) = n*\sqrt{1-(\sin(x_0))^2}$ trigonometrian perusyhtälön nojalla. Koska tutkittavalla välillä $0 \leq x_0 \leq \frac{\pi}{2}$ sinifunktio on rajoitettu välille $0 \leq \sin(x_0) \leq 1$, n on positiivinen ja neliöjuuri on positiviinen, ovat yhtälön kummatkin puolet positiivisia.
Korottamalla yhtälö puolittain toiseen potenssiin saadaan

$$\left(\sin\left(\frac{x_0}{n}\right)\right)^2$$
$$= n^2\left(1-(\sin(x_0))^2\right)$$
$$= n^2-n^2(\sin(x_0))^2 \leq 1 \quad \text{(i)}$$

koska $0 \leq (\sin(x_0))^2 \leq 1$. Jaetaan epäyhtälö (i) puolittain positiivisella luvulla n^2

$$1-(\sin(x_0))^2 \leq \frac{1}{n^2}$$

$(\sin(x_0))^2 \geq 1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2}$. Otetaan epäyhtälöstä puolittain neliöjuuri, joka aidosti kasvavana funktiona säilyttää suuruusjärjestyksen:

$$\sin(x_0) \geq \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \geq \frac{\sqrt{n^2}-\sqrt{1}}{n} = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{(ii)}$$

Funktion $g(x_0)$ derivaatta

$g'(x_0) = -n*\sin(x_0)$ (sovelletaan kohtaa (ii)) $\geq -n*\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -n+1$ ja väite on todistettu.