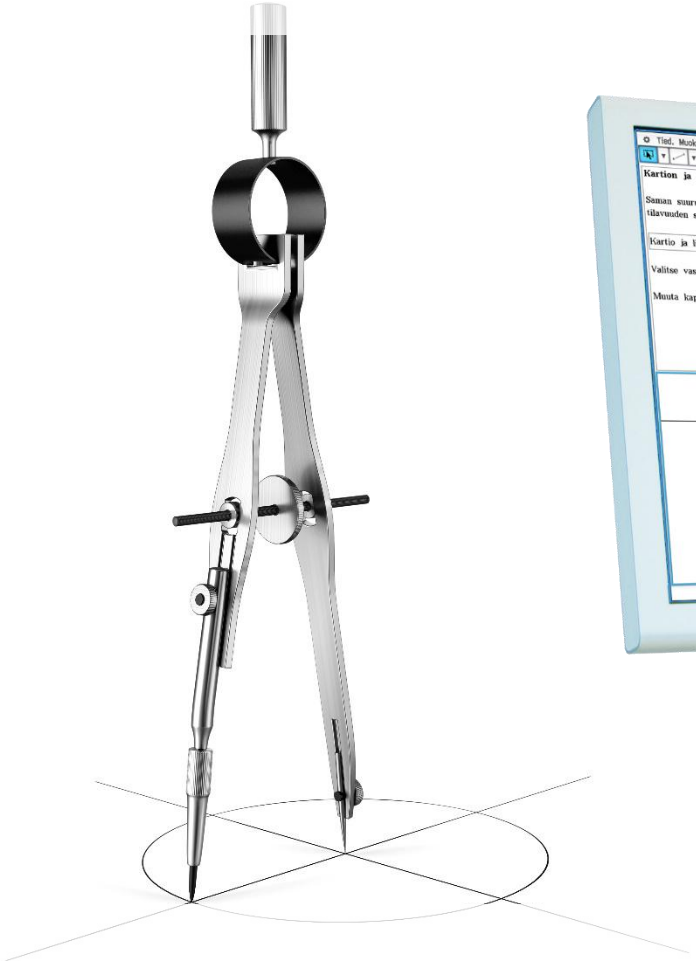
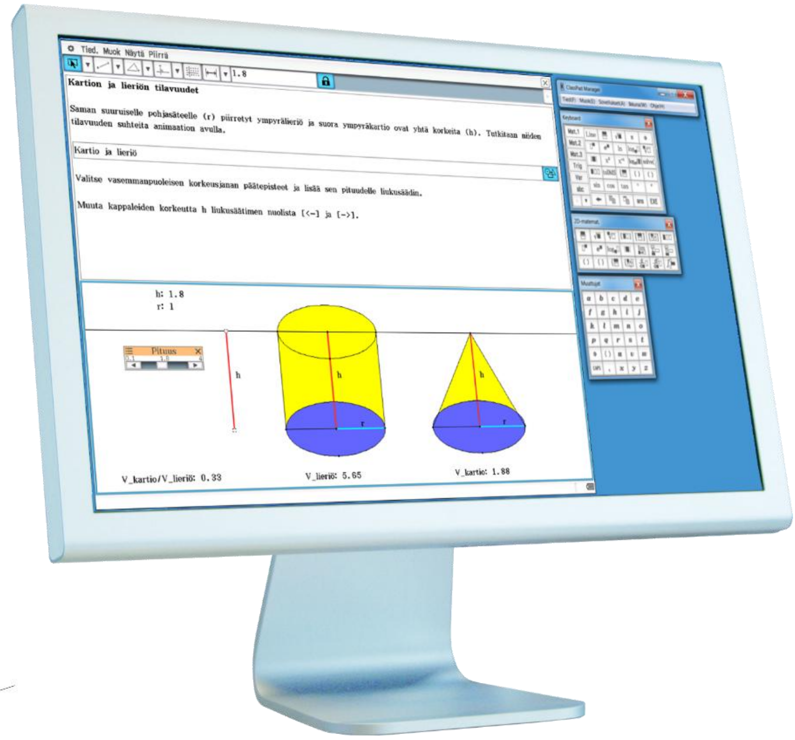
Laske Laudatur Casion avulla

Pitkä matematiikka,
syksy 2025





Sisältö

Syksyn 2025 matematiikan yo-kokeiden ratkaisut työasemalle ladattavan ja Abitista löytyvän ClassPad Managerin avulla laskettuina.

Pepe Palovaara

CASIO

Fintegrity

FI – Matematiikka, pitkä oppimäärä

25.9.2025

Tämä koe ei sisällä aineistoja.

Koe koostuu 13 tehtävästä, joista vastataan kymmeneen. Tehtävät on jaettu kolmeen osaan. A-osassa on kuusi tehtävää, joista vastataan viiteen. B1-osassa on neljä tehtävää, joista vastataan kolmeen. B2-osassa on kolme tehtävää, joista vastataan kahteen. Kaikki tehtävät arvostellaan pistein 0–12, joten kokeen maksimipistemäärä on 120.

A-osassa saat käyttää koejärjestelmän taulukkokirjoja ja perusohjelmia. A-osa palautetaan tehtävän 6 jälkeen olevalla painikkeella. Tämän jälkeen A-osan vastauksia ei voi enää muokata. A-osan palauttamisen jälkeen kaikki koejärjestelmän ohjelmat ovat käytettävissäsi. Voit vastata B-osien tehtäviin myös ennen A-osan palauttamista.

Halutessasi voit tuottaa vastausten tueksi piirroksia, kaavioita tai taulukoita ja liittää niistä kuvakaappauksen mihin tahansa tekstivastaukseen.

Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

A-osa

Vastaa viiteen tehtävään.

1. Yks, kaks, kolme, neljä (12 p.)

Valitse oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p. Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluakaan jättää tehtävää arvosteltavaksi, poista vastauksesi valitsemalla pudotusvalikosta tyhjä rivi.

1.1 Kuinka paljon on 12 prosenttia luvusta 34? (2 p.)

$4{,}08$

1.2 Mikä on yhtälön $12 + x^3 = 4$ ratkaisu? (2 p.)

$x = -2$

1.3 Suorakulmaisessa kolmiossa yhden kateetin pituus on 12 ja kateetin vastaisen kulman suuruus 34°. Mikä on kolmion hypotenuusan pituus kokonaisluvuksi pyöristettynä? (2 p.)

21

1.4 Ympyrän keskipiste on $(1, 2)$, ja piste $(3, 4)$ sijaitsee ympyrällä. Mikä on ympyrän säde? (2 p.)

$\sqrt{8}$

1.5 Sievennä $\log_a 1 + \log_a 2^3 + \log_a 4$, kun $a > 0$. (2 p.)

$5 \log_a 2$

1.6 Olkoon $g(x) = 1 + 2x - x^3$. Laske $g'(4)$. (2 p.)

-46

2. Perustehtäviä (12 p.)

1. Suora kulkee pisteiden $(5, 0)$ ja $(0, -3)$ kautta. Määritä suoran yhtälö. **(4 p.)**
2. Määritä funktion $f(x) = 3x^2 + e^{4x}$ derivaatta. **(4 p.)**
3. Määritä integraalifunktio $\int \cos(5x)\,dx$. **(4 p.)**

1. Suoran yhtälö on $y - 0 = \dfrac{-3-0}{0-5}(x-5) \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{5}x - 3$.

2. $f'(x) = 6x + 4e^{4x}$.

3. $\dfrac{1}{5}\sin(5x) + C,\ C \in \mathbb{R}$.

3. Epäyhtälö ja yhtälö (12 p.)

1. Ratkaise epäyhtälö $(x-1)(x+3) > -3$. **(6 p.)**
2. Ratkaise yhtälö $(x+e)(x^2 - \pi^2) = 0$. **(6 p.)**

1. Avataan sulut ja siirretään kaikki termit vasemmalle puolelle: $x^2 + 2x > 0$. Ratkaistaan vastaavan yhtälön nollakohdat: $x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$. Koska vasemman puolen yhtälön kuvaaja on ylöspäin avautuva paraabeli, jolla on kaksi nollakohtaa, on sen merkkikaavio + | - | + ja epäyhtälön ratkaisu $x < -2 \ \wedge x > 0$.

2. Tulon nollasäännöllä $x + e = 0 \vee x^2 - \pi^2 = 0 \Leftrightarrow x = -e \vee x = \pm\pi$.

4. Trigonometrinen yhtälö (12 p.)

Ratkaise yhtälö $1 - (\cos x)^2 = (\sin 2x)^2$, kun $x \in [-\pi, \pi]$.

Muokataan yhtälöä trigonometristen kaavojen avulla, ryhmitellään ja otetaan yhteinen tekijä tulon nollasääntöä varten:

$1 - (\cos(x))^2 = (\sin(2x))^2 \Leftrightarrow 1 - \left(1 - (\sin(x))^2\right) = (2\sin(x)\cos(x))^2 \Leftrightarrow (\sin(x))^2 = 4(\sin(x))^2(\cos(x))^2$

$\Leftrightarrow 4(\sin(x))^2(\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 = 0 \Leftrightarrow (\sin(x))^2\left(4(\cos(x))^2 - 1\right) = 0 \quad (\sin(x))^2 = 0 \vee (\cos(x))^2 = \dfrac{1}{4}$

Ratkaistaan molemmat saadut yhtälöt välillä [-π, π] eli koko yksikköympyrässä:

$(\sin(x))^2 = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\pi \vee x = \pi$ (yksikköympyrän kehäpisteen y-koordinaatti on 0.)

$(\cos(x))^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \cos(x) = \pm\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} \vee x = \pm\dfrac{2\pi}{3}$ (yksikköympyrän kehäpisteen x-koordinaatti on $\pm\dfrac{1}{2}$.)

5. Tilastollisia tunnuslukuja (12 p.)

1. Lukujen $x_1, \ldots, x_n$ keskiarvo on a ja $b > a$. Osoita, että lukujen $x_1, \ldots, x_n, b$ keskiarvo on suurempi kuin a. **(6 p.)**

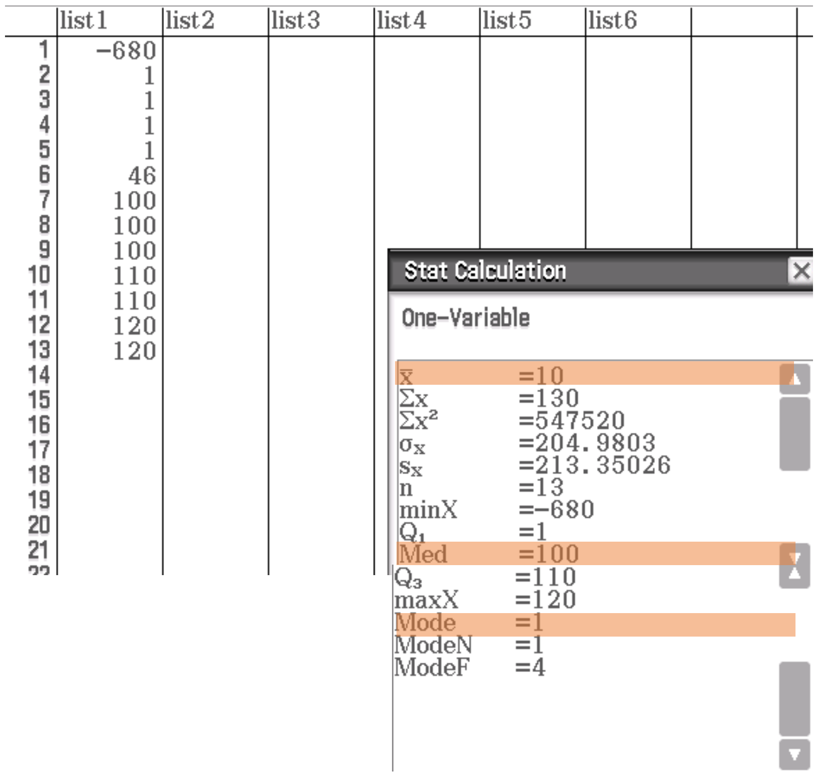
2. Anna esimerkki seuraavat ehdot toteuttavista luvuista tai osoita, että sellaisia ei ole olemassa: lukujen moodi on 1, keskiarvo 10 ja mediaani 100. **(6 p.)**

1. Koska ensimmäisten lukujen keskiarvo on $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = a \Leftrightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_n = an$ ja toisten lukujen keskiarvo on $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + b}{n+1}$, niin voidaan muokata toisten lukujen keskiarvo muotoon $\frac{an + b}{n+1}$. Koska $b > a$ oletuksen mukaan ja murtolauseke pienenee kun osoittaja pienenee, niin voidaan päätellä $\frac{an+b}{n+1} > \frac{an+a}{n+1} = \frac{a(n+1)}{n+1} = a$.

2. Tämä on mahdollista. Moodi eli tyyppiarvo tarkoittaa, että näitä lukuja pitää joukosta olla eniten. Aloitetaan lukujoukko esim. neljällä ykkösellä 1, 1, 1, 1. Jotta keskiarvo olisi kymmenen, pitää aineistoon lisätä hieman suurempikin luku, esim. luvut 1, 1, 1, 1, 46 toteuttavat ehdot moodin ja keskiarvon suhteen.

Jotta mediaani eli järjestetyn joukon keskimmäinen luku (tai keskimmäisten keskiarvo) olisi 100, pitää joukkoon lisätä lukuja sata - ei kuitenkaan enempää kuin nollia moodin vaatimusten takia - ja sitä suurempia lukuja sekä tasapainottaa keskiarvoa vastaavasti jollain negatiivisella luvulla. Esim. luvut -680, 1, 1, 1, 1, 46, 100, 100, 100, 110, 110, 120, 120 toteuttavat kaikki ehdot.

Tarkistus mielenkiinnon vuoksi laskimen tilasto-toiminnolla (ei käytössä A-osassa):



6. Funktio rajoitettuna ympyrälle 12 p.

Tarkastellaan funktiota $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, joka on määritelty lausekkeella $f(x, y) = xy$. Määritä kaikki arvot, jotka funktio saa ympyrällä $x^2 + y^2 = 4$.

Annettu ympyrä on origokeskeinen ja sen säde on 2. Suurin mahdollinen alue funktion arvoille ympyrällä on [-2, 2]. Ratkaistaan muuttuja x ympyrän yhtälöstä: $x = \pm\sqrt{4-y^2}$. Funktio saadaan yhden muuttujan funktioksi sijoittamalla saatu arvo funktioon $f\left(\pm\sqrt{4-y^2}, y\right) = \pm\sqrt{4-y^2} \cdot y$ Funktio on määrittelyjoukossaan jatkuva funktio, joten se saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai välille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa. Tutkitaan funktion arvoja ympyrän ensimmäisessä neljänneksessä ja rajataan tutkittava väli näin $0 \le x \le 2$ ja $0 \le y \le 2$.

$$f'(y) = \sqrt{4-y^2} + y \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4-y^2}} \cdot (-2y) = \sqrt{4-y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{4-y^2}} = \frac{4-2y^2}{\sqrt{4-y^2}} .$$

Derivaatta on määritelty, kun $4 - y^2 > 0 \Leftrightarrow 0 \le y < 2$. Derivaatan nollakohdat ovat samat kuin murtolausekkeen osoittajan nollakohdat eli $4 - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2}$, joista vain positiivinen nollakohta kuuluu tarkasteluvälille. Kun

$y = \sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{4-\sqrt{2}^2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$,Funktion suurin ja pienin arvo on joukossa

$f(0,2) = 0 \cdot 2 = 0,\ f(2,0) = 2 \cdot 0 = 0,\ f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ Jatkuvana funktiona f saa kaikki arvonsa pienimmän ja suurimman arvonsa välissä eli sen arvojoukko ympyrän ensimmäisessä neljänneksessä on [0,2]. Vastaava tarkastelu ympyrän kolmannessa neljänneksessä antaa derivaatan nollakohdaksi $y = -\sqrt{2}$, jolloin väleillä $-2 \le x \le 0$ ja $-2 \le y \le 0$ funktion pienin ja suurin arvo on joukossa

$f(-2,0) = (-2) \cdot 0 = 0,\ f(0,-2) = 0 \cdot (-2) = 0,\ f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -\sqrt{4-(-\sqrt{2})^2} = -2$. Funktio saa jälleen kaikki arvot pienimmän ja suurimman arvonsa välissä eli sen arvojoukko ympyrän kolmannessa neljänneksessä on [-2,0]. Niinpä funktio saa kaikki arvot ympyrällä väliltä [-2,2].

Katso aiempien yo-kokeiden ratkaisut sivulta

www.casio-laskimet.fi > Opettaja & koulu > Opetusmateriaalia

B1-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

7. Geometrian laskutehtäviä (12 p.)

Anna tässä tehtävässä pelkkä vastaus ilman perusteluja. Vastauslaatikkoon voi kirjoittaa vain yhden kokonaisluvun.

Laske kussakin osatehtävässä tuntemattoman likiarvo kokonaisluvuksi pyöristettynä.

7.1 Kolmion kärjet ovat pisteissä $(12, 3)$, $(-2, 9)$ ja $(4, 20)$, ja sen pinta-ala on A_1. (2 p.)

$A_1 \approx$ 95

7.2 Kolmion kärjet ovat pisteissä $(12, 3)$, $(-2, 9)$ ja $(4, 20)$, ja sen piirin pituus on p. (2 p.)

$p \approx$ 47

7.3 Suoran ympyrälieriön korkeus on 13, säde 4 ja vaipan pinta-ala A_2. (2 p.)

$A_2 \approx$ 327

7.4 Pisteen $(-20, 6)$ etäisyys suorasta $2x + y + 5 = 0$ on d. (2 p.)

$d \approx$ 13

7.5 Olkoot $\overline{u} = \overline{i} + 2\,\overline{j}$ ja $\overline{v} = 2\,\overline{i} - 2\,\overline{j}$. Vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ välinen kulma asteina on α. (2 p.)

$\alpha \approx$ 108

7.6 Olkoot $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ kuten osatehtävässä 7.5. Vektorin $4\,\overline{u} - 7\,\overline{v}$ pituus on L. (2 p.)

$L \approx$ 24

7.1. Ristitulovektorin pituuden puolikas on kolmion pinta-ala:

$u := \begin{bmatrix} -2-12 \\ 9-3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -14 \\ 6 \end{bmatrix}$

$v := \begin{bmatrix} 4-12 \\ 20-3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -8 \\ 17 \end{bmatrix}$

$\frac{1}{2}\mathrm{norm}(\mathrm{crossP}(u, v))$

95

7.2. Piiri on

$\sqrt{(12-(-2))^2+(3-9)^2}+\sqrt{(-2-4)^2+(9-20)^2}+\sqrt{(12-4)^2+(3-20)^2}$

46.54980453

7.3. Vaipan pinta-ala on

$13*2*\pi*4$

326.725636

7.4. Pisteen etäisyys suorasta on

$\frac{|2*(-20)+6+5|}{\sqrt{2^2+1^2}}$

12.96919427

7.5. Annettujen vektorien välinen kulma

$\mathrm{angle}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$

108.4349488

7.6. Kysytyn vektorin pituus

$\mathrm{norm}\left(4*\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}-7*\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$

24.16609195

8. Pianon osto (12 p.)

Auri haluaa ostaa uuden pianon. Hän aikoo säästää $7\,500$ euroa kolmessa vuodessa, ja tallettaa uudelle säästötilileen saman summan jokaisen kuukauden ensimmäisenä päivänä ennen pankkipäivän alkua. Kuinka paljon Aurin on laitettava säästöön kuukausittain, kun hänen säästötilinsä nettokorkokanta on $2{,}5\ \%$ ja korko maksetaan tilille kerran vuodessa? Tehtävässä oletetaan, että kaikki kuukaudet ovat samanpituisia. Tilillä olevat rahat kerryttävät korkoa koko sen ajan, jonka ne ovat tilillä.

Olkoon kuukausittaisen talletuksen suuruus x. Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 12kk, seuraava 11kk, jne. Viimeinen talletus kasvaa korkoa yhden kuukauden. Vuosikorko on $\frac{1}{12}*0{,}025$.

Ensimmäisen vuoden jälkeen tilillä on rahaa

$$\frac{0.025x}{12}*(12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1)+12x$$

$$\frac{973\cdot x}{80}$$

Samoin tapahtuu toisena ja kolmantena vuotena. Ensimmäisen vuoden talletus kasvaa korkoa korolle 2 vuotta ja toisen vuoden talletus vuoden. Kun nämä otetaan huomioon, saadaan yhtälö tilillä olevalle rahasummalle, jonka pitää olla 7500. Ratkaistaan tästä kuukausitalletuksen suuruus x:

$$\text{solve}\left(\frac{973\cdot x}{80}*1.025^2+\frac{973\cdot x}{80}*1.025+\frac{973\cdot x}{80}=7500,x\right)$$

$$\{x=200.4956838\}$$

Kuukausitalletuksen suuruus tulee olla n. 200,50 euroa.

9. Epäilyttäviä päättelyjä (12 p.)

1. Gizan suuren pyramidin korkeus on $146{,}6$ metriä ja sen neliön muotoisen pohjan sivun pituus on $230{,}3$ metriä. Sirius on laskenut pyramidin tilavuuden seuraavasti:

   > Koska pyramidi on puolet oktaedrista, niin voidaan käyttää oktaedrin tilavuuden kaavaa $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. Pyramidin tilavuus on siis
   >
   > $$\frac{1}{2}\cdot\frac{(230{,}3)^3\sqrt{2}}{3}=2\,879\,025{,}83\ (\mathrm{m}^3).$$

   Sirius epäilee kuitenkin, että hän on tehnyt jossakin virheen, sillä tulos ei vastaa lähteessä ilmoitettua Gizan suuren pyramidin tilavuutta. Selitä perustellen, minkä virheen Sirius teki ja laske oikea tilavuus. **(6 p.)**

2. Vega laskee funktion $g(x)=x^3-2x+1$ suurimman arvon välillä $[-1,1]$ seuraavasti:

   > Derivaatta on $g'(x)=3x^2-2$. Derivaatan nollakohdat ovat $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, ja ne ovat molemmat tarkasteluvälillä. Koska $g\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=1-\frac{4\sqrt{6}}{9}\approx-0{,}09$ ja $g\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=1+\frac{4\sqrt{6}}{9}\approx2{,}1$, niin kysytty suurin arvo on $1+\frac{4\sqrt{6}}{9}$.

   Jos Vega on päätellyt oikein, perustele, miksi näin on. Jos taas päättely on väärin, korjaa se oikeaksi. **(6 p.)**

1. Jotta pyramidin tilavuus olisi puolet oktaedrin tilavuudesta, pitää kappaleiden olla säännöllisiä eli jokaisen sivun tulee olla yhtä pitkiä keskenään. Pyramidin sivusärmän pituus on pyramidin pohjan keskipisteestä huippuun ja nurkkaan rajoittuvan suorakulmaisen kolmion hypotenuusana

$\sqrt{\left(\frac{230.3}{\sqrt{2}}\right)^2+146.6^2}$

219.1132242

Koska tämä ei ole yhtä pitkä kuin pohjan sivun pituus, ei pyramidi ole säännöllinen vaan hieman "venytetty". Siksi sen tilavuus ei ole puolet oktaedrin tilavuudesta. Lisäksi vastaustarkkuus sisältää liikaa numeroita, sillä mitat on annettu neljän merkitsevän numeron tarkkuudella ja vastauksessa niitä on yhdeksän.

Gizan pyramidin tilavuus on

$\frac{1}{3}*230.3^2*146.6$

2591794.665

eli n. 2592000 kuutiometriä.

2. Funktio g(x) on jatkuva, joten sen suurin arvo suljetulla välillä saadaan joko välille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa tai välin päätepisteissä. Derivaatan nollakohdat on laskettu oikein, joten suurin arvo on jokin seuraavista:

define $g(x)=x^3-2x+1$

done

$g(-1)$

2

$g(1)$

0

$g(\sqrt{\frac{2}{3}})$

−0.0886621079

$g(-\sqrt{\frac{2}{3}})$

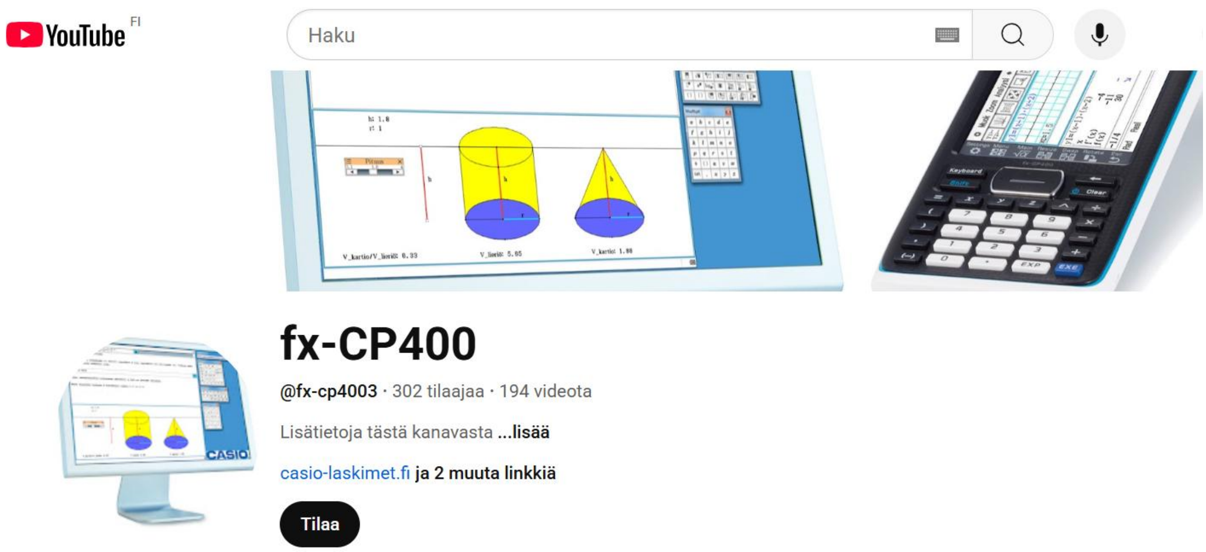
2.088662108

$g(-\sqrt{\frac{2}{3}})$

$\frac{4\cdot\sqrt{6}}{9}+1$

Suurin arvo on siis n. 2.08866... , mikä on tarkkana arvona $\frac{4\cdot\sqrt{6}}{9}+1$. Vega ei ole tarkastelussaan huomioinut välin päätepisteitä ja siksi se on puutteellinen.

Tiesitkö, että ClassPad Managerin käyttöön löytyy kattava videokirjasto? Tsekkaa YouTubesta osoitteesta bit.ly/fx-cp400



10. Eukleideen algoritmi (12 p.)

Määritä Eukleideen algoritmilla lukujen 121 110 987 654 321 ja 123 456 789 101 112 suurin yhteinen tekijä. Voit käyttää ohjelmistoa, kunhan algoritmin välivaiheet näkyvät ratkaisussa.

Eukleideen algoritmia soveltamalla saadaan seuraava ketju:

123456789101112=1*121110987654321+2345801446791
121110987654321=51*2345801446791+1475113867980
2345801446791=1*1475113867980+870687578811
1475113867980=1*870687578811+604426289169
870687578811=1*604426289169+266261289642
604426289169=2*266261289642+71903709885
266261289642=3*71903709885+50550159987
71903709885=1*50550159987+21353549898
50550159987=2*21353549898+7843060191
21353549898=2*7843060191+5667429516
7843060191=1*5667429516+2175630675
5667429516=2*2175630675+1316168166
2175630675=1*1316168166+859462509
1316168166=1*859462509+456705657
859462509=1*456705657+402756852
456705657=1*402756852+53948805
402756852=7*53948805+25115217
53948805=2*25115217+3718371
25115217=6*3718371+2804991
3718371=1*2804991+913380
2804991=3*913380+64851
913380=14*64851+5466
64851=11*5466+4725
5466=1*4725+741
4725=6*741+279
741=2*279+183
279=1*183+96
183=1*96+87
96=1*87+9
87=9*9+6
9=1*6+3
6=2*3+0

Suurin yhteinen tekijä on viimeinen nollasta eroava jakojäännös eli 3. Tarkistus laskimella:

gcd(123456789101112,121110987654321)

3

B2-osa

Vastaa kahteen tehtävään.

11. Ellipsin yhtälö (12 p.)

Olkoot P ja Q tason pisteitä. Ellipsi on niiden tason pisteiden Z muodostama käyrä, joille etäisyyksien $|PZ|$ ja $|QZ|$ summa on vakio $k > |PQ|$. Pisteitä P ja Q kutsutaan ellipsin *polttopisteiksi*.

Tarkastellaan ellipsiä, joka on symmetrinen koordinaattiakselien suhteen ja leikkaa ne pisteissä $(\pm a, 0)$ ja $(0, \pm 1)$, kun $a > 1$. Tällöin polttopisteet sijaitsevat x-akselilla. Määritä polttopisteet P ja Q parametrin a avulla ja osoita, että tämän ellipsin yhtälö on

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$$

käyttämättä muita tietoja ellipseistä kuin yllä annettua määritelmää.

Valitaan kaksi polttopistettä x−akselilta. Nimetään pisteet (p, 0) ja (q, 0). Polttopisteet jäävät ellipsin sisälle, sillä jos olisi
1) p=a, niin ellipsiä ei muodostuisi. Ellipsi olisi ainoastaan jana x−akselien leikkauspisteiden (−a, 0) ja (a, 0) välillä.
2) q=a, kuten edellä.
3) p<−a eli polttopiste sijaitsisi ellipsin ulkopuolella, ei ellipsiä muodostuisi.
4) q>a, kuten edellä.

Siis pitää olla a>p ja a>q. Nyt ellipsin pisteen etäisyyksien summa polttopisteistä on a−p+a−q=p−(−a)+q−(−a), joten −p−q=p+q eli p:n ja q:n täytyy olla toistensa vastalukuja ja sijaitsevat siis symmetrisesti y−akselin molemmin puolin x−akselilla. Siis p=−q ja ellipsin pisteen (a, 0) etäisyyksien summa polttopisteistä on muotoa a−p+a−(−p)=2a.

Ellipsin pisteen (0, 1) etäisyyksien summa polttopisteistä on $\sqrt{(0-p)^2+(1-0)^2}+\sqrt{(0-(-p)^2+(1-0)^2}=2\sqrt{p^2+1}=2a$, joten $a=\sqrt{p^2+1}$. Tästä voidaan ratkaista $p=\pm\sqrt{a^2-1}$. Niinpä polttopisteiden koordinaatit ovat $(\pm\sqrt{a^2-1}, 0)$.

Muodostetaan ellipsin yhtälö mielivaltaiselle pisteelle Z=(x, y). Tämän pisteen etäisyyksien summa polttopisteistä on

$2a=\sqrt{(x-\sqrt{a^2-1})^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+\sqrt{a^2-1})^2+(y-0)^2}$ | puolet positiivisia, korotetaan toiseen

$4a^2=(x-\sqrt{a^2-1})^2+y^2+2\sqrt{((x-\sqrt{a^2-1})^2+(y-0)^2)((x+\sqrt{a^2-1})^2+(y-0)^2)}+(x+\sqrt{a^2-1})^2+y^2$

$4a^2=2y^2+x^2-2\sqrt{a^2-1}+a^2-1+x^2+2\sqrt{a^2-1}+a^2-1+2\sqrt{((x-\sqrt{a^2-1})^2+y^2)((x+\sqrt{a^2-1})^2+y^2)}$

$4a^2=2y^2+2x^2+2a^2-2+2\sqrt{((x-\sqrt{a^2-1})^2+y^2)((x+\sqrt{a^2-1})^2+y^2)}$

$2a^2-2y^2-2x^2+2=2\sqrt{((x-\sqrt{a^2-1})^2+y^2)((x+\sqrt{a^2-1})^2+y^2)}$

$a^2-y^2-x^2+1=\sqrt{\left(x^2-2x\sqrt{a^2-1}+a^2-1+y^2\right)\left(x^2+2x\sqrt{a^2-1}+a^2-1+y^2\right)}$

$a^2-y^2-x^2+1=\sqrt{x^4+y^4+a^4+2\cdot x^2\cdot y^2-a^2\cdot\left(2\cdot x^2-2\cdot y^2+2\right)+2\cdot x^2-2\cdot y^2+1}$ | puolet positiivisia ($x\leq a$ ja $y\leq 1$), korotetaan toiseen

$\left(a^2-y^2-x^2+1\right)\left(a^2-y^2-x^2+1\right)=x^4+y^4+a^4+2\cdot x^2\cdot y^2-a^2\cdot\left(2\cdot x^2-2\cdot y^2+2\right)+2\cdot x^2-2\cdot y^2+1$

$a^4-a^2y^2-a^2x^2+a^2-a^2y^2+y^4+x^2y^2-y^2-a^2x^2+x^2y^2+x^4-x^2+a^2-y^2-x^2+1=x^4+y^4+a^4+2\cdot x^2\cdot y^2-a^2\cdot\left(2\cdot x^2-2\cdot y^2+2\right)+2\cdot x^2-2\cdot y^2+1$

$-a^2y^2+a^2-a^2y^2-x^2+a^2-x^2=2\cdot a^2\cdot y^2-2\cdot a^2+2\cdot x^2$

$-4a^2y^2+4a^2-4x^2=0$

$a^2=x^2+a^2y^2$

$1=\frac{x^2}{a^2}+y^2$

Mikä oli todistettava.

12. Ortogonaaliset funktiot (12 p.)

Jatkuvat funktiot $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ja $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ ovat *ortogonaaliset*, jos

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0.$$

Tutkitaan tässä tehtävässä vain jatkuvia funktioita, jotka eivät ole nollafunktioita (eli funktiot saavat muitakin arvoja kuin nolla).

1. Anna esimerkki funktiosta $g : [1, 2] \to \mathbf{R}$, joka on ortogonaalinen funktion $f(x) = 3x + 2$ kanssa. **(6 p.)**
2. Jos funktiot f ja g ovat ortogonaaliset ja myös funktiot g ja h ovat ortogonaaliset, niin ovatko funktiot f ja h välttämättä ortogonaaliset? **(6 p.)**

1. On osoitettava, että löytyy funktio g:[1,2] → R, niin että integraali $\int_1^2 (3x+2)g(x)dx=0$.

Valitaan esim. funktio g(x)=x+c, jolloin

$\int_1^2 (3x+2)*(x+c)dx$

$$\frac{3\cdot(3\cdot c+2)}{2}+2\cdot c+7$$

simplify(ans)

$$\frac{13\cdot c}{2}+10$$

Asetetaan integraalin arvo nollaksi, jolloin saadaan

solve($\frac{13\cdot c}{2}+10=0, c$)

$$\left\{c=-\frac{20}{13}\right\}$$

Koska $g(x)=x-\frac{20}{13}$ on määritelty ja polynomifunktiona jatkuva välillä [1,2] ja saa vain reaalisia arvoja, se käy esimerkkifunktioksi.

2. Meillä on jo kohdan 1. nojalla yksi ortogonaalinen funktiopari f(x) ja g(x). Olkoon h(x)=f(x), jolloin myös h(x) ja g(x) ovat ortogonaalisia. Tutkitaan, ovatko h(x) ja f(x) keskenään ortogonaaliset:

$\int_1^2 (3x+2)*(3x+2)dx$

$$43$$

Koska integraalin arvo ei ole nolla, ei ortogonaalius päde funktioille h(x) ja f(x).

13. Melkein kaikkialla derivoituva funktio (12 p.)

Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funktio, jolle $f'(x) > 0$, kun $x \neq 0$. Perustele jokainen seuraavista väittämistä tai osoita vastaesimerkillä, että se ei päde.

i. Funktio f on jatkuva.
ii. Funktio f on kasvava.
iii. Jos f on jatkuva, niin se on kasvava.
iv. Jos f on kasvava, niin se on jatkuva.

Pistemääriä ei ole merkitty näkyviin, sillä ne voisivat paljastaa, liittyykö väitteeseen vastaesimerkki vai perustelu.

i. Tutkitaan funktiota $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$. Funktio on määritelty kaikille reaaliluvuille ja saa reaalisia arvoja. Se ei ole jatkuva pisteessä x=0, mutta $f'(x)=\frac{1}{x^2}>0$ aina, kun $x\neq 0$. Funktio ei siis välttämättä ole jatkuva.

ii. Käytetään edellisen kohdan funktiota. Funktio ei ole kaikkialla kasvava, vaikka $f'(x)>0$ aina kun $x\neq 0$, sillä esim. $f(-1)=1 > f(0)=0$ eli funktio ei saa aina suurempia arvoja, vaikka muuttujan x arvo kasvaisikin.

iii. Jos funktio on jatkuva ja sen derivaatalle pätee $f'(x)>0$, kun $x\neq 0$, niin se on kasvava funktio ainakin, kun $x\neq 0$.

Tutkitaan kasvavuutta kohdassa x=0. Oletetaan, että olisi olemassa sellainen positiivinen luku a, jolle $f(0) > f(a)$ eli funktio saisi pienemmän arvon muuttujan kasvaessa. Koska funktio f(x) todettiin kasvavaksi, kun $x > 0$, niin sen on oltava myös kasvava, kun $0 < x < a$. Siispä $f(x) \leq f(a)$ aina, kun $0 < x \leq a$. Tämä on kuitenkin ristiriita sen kanssa, että f(x) oli jatkuva ja pitäisi olla $f(0) > f(a) \geq f(x)$, kun $0 < x < a$. Tämä olisi mahdollista vain, jos funktiolla f(x) olisi epäjatkuvuuskohta pisteessä x=0. Siispä ehtojen mukaisen funktion ollessa jatkuva, se on myös kasvava.

iv. Kasvavuus ei takaa jatkuvuutta. On helppo konstruoida funktio, joka kasvaa aidosti eli sen derivaatta on positiivinen, kun $x\neq 0$. Esimerkiksi $f(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ 1, & x=0\\ x+2, & x>0\end{cases}$. Funktion derivaatta $f'(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$, kun $x\neq 0$. Funktio ei kuitenkaan ole jatkuva kohdassa x=0, sillä

$$\lim_{x\to 0-}(f(x))=0 \neq f(0)=1 \neq \lim_{x\to 0+}(f(x))=2.$$