

CASIO®

Laske Laudatur ClassPad.net



Tiivistelmä

Kevään 2020 sähköisten yo-kokeiden ratkaisut ClassPad.netillä laskettuina. Laskujen tiedostot ovat ladattavissa Casion tukisivuilta osoitteesta <https://www.casio-laskimet.fi>

Pepe Palovaara
pepe.palovaara@casio.fi

Hyvä lukija,

Liitemateriaalit ovat tulleet matematiikan kokeisiin jäädäkseen. Kuvia, tilastoja, verotietoja ja appletteja oli tässäkin lyhyen matematiikan kokeessa linkitettyinä. Samoin itsensä tarkastavat tehtävät A-osassa ottivat isomman roolin. Ne helpottavat tarkastajien työtaakkaa ja niillä on helppo mitata peruslaskutoimitusten osaaminen, joten ne ovat oikein tervetulleita juuri A-osaan. Haastetta kokeessa kuitenkin riitti ja polynomifunktion kulun arviointi näytteli keskeistä roolia yhdessä avointen perustelujen kanssa.

Päivitetty Casio Academy soittolista YouTubessa

Opiskelijoiden tueksi kehitetty Casio Academy auttaa harjoittelemaan kokeisiin ja kertaamaan lukion matematiikan kurssit. Soittolistalla on lähes 50 videota, joissa käydään perustellusti läpi esimerkkejä ja aimpia yo-koetehtäviä. Tämän vihkosen tehtävät on tehty uudella ClassPad.net -ohjelmalla.

Tiesitkö, että ClassPad.netissä voit jakaa helposti tiedostot eli ”paperit”? Klikkaamalla jakoasetuksia, voit luoda paperille URL-osoitteen ja kaikki linkin saaneet voivat tehdä itselleen kopion tai tutkia alkuperäistä ratkaisua. Jakaminen vaatii tilin luomisen, mutta sekin on ilmainen ja luodun tilin voi linkittää Microsoftin tai Googlen tiliin.

Katso videot osoitteessa <https://bit.ly/casio-academy>

ClassPad-perhe

ClassPad Manager on monen koulun käyttämä sähköisen opiskelun ja vastaamisen alusta. Sen sovellukset vastaavat hyvin lukion matematiikan kurssien sisältöjä. eActivity-sovelluksessa voit kerätä kaikkien sovelluste ominaisuudet yhteen sähköiseen vastaukseen avaamalla sovellukset omiksi laskuvöikseen.

ClassPad Managerin rinnalle kehitetään selaimessa toimivaa ClassPad.net -sovellusta. Voit tutustua ClassPad.netin toimintaan osoitteessa <https://classpad.net> > For Teachers / Students.

Espoossa 23.3.2020

Pepe Palovaara

Nordic School Coordinator
Casio Scandinavia

A-osa

 Vastaa neljään tehtävään.

1. Sievennys 12 p.

Poista sulut ja sievennä lausekkeet.

Älä perustele tämän tehtävän vastauksia. Tässä tehtävässä ei voi käyttää kuvakaappauksia eikä kaavaeditoria, joten toinen potenssi x^2 kirjoitetaan vastauslaatikkoon muodossa x^2 . Kunkin vastauksen maksimipituus on 30 merkkiä.

1.1. Poista sulut ja sievennä lauseke. 2 p.

$$5y - (3y - 1) = \boxed{2y+1}$$

1.2. Poista sulut ja sievennä lauseke. 2 p.

$$6(2x - 8) = \boxed{12x-48}$$

1.3. Poista sulut ja sievennä lauseke. 2 p.

$$(x + 4)(x - 4) = \boxed{x^2-16}$$

1.4. Poista sulut ja sievennä lauseke. 2 p.

$$(4x - 2)^2 = \boxed{16x^2-16x+4}$$

1.5. Poista sulut ja sievennä lauseke. 2 p.

$$\frac{9(xy)^2}{-3x} = \boxed{-3xy^2}$$

1.6. Poista sulut ja sievennä lauseke. 2 p.

$$2x(3x - y) - (2y + 2x)(x - 3y) = \boxed{4x^2+6y^2+2xy}$$

2. Murtoluvut 12 p.

Laske alla olevat murtolukulaskut kohdissa 2.1.–2.4. ja ratkaise yhtälö kohdassa 2.5.

Älä perustele tämän tehtävän vastauksia. Tässä tehtävässä ei voi käyttää kuvakaappauksia eikä kaavaeditoria, joten murtoluku $\frac{x}{y}$ kirjoitetaan muodossa x/y. Kunkin vastauksen maksimipituus on 10 merkkiä.

Vain tarkka arvo käy vastaukseksi.

2.1. Laske murtolukulasku. 2 p.

$$1\frac{7}{15} - \frac{9}{15} = \boxed{13/15}$$

2.2. Laske murtolukulasku. 2 p.

$$\frac{3}{7} + \frac{1}{3} = \boxed{16/21}$$

2.3. Laske murtolukulasku. 2 p.

$$\frac{1}{4} \cdot 3\frac{2}{7} = \boxed{23/28}$$

2.4. Laske murtolukulasku. 2 p.

$$\frac{3}{8} : \frac{6}{11} = \boxed{11/16}$$

2.5. Ratkaise yhtälö $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4} = \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}$. 4 p.

$$x = \boxed{-5/8}$$

CASIO ACADEMY



Casio Academyn videotallenteet löytyvät YouTubesta. Niissä selitetään ja lasketaan lukion lyhyen ja pitkän matematiikan tehtäviä ja aiempien yökokeiden ratkaisuja.

Casio Academy

Katso esimerkkejä ja yo-tehtävien ratkaisuja kätevästi videoiden avulla. Helppo tapa kerrata lukion matematiikkaa!

Katso videot osoitteesta

<https://bit.ly/casio-academy>

Siiry videoihin ➔

3. Mallien luokittelu 12 p.

Alla on esitetty kuusi mallia. Merkitse kunkin lausekkeen osalta, kuvaako se suoraan verrannollista tai kääntäen verrannollista riippuvuutta. Valitse lisäksi, onko kyseessä polynominen tai eksponentiaalinen malli. Oikea vastaus 1 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

Vastauksia ei tarvitse perustella.

Lauseke	Riippuvuus	Mallin tyyppi
$\frac{3}{y}$	kääntäen verrannollinen 1p.	ei kumpikaan 1p.
$2^{x-0,6}$	ei kumpikaan 1p.	eksponentiaalinen 1p.
$\frac{4t-2}{3}$	ei kumpikaan 1p.	polynominen 1p.
$x^2 + 3x - 1$	ei kumpikaan 1p.	polynominen 1p.
$7t + 3t$	suoraan verrannollinen 1p.	polynominen 1p.
$\frac{4x+2}{2x^2+x}$	kääntäen verrannollinen 1p.	ei kumpikaan 1p.



4. Nations League 12 p.

Nations League -jalkapalloturnaus järjestettiin ensimmäisen kerran vuonna 2018. Turnauksessa pelataan seuraavien sääntöjen mukaan:

- Joukkueet on jaettu neljään liigaan: A, B, C ja D.
- Molemmissa liigoissa A ja B on 12 joukkuetta, jotka on jaettu neljään kolmen joukkueen lohkokoon.
- Molemmissa liigoissa C ja D on 15 joukkuetta, jotka on jaettu yhteen kolmen joukkueen ja kolmeen neljän joukkueen lohkokoon.
- Jokaisessa lohossa kukin joukkue pelaa lohkon kaikkia muita joukkueita vastaan kaksi kertaa: yhden kotipelin ja yhden vieraspelin.
- Liigan A neljä lohkovoittajaa pelaavat lopputurnauksen, jossa on kaksi välieräottelua, yksi pronssiottelu sekä loppuottelu.

Kuinka monta ottelua pelataan yhdessä Nations League -turnauksessa?

Kolmen joukkueen lohokosta saadaan $\frac{3!}{(3-2)!2!} = 3$ otteluparia, jotka pelaavat kaksinkertaisen sarjan eli 6 ottelua. A ja B liigoissa tulee siis $8 \cdot 6 = 48$ ottelua.

Neljän joukkueen lohokosta saadaan $\frac{4!}{(4-2)!2!} = 6$ otteluparia, jotka pelaavat kaksinkertaisen sarjan eli 12 ottelua. C ja D liigoissa tulee siis $6 \cdot 12 + 2 \cdot 6 = 84$ ottelua.

Kun näihin lisätään lopputurnauksen pelit, saadaan ottelumääräksi $48 + 84 + 4 = 136$.

B1-osa

 Vastaa kolmeen tehtävään.

5. Times Square 12 p.

Aineisto

5. A Teksti: Times Square

Arvioi tekstin 5. A tietojen perusteella, kuinka monta ihmistä pitäisi olla neliömetrillä, jos juhlijoita todellakin olisi kaksi miljoonaa. Laske, kuinka monta neliösenttimetriä maata kullakin kahdella miljoonalla ihmisellä olisi keskimäärin jalkojensa alla, jos juhlijoita olisi kaksi miljoonaa. Arvioi myös, onko tämä enemmän vai vähemmän kuin aikuisen ihmisen jalkapohjien pinta-ala.

5. A Teksti: Times Square

Usein kaupungin viranomaiset laskevat, että jopa kaksi miljoonaa ihmistä kokoontuu laskemaan vuoden viimeiset sekunnit loppuun One Times Square -rakennuksen katolta laskeutuvan Waterford Crystal -pallon tahdissa. Mutta mahtuuko Times Squarelle todellakin kaksi miljoonaa ihmistä? – Times Squaren mittaaminen kartalla ja muutamat laskelmat osoittavat, että aukiolle mahtuisi 51 000 juhlijaa, jos kolme ihmistä laitettaisiin neliömetrille.

Lähde: *Kaksi miljoonaa ihmistä pakkautuu juhlimaan taas uutta vuotta New Yorkin Times Squarelle? Pötypuhetta, sanoo asiantuntija.* Yle Uutiset. <https://yle.fi/uutiset/3-10575450>. Viitattu 11.1.2019.

Väkimäärä kasvaisi $\frac{2000000}{51000} \approx 39.21568627$ –kertaiseksi, joten yhtä neliometriä kohti olevien ihmisten määrä olisi $3 \cdot 39.21 \dots \approx 118$. Tällöin jokaisella olisi käytössä $10000 \div 118 \approx 85 \text{ cm}^2$. Oma jalkapohjani on n. $25 \cdot 10 = 250 \text{ cm}^2$, kenkien kanssa enemmän, joten pelkkä kenkien vaatima pinta-ala olisi yli 500 cm^2 . Käytössä oleva ala olisi aivan liian vähän 2 miljoonalle ihmiselle, vaikka kyseessä olisi päiväkotii-ikäiset lapset.

6. Lapsiperhetilastoja 12 p.

Aineisto

6. A Taulukko: Lapsiperheet

Taulukossa 6. A on esitetty lapsiperheiden lasten lukumäärä Suomessa vuoden 2017 lopussa.

1. Laske lapsiperheiden lasten lukumäärän moodi, mediaani ja keskiarvo. (6 p.)
2. Mikä on suomalaisen lapsiperheen lapsen sisarusten lukumäärän keskiarvo? (6 p.)

6. A Taulukko: Lapsiperheet

Alle 18-vuotiaiden lasten lukumäärä	Perheiden lukumäärä
1	241709
2	220116
3	75326
4	18409
5	5493
6	2289
7	1235
8	751
9	476
10	262
11	117
12	41
13	12
14	3
15	-
16	3

Lähde: Tilastokeskus. https://www.stat.fi/til/perh/2017/02/perh_2017_02_2018-12-05_tau_011_fi.html. Julkaistu 31.12.20

Tilastolaskenta	
Yksi muuttuja	
$\bar{x}$	=1.8478601
Σx	=1046336
Σx^2	=2311160
σ_x	=1.0100472
s_x	=1.0100481
n	=566242
minX	=1
Q_1	=1
Med	=2
Q_3	=2
maxX	=16
Mode	=1
ModeN	=1
ModeF	=241709

Tilastolaskenta	
Yksi muuttuja	
minX	=1
Q_1	=1
Med	=2
Q_3	=2
maxX	=16
Mode	=1
ModeN	=1
ModeF	=241709

Tilastolaskenta	
Yksi muuttuja sisarukset	
$\bar{x}$	=1.3999557
Σx	=1464824
Σx^2	=4110260
σ_x	=1.4029844
s_x	=1.4029851
n	=1046336
minX	=0
Q_1	=1
Med	=1
Q_3	=1
maxX	=16

1. Käytetään ClassPadin tilastosovellusta ja syötetään siihen tilastoaineisto lasten lukumäärän ja frekvenssien osalta. Tilastolliset tunnusluvut saadaan valikosta Laske > Yksi muuttuja, josta moodi (suurin frekvenssi) = 1, mediaani (järjestetyn aineiston puoliväli) = 2 ja keskiarvo (lasten lkm / lapsiperheiden lkm) ≈ 1.85 lasta.

2. Sisaruksia on yksi vähemmän kuin lapsia kussakin perheessä. Muokataan annettua dataa niin, että lasten lukumäärää vähennetään yhdellä joka kategoriassa. Sisarusten kokonaismääräksi saadaan tilastosovelluksessa 480094.

Lasketaan keskiarvo jakamalla sisarusten lukumäärä lasten lukumäärällä:

$$\frac{1464824}{1046336} \approx 1.40 \text{ sisarusta/lapsi.}$$

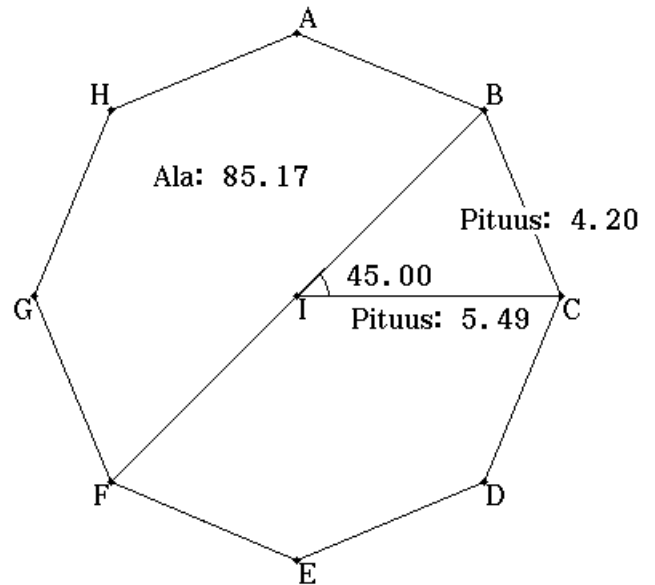
7. Suklaarasia 12 p.

Aineisto

7. A Kuva: Suklaarasia

Suklaakonvehtirasia 7. A on muodoltaan särmiö, jonka pohja on säännöllinen kahdeksankulmio. Kahdeksankulmion sivun pituus on 4,2 cm ja rasian korkeus 6,6 cm. Laske rasian tilavuus.

7. A Kuva: Suklaarasia



Lähde: <http://images.sweetauthoring.com/product/38974.png>. Viitattu 6.6.2019.

Kun pohjan keskipiste yhdistetään sen kulmiin, saadaan 8 yhtenevää tasakylkistä kolmiota. Niiden jokaisen huippukulma on $360^\circ \div 8 = 45^\circ$, jolloin kantakulmien suuruudet ovat $(180^\circ - 45^\circ) \div 2 = 67.5^\circ$.

Tasakylkisen kolmion kyljen pituus x saadaan esim. sinilauseen avulla yhtälön

$$\frac{4.2}{\sin(45^\circ)} = \frac{x}{\sin(67.5^\circ)} \text{ ratkaisuna } x = \frac{21 \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 2)}{10} \approx 5.49 \text{ cm. Tällöin}$$

suklaarasian tilavuus on $8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4.2 \cdot \frac{21 \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 2)}{10} \cdot \sin(67.5^\circ) \cdot 6.6 \approx 560 \text{ cm}^3$.

8. Funktion väheneminen 12 p.

Selvitä derivaatan avulla, missä välin $-1 \leq x \leq 3$ kohdassa funktio $f(x) = 2x^2 - x + 5$ vähenee nopeimmin.

Funktio vähenee nopeimmin siinä pistessä $-1 \leq x \leq 3$, jossa funktion derivaatan arvo on pienin. Derivaatan pienin arvo saadaan tutkimalla sitä uudelleen derivaatan avulla ja etsimällä sille paikallinen minimikohta. Alkuperäinen funktio pitää siis derivoida kahdesti ja tutkia näin saatua 2. kertaluvun derivaattaa.

$$f(x) = 2x^2 - x + 5$$

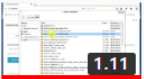
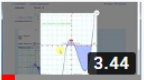
$$f'(x) = 4x - 1$$

$$f''(x) = 4$$

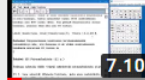
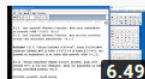
Koska $f''(x)$ on positiivinen, niin $f'(x)$ on aidosti kasvava funktio. $f'(x)$ saa pienimmän arvonsa välin pienemmässä päätepisteessä. Funktio $f(x)$ vähenee nopeimmin kohdassa $x = -1$.

Apua ja tukea on mm. YouTube-kanavalla:

Abitti ja ClassPad II Manager
fx-CP400 - 1/7

-  Abitti 01 kokeen tekeminen
fx-CP400
7.20
-  Abitti 02 kokeen aloitus
fx-CP400
1.11
-  Abitti 03 kokeeseen vastaaminen
fx-CP400
12.16
-  Abitti 04 koevastausten siirto
fx-CP400
1.14
-  Abitti 05 kokeen arviointi ja palautus
fx-CP400
3.44
-  Webinaari Abitti ja ClassPad II Manager
fx-CP400
47.12

Casio Academy
fx-CP400 - 1 / 46

-  Casio Academy k2019 T9 todennäköisyyksien laskemist...
fx-CP400
7.10
-  Casio Academy k2019 T13 2 polynomifunktion...
fx-CP400
6.49
-  Casio Academy k2019 T13 1 ehdot täyttävän...
fx-CP400
3.46
-  Casio Academy k2019 T8 lukujonon suurimman jäsenen...
fx-CP400
4.54
-  Casio Academy k2019 T6 puunrunon tilavuuden funktio...
fx-CP400
6.01
-  Casio Academy k2019 T5 maitopurkin särmiön ja karttion...
fx-CP400
5.20

9. Jaksollisuus / Nopan heitto 12 p.

Jos valitset tämän tehtävän, ratkaise joko 1. Jaksollisuus TAI 2. Nopan heitto. Voit valita kumman tahansa tehtävän riippumatta siitä, minkä opetussuunnitelman mukaisesti olet opiskellut.

1. Jaksollisuus (Vanha opetussuunnitelma, ennen 1.8.2016 lukion aloittaneet) (12 p.)

Kummalla funktiolla on lyhyempi jakso: $f(t) = \sin(3t)$ vai $g(t) = \cos^2(2t)$? Perustele väitteesi.

2. Nopan heitto (Uusi opetussuunnitelma, 1.8.2016 tai sen jälkeen lukion aloittaneet) (12 p.)

Noppaa heitetään 10 kertaa. Mikä on todennäköisyys, että saadaan täsmälleen 2 kuutosta?

Kirjoita tähän vastauskenttään joko tehtävän 1. Jaksollisuus TAI tehtävän 2. Nopan heitto ratkaisu.

1. Sini ja kosini ovat molemmat jaksollisia funktioita jaksona 2π . Kulman kertominen luvulla k jakaa jakson luvulla k . Funktion $f(t) = \sin(3t)$ jakso on siis $\frac{2\pi}{3}$. Funktio $g(t) = \cos^2(2t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(4t))$, joten sen jakso on $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Funktion $g(t)$ jakso on lyhyempi.

2. Nopan heitot ovat toisistaan riippumattomia tapahtumia, joten laskussa voidaan hyödyntää binomitodennäköisyyttä. Yhden silmäluvun todennäköisyys yhdellä heitolla on $\frac{1}{6}$. $P(\text{"10 heitosta täsmälleen 2 on kuutosta"}) = nCr(10, 2) * \left(\frac{1}{6}\right)^2 * \left(1 - \frac{1}{6}\right)^8 = \frac{1953125}{6718464} \approx 29\%$.



B2-osa

 Vastaa kolmeen tehtävään.

10. Neuleyritys (12 p.)

Aineisto

10. A Taulukko: Yrityksen kulut

10. B Teksti: Miten arvonlisäveron määrä lasketaan?

10. A Taulukko: Yrityksen kulut

Kululaji	Kulut €/kk
Palkat	3 900
Eläkemaksut	735
Työttömyyskassamaksut	40
Vuokra	370
Sähkö ja vesi	60
WiFi	20
Vakuutukset	50
Neulekoneet	20
Langat	400
Muut tarvikkeet	30

Lähde: YTL.

Naapurukset Pauli ja Johanna päättävät perustaa lasten neuleita valmistavan yrityksen.

- Yritys myy neuleita 70 euron kappalehinnalla. Kuinka monta tilausta tarvitaan kuukaudessa, jotta tulot kattavat taulukossa 10. A luetellut kulut? (4 p.)
- Pauli ja Johanna miettivät, että yrityksen olisi hyvä tehdä voittoa, ja tuumaavat, että tähän voisi päästä, jos kuukausittain valmistetaan ja myydään 100 neuletta. Riittävätkö kuukauden tarpeisiin varatut langat tähän, kun merinovillalanka maksaa 39 euroa kilolta ja yhteen neulepaitaan tarvitaan 250 grammaa lankaa? (4 p.)
- Aloittelevina yrittäjinä Paulilta ja Johannalta on jäänyt laskuissaan arvonlisävero sekä lomat huomioimatta. Kerro, miten näiden seikkojen ottaminen huomioon vaikuttaa siihen, kuinka paljon myyntituloja yritys tarvitsee ollakseen kannattava. Tietoa arvonlisäveron laskemisesta löytyy tekstistä 10. B. (4 p.)

1. Jaetaan kulut neuleen hinnalla, jolloin saadaan tarvittavien neuleiden määrä.

$$\frac{3900+735+40+370+60+20+50+20+400+30}{70} \approx 80.4$$
 neuletta. On siis myytävä vähintään 81 neuletta kulujen kattamiseksi.

2. 100 neuleeseen tarvitaan 25kg lankaa, mikä maksaa $25 \cdot 39 = 975$ euroa. Lankoihin oli varattu 400 euroa, joten ne eivät riitä.

3. Kun jompikumpi yrittäjistä on lomalla, joutuu toinen tekemään enemmän töitä tuotannon tason säilyttämiseksi. Mikäli tämä ei ole mahdollista, niin yrityksen tulot putoavat lomakuukausien ajalta. Lomat kannattaa pitää eri aikaan, jolloin toinen voi toimia myyntityössä. Tällöin varastossa on tietenkin oltava riittävästi myytävää.

Yrityksen arvonlisäveron huomiotta jättäminen tarkoittaa sitä, että he joutuvat lisäämään 24% tuotteidensa hintoihin, jolloin neuleen myyntihinnaksi tulisi n. 87 euroa. Tämä voi karsia ostajia. Vaihtoehtoisesti heidän pitää tehdä tuotteensa halvemmalla tai lisättävä myytävien tuotteiden määrää. Tämä kaikki voi tarkoittaa myös yrityksestä nostettavien palkkojen laskemista.

11. Nelitahokas 12 p.

Aineisto

11. A GeoGebra-tiedosto: Nelitahokas

Nelitahokkaassa $ABCD$ on $AB = AC = BC = AD = BD = 1$. Mikä on nelitahokkaan suurin mahdollinen tilavuus?

Voit käyttää GeoGebra-tiedostoa 11. A tehtävän tilanteen hahmottamiseksi, mutta tämä ei ole välttämätöntä ratkaisun kannalta. Muista myös, että pelkät kokeilut eivät riitä matemaattisen väitteen perusteluksi.

Tilavuus on 3.72

$$AB = 3.79$$

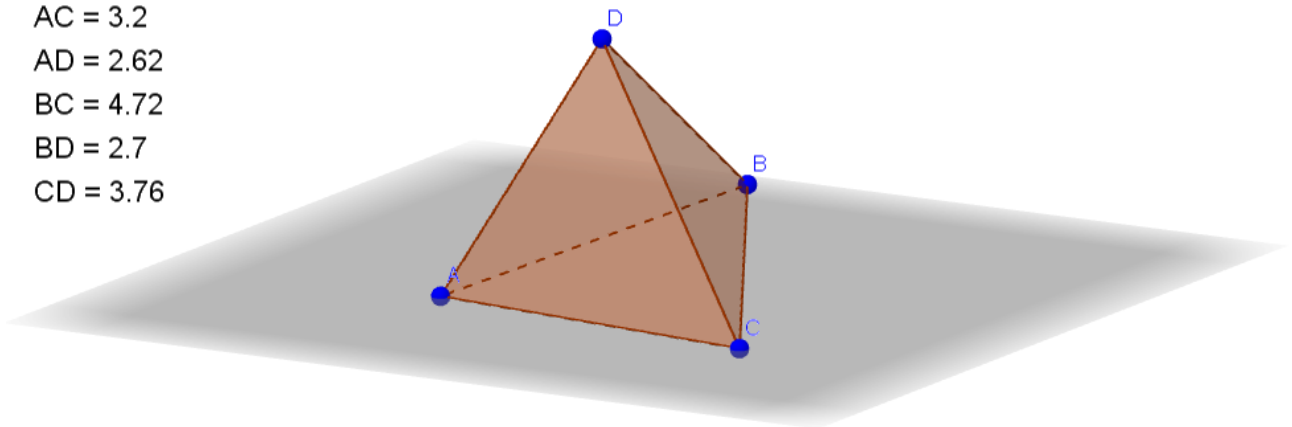
$$AC = 3.2$$

$$AD = 2.62$$

$$BC = 4.72$$

$$BD = 2.7$$

$$CD = 3.76$$



Nelitahokkaan tilavuus lasketaan $\frac{1}{3} \cdot \text{pohjan ala} \cdot \text{korkeus}$. Pohjan ala on $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (MAOL), joten suurin tilavuus saadaan, kun pohjalta ABC kärkeen D piirretty korkeus on suurin.

Ainoa mitta, jota voidaan säätää, on sivu CD. Säädetään sivua CD niin, että piste D on kohtisuoraan janan AB keskipisteen E yläpuolella.

Nelitahokkaan korkeus on suorakulmaisen kolmion AED sivun ED pituutena

$\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Pythagoras). Nelitahokkaan tilavuus on tällöin $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{8}$ tilavuusyksikköä.

12. Toisen asteen polynomi 12 p.

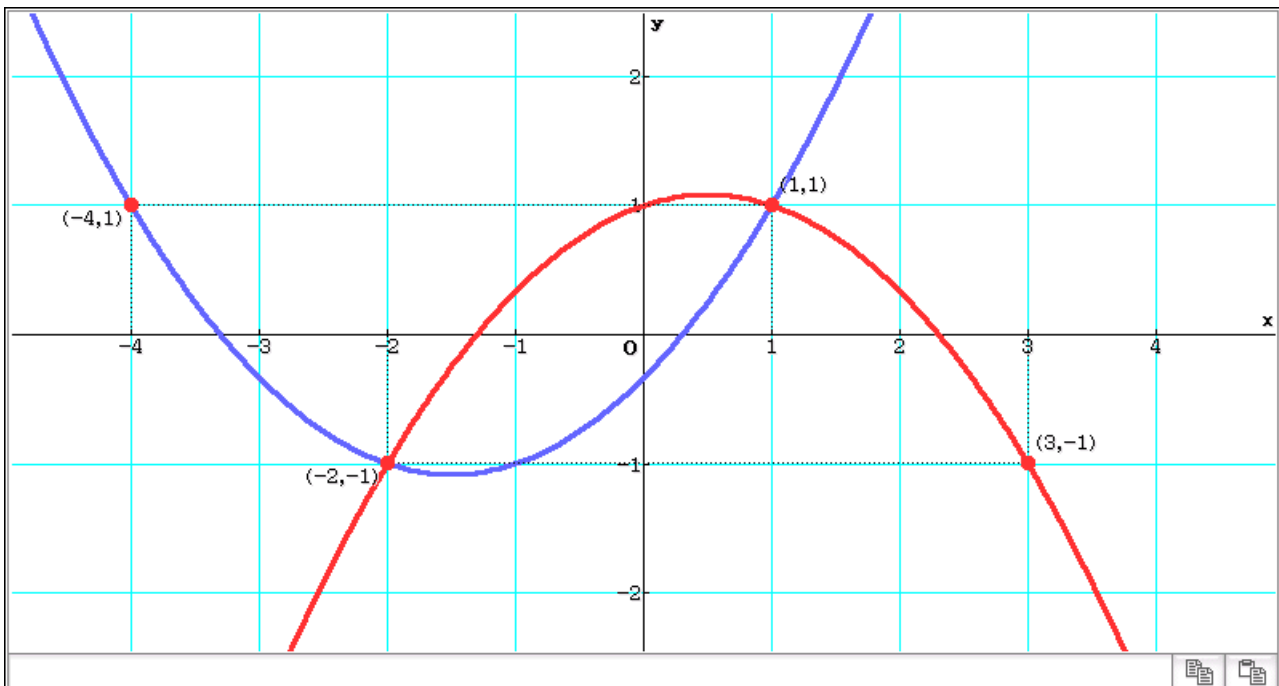
Tutkitaan toisen asteen polynomia $p(x)$. Polynomista tiedetään vain, että sen arvo kohdassa $x = -2$ on negatiivinen ja että sen arvo kohdassa $x = 1$ on positiivinen. Voiko näiden tietojen perusteella selvittää termin x^2 kertoimen etumerkin tai yhtälön $p(x) = 0$ ratkaisujen lukumäärän?

Termin x^2 kertoimen etumerkkiä ei voida selvittää, sillä paraabeli voi aueta joko ylös- tai alaspäin.

Esimerkit voidaan laskea ottamalla kolmanneksi tunnetuksi pisteeksi ensin lukua -2 pienempi x :n arvo ja määräämällä polynomin arvo positiiviseksi. Esim. pisteiden $(-4, 1)$, $(-2, -1)$ ja $(1, 1)$ kautta voidaan sovittamalla 2. asteen regressio saada $p(x) = \frac{1}{3}x^2 + x - \frac{1}{3}$. Paraabeli aukeaa ylöspäin.

Otetaan seuraavaksi lukua 1 suurempi x :n arvo ja määritetään polynomin arvo negatiiviseksi. Esim. pisteiden $(-2, -1)$, $(1, 1)$ ja $(3, -1)$ kautta kulkee polynomi $p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 1$. Paraabeli aukeaa alaspäin.

Sen sijaan nollakohtien lukumäärän on oltava 2, koska paraabeli lähestyy joko ∞ (ylöspäin avautuva paraabeli) tai $-\infty$ (alaspäin avautuva paraabeli) x :n pienentyessä tai suurentuessa rajatta, jolloin sen on leikattava x -akseli kahdessa pisteessä, mikäli se saa erimerkkiset arvot kuten tehtävässä on oletettu.



13. Meerin virheet 12 p.

Meeri on ratkaissut seuraavan tehtävän: Määritä funktion $2x^3 - 7x^2 + 5x$ suurin arvo, kun $-1 \leq x \leq 3$. Hänen ratkaisunsa on seuraava:

Suurin arvo eli maksimi löydetään derivaatan avulla, ts. $6x^2 - 14x + 5 = 0$. Ratkaisukaavalla saadaan $x = \frac{7 \pm \sqrt{16}}{6}$ eli $x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ tai $x = \frac{11}{6}$. Merkkikaavion avulla nähdään, että ensimmäinen näistä on maksimikohta, joten funktion suurin arvo on $6 \cdot (\frac{1}{2})^2 - 14 \cdot \frac{1}{2} + 5 = -\frac{1}{2}$.

Selitä, mitä virheitä Meerin ratkaisussa on. Esitä myös korjattu versio ratkaisusta.

1. virhe: Funktio on jatkuva suljetulla välillä, joten se saa maksimiarvonsa joko välin päätepisteessä -1 tai 3 tai välille $-1 < x < 3$ kuuluvissa derivaatan nollakohdissa.

2. virhe: Derivaattafunktion nollakohdat ovat $x = \frac{-\sqrt{19}}{6} + \frac{7}{6}$ tai $x = \frac{\sqrt{19}}{6} + \frac{7}{6}$.

Molemmat nollakohdat kuuluvat määrittelyvälille $-1 \leq x \leq 3$.

3. virhe: Tämä on pikemminkin puute. Merkkikaavio, johon Meeri viittaa, puuttuu.

4. virhe: Derivaattafunktion kuvaaja on 2. asteen polynomi, jonka 2. asteen termin kerroin on 6. Sen kuvaaja on siis ylöspäin avautuva paraabeli ja merkit vaihtuvat järjestyksessä $+$ $-$ $+$. Ensimmäinen nollakohdista on siis paikallinen maksimikohta, kuten Meeri totesikin.

5. virhe: Funktion suurin arvo on laskettu väärää funktiota käyttäen. Meerin pitää sijoittaa paikallinen maksimikohta funktion, ei derivaattafunktion, lausekkeeseen.

6. virhe: Saatu suurin arvo on väärä. Tutkimalla oikeaa paikallista maksimikohtaa ja laskemalla funktion arvo päätepisteissä, saadaan suurimman arvon ehdokkaiksi

$$f\left(\frac{-\sqrt{19}}{6} + \frac{7}{6}\right) = \frac{19 \cdot \sqrt{19}}{54} - \frac{14}{27} \approx 1$$

$$f(-1) = -14$$

$$f(3) = 6,$$

joista 6 on suurin.