Laske Laudatur Casion avulla

Lyhyt matematiikka,
syksy 2025

Sisältö

Syksyn 2025 matematiikan yo-kokeiden ratkaisut työasemalle ladattavan ja Abitista löytyvän ClassPad Managerin avulla laskettuina.

Pepe Palovaara

FI – Matematiikka, lyhyt oppimäärä

25.9.2025

Tämä koe ei sisällä aineistoja.

Koe koostuu 11 tehtävästä, joista vastataan yhdeksään. Tehtävät on jaettu kahteen osaan. A-osassa on kuusi tehtävää, joista vastataan viiteen. B-osassa on viisi tehtävää, joista vastataan neljään. Tehtävät 1–9 arvostellaan pistein 0–12, ja tehtävät 10 ja 11 pistein 0–18. Kokeen maksimipistemäärä on 120 ja sen voi saavuttaa vain, jos vastaa tehtäviin 10 ja 11.

A-osassa saat käyttää koejärjestelmän taulukkokirjoja ja perusohjelmia. A-osa palautetaan tehtävän 6 jälkeen olevalla painikkeella. Tämän jälkeen A-osan vastauksia ei voi enää muokata. A-osan palauttamisen jälkeen kaikki koejärjestelmän ohjelmat ovat käytettävissäsi. Voit vastata B-osan tehtäviin myös ennen A-osan palauttamista.

Halutessasi voit tuottaa vastausten tueksi piirroksia, kaavioita tai taulukoita ja liittää niistä kuvakaappauksen mihin tahansa tekstivastaukseen.

Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

Huom.! Tehtävissä 4 ja 11 on erillinen ohje vastaamatta jättämisestä.

A-osa

Vastaa viiteen tehtävään.

1. Lyhyitä tehtäviä (12 p.)

Anna tässä tehtävässä pelkkä vastaus ilman perusteluja. Vastauslaatikkoon voi kirjoittaa vain yhden kokonaisluvun.

1.1 Kuinka monta prosenttia 36 on luvusta 45? (2 p.)

80

1.2 Tilille on juuri maksettu 3 prosenttia korkoa, minkä jälkeen tilillä on 675,68 euroa. Kuinka paljon tilillä oli rahaa ennen koron maksamista? (2 p.)

656

1.3 Laske $f(16)$, kun $f(x) = \sqrt{x} - 2$. (2 p.)

2

1.4 Kuinka monta erisuurta nollakohtaa polynomilla $p(x) = x^2 + 6x + 9$ on? (2 p.)

1

1.5 Mikä on todennäköisyys saada kahden kolikon heitossa kaksi klaavaa? Anna vastaus prosentteina. (2 p.)

25

1.6 Kuinka monella tavalla voidaan saada pienen ja suuren tavallisen nopan heitossa silmälukujen summaksi 6? (2 p.)

5

2. Osuus äänistä (12 p.)

Presidenttiehdokas A sai 7,3 % kaikista ennakkoäänistä ja 12,7 % kaikista vaalipäivän äänistä. Yhteensä hyväksyttyjä ääniä annettiin 2 500 000, joista 32 % oli ennakkoääniä. Mikä oli ehdokkaan A saamien äänien prosenttiosuus kaikista hyväksytyistä äänistä?

Ennakkoääniä oli $0{,}32 \cdot 2500000 = 800000$, joista ehdokas A sai $0{,}073 \cdot 800000 = 58400$. Vaalipäivän ääniä oli $2500000 - 800000 = 1700000$, joista ehdokas A sai $0{,}127 \cdot 1700000 = 215900$. Ehdokas A sai siis kaikista äänistä $\frac{215900 + 58400}{2500000} \cdot 100 = 10{,}972\% \approx 11\%$.

3. Uppotunneli (12 p.)

Sanomalehdessä (HBL, 21.10.2023) kerrottiin 18 kilometriä pitkästä Fehmarnin Beltin tunnelista, jonka pitäisi suunnitelmien mukaan valmistua vuonna 2029. Uppotunneli yhdistää Lollandin ja Fehmarnin saaret, ja siitä tulee maailman pisin omassa lajissaan.

Projektin johtaja kertoo, että tunnelin rakentamiseen tarvittavan betonin määräksi arvioidaan kolme miljoonaa kuutiometriä. Hän lisää, että tämä määrä riittäisi koko päiväntasaajan ympäri kiertävän jalkakäytävän rakentamiseen. Arvioi, kuinka korkea tällainen betonijalkakäytävä olisi, jos sen leveys on 2,0 metriä. Maan säde päiväntasaajalla on 6 378 kilometriä.

Maapallon kaarevuus vaikuttaa merkityksettömän vähän jalkakäytävän profiiliin, joten voidaan ajatella jalkakäytävän poikkileikkauksen olevan suorakaide, jonka leveys on 2,0 m ja pituus $2 \cdot 6378\pi$ km. Merkitään jalkakäytävän korkeutta h (m), jolloin sen tilavuus kuutiometreinä on $2h \cdot 2 \cdot 6378 \cdot 1000\pi = 3000000$ Voidaan ratkaista korkeus $h = \frac{3000000}{2 \cdot 2 \cdot 6378 \cdot 1000\pi} = 0{,}0374306075\ldots$ m. Jalkakäytävän korkeus on n. 4 cm.

4. Laskuja ja käsitteitä (12 p.)

Valitse oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 1–2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p. Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluakaan jättää tehtävää arvosteltavaksi, poista vastauksesi valitsemalla pudotusvalikosta tyhjä rivi.

4.1 Täydennä virke. (2 p.)

Yhtälön $x^3 = 216$ ratkaisu on $x =$ [6].

4.2 Täydennä virke. (2 p.)

Yhtälön $3^n = 729$ ratkaisu on $n =$ [6].

4.3 Täydennä virke. (2 p.)

Tapahtuman A todennäköisyys on 0,4, ja tapahtuman B todennäköisyys on 0,3.

Jos tapahtumat eivät ole riippumattomia, niin tapahtuman "A ja B" suurin mahdollinen todennäköisyys on [0,3].

4.4 Täydennä virke. (2 p.)

Tapahtuman A todennäköisyys on 0,4, ja tapahtuman B todennäköisyys on 0,3.

Tällöin voidaan päätellä [yhteenlaskusäänn...] 1 p., että tapahtuman "A tai B" todennäköisyys on 0,7, kun tapahtumat ovat [toisensa poissulke...] 1 p..

4.5 Täydennä virke. (2 p.)

Säästötilille maksetaan joka vuosi korkoa kiinteän korkokannan mukaan. Tätä tilannetta kuvaa parhaiten talousmatematiikan käsite [koron korko].

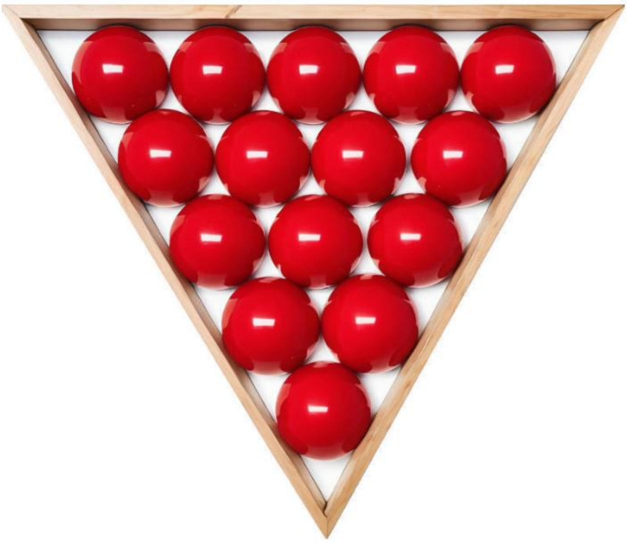
4.6 Täydennä virke. (2 p.)

Positiivinen luku kasvaa ensin 12 %, pienenee sen jälkeen 3 % ja lopuksi vielä kasvaa 8 %.

Alkuperäiseen verrattuna lopputulos [on yli 17 % suurempi].

5. Snooker (12 p.)

Snooker-biljardipelin alkutilanteessa pöydälle asetetaan 15 punaista palloa. Ne järjestetään kolmion muotoiseksi ryhmäksi käyttämällä tasasivuisen kolmion muotoista kehystä, jonka avulla ryhmästä saadaan mahdollisimman tiivis (kuva alla). Mikä on kehyskolmion sisäosan sivun pituus? Yhden pallon halkaisija on 52,4 mm.



Kun yhdistetään kulmassa olevan pallon keskipiste, kehyksen sisäosan kulma ja pallon ja kehyksen kosketuspiste pallon keskipisteen korkeudelta, saadaan suorakulmainen kolmio. Koska kehys on tasasivuinen kolmio, ovat sen kaikki kulmat $60°$. Edellä kuvatun suorakulmaisen kolmion kulmien suuruudet ovat $30°$, $60°$ ja $90°$. Etäisyys kulmassa olevan pallon ja kehyksen kosketuspisteestä kehyksen sisäkulmaan on $\tan(60°) \cdot \frac{52{,}4}{2}$ mm. Yhdellä kehyksen sivulla on kaksi tällaisen suorakulmaisen kolmion sivua ja loput kehyksen sisäosan pituudesta on mitaltaan neljän pallon halkaisijan verran. Kehyksen sisäosan pituus on siis $2 \cdot \tan(60°) \cdot \frac{52{,}4}{2} + 4 \cdot 52{,}4 = 300{,}3594623... \approx 300$ mm.

6. Hätäpuhelut (12 p.)

Hätäkeskukseen soitettiin vuonna 2022 yhteensä 2 920 000 puhelua. Niistä 694 600 oli vahinkopuheluita ja 37 600 häiriköintiä tai muuten asiattomia puheluita. Kutsutaan näitä turhiksi hätäpuheluiksi.

1. Kuinka monta turhaa hätäpuhelua tuli keskimäärin yhden tunnin aikana? **(3 p.)**
2. Arvioi binomijakauman kaavaa käyttämällä, millä todennäköisyydellä kymmenestä satunnaisesti valitusta puhelusta korkeintaan yksi oli turha. **(9 p.)**

1. Jaetaan turhien hätäpuheluiden määrä vuodessa olevien tuntien määrällä. Vuosi 2022 ei ollut karkausvuosi, joten siinä oli 365 päivää. $\frac{694600 + 37600}{365 \cdot 24} = 83{,}58447489...$ puhelua/tunti. Puheluita tuli siis keskimäärin n. 84 tunnissa.

2. P(0 tai 1 puheluista turhia)

$$= \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{732200}{2920000}\right)^0 \cdot \left(\frac{2187800}{2920000}\right)^{10} + \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{732200}{2920000}\right)^1 \cdot \left(\frac{2187800}{2920000}\right)^9 = 0{,}242332 \approx 24\% \cdot$$

B-osa

Vastaa neljään tehtävään.

7. Verrannollisuus (12 p.)

1. Suomalainen muuttoyritys otti vuonna 2022 käyttöön katolle sijoitetuilla aurinkopaneeleilla varustetun muuttoauton. Paneelit tuottavat virtaa muuttoauton muihin kuin etenemiseen tarvittaviin toimintoihin. Paneelit tuottavat yhteensä 2,7 kilowatin tehon, jos niiden pinta-ala on $20\,\mathrm{m}^2$. Kuinka suuren tehon tuottaa rekka-auton katolle sijoitettu paneeli, jonka pinta-ala on $32\,\mathrm{m}^2$? Paneelien teho on suoraan verrannollinen niiden pinta-alaan. **(4 p.)**
2. Kirkasvalolampun valaistusvoimakkuus on 2 500 luksia 45 senttimetrin etäisyydellä. Kuinka suuri on valaistusvoimakkuus 1,0 metrin etäisyydellä? Valaistusvoimakkuus on kääntäen verrannollinen etäisyyden toiseen potenssiin. **(8 p.)**

1. Ratkaistaan suoraan verrannollisuuden yhtälöstä teho P:

$$\mathrm{solve}\left(\frac{2.7}{20}=\frac{P}{32},P\right)$$

$$\{P=4.32\}$$

Rekka-auton paneelit tuottavat n. 4,3kW tehon.

2. Ratkaistaan kääntäen verrannollisuuden yhtälöstä valaistusvoimakkuus E:

$$\mathrm{solve}\left(\frac{2500}{E}=\frac{100^2}{45^2},E\right)$$

$$\{E=506.25\}$$

Valaistusvoimakkuus metrin päässä on n. 510 luksia.

8. Lenkkeilevä sensori (12 p.)

Matematiikan sensori haluaa selvittää juoksu- ja kävelyvauhtinsa. Hänellä on käytettävissään seuraavat tiedot:

23.11.2023: Yhteensä 31,7 min, josta juoksua 25,0 min ja loput kävelyä, kokonaismatka 4,05 km.

25.11.2023: Yhteensä 39,5 min, josta juoksua 28,0 min ja loput kävelyä, kokonaismatka 4,30 km.

Näiden kahden päivän välillä keli oli muuttunut hyvin liukkaaksi, joten sensori arveli jälkimmäisellä kerralla vauhtinsa olleen noin 7/8 edellisen lenkin vauhdista sekä kävely- että juoksuosuuksilla.

Määritä sensorin kävelyvauhti ja juoksuvauhti ensimmäisellä lenkillä yksikkönä km/h.

Merkitään ensimmäisen lenkin juoksunopeutta vj ja kävelynopeutta vk. Annetuista tiedoista saadaan yhtälöpari, josta nämä muuttujat ratkaistaan.

$$\left\{\begin{array}{l} vj*\frac{25}{60}+vk*\frac{6.7}{60}=4.05 \\ \frac{7}{8}*vj*\frac{28}{60}+\frac{7}{8}*vk*\frac{11.5}{60}=4.30 \end{array}\right|_{vj,\,vk}$$

$$\{vj=8.197769198, vk=5.67996568\}$$

Ensimmäisen lenkin juoksunopeus oli n. 8,2km/h ja kävelynopeus n. 5,7km/h.

9. Pianon osto (12 p.)

Auri haluaa ostaa uuden pianon. Hän aikoo säästää $7\,500$ euroa kolmessa vuodessa ja tallettaa uudelle säästötililleen saman summan jokaisen kuukauden ensimmäisenä päivänä ennen pankkipäivän alkua. Kuinka paljon Aurin on laitettava säästöön kuukausittain, kun hänen säästötilinsä nettokorkokanta on $2{,}5\ \%$ ja korko maksetaan tilille kerran vuodessa? Tehtävässä oletetaan, että kaikki kuukaudet ovat samanpituisia. Tilillä olevat rahat kerryttävät korkoa koko sen ajan, jonka ne ovat tilillä.

Olkoon kuukausittaisen talletuksen suuruus x. Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 12kk, seuraava 11kk, jne. Viimeinen talletus kasvaa korkoa yhden kuukauden. Kuukausikoron kerroin on

$\frac{1}{12}*0,025$. Ensimmäisen vuoden jälkeen tilillä on rahaa

$\frac{0.025x}{12}*(12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1)+12x$

$$\frac{973\cdot x}{80}$$

Samoin tapahtuu toisena ja kolmantena vuotena. Ensimmäisen vuoden talletus kasvaa korkoa korolle 2 vuotta ja toisen vuoden talletus vuoden. Kun nämä otetaan huomioon, saadaan yhtälö tilillä olevalle rahasummalle, jonka pitää olla 7500. Ratkaistaan tästä kuukausitalletuksen suuruus x:

$\text{solve}\left(\frac{973\cdot x}{80}*1.025^2+\frac{973\cdot x}{80}*1.025+\frac{973\cdot x}{80}=7500, x\right)$

$$\{x=200.4956838\}$$

Kuukausitalletuksen suuruus tulee olla n. 200,50 euroa.

10. Funktioiden tulkinta (18 p.)

Tarkastellaan kolmea eri funktiota, jotka on annettu seuraavan taulukon vasemmassa sarakkeessa.

Funktio	Yhtälö
$f(t) = 6\,000t + 200\,000$	$f(t) = 300\,000$
$g(t) = 50\,000 \cdot (0{,}8)^t$	$g(t) = 5\,000$
$h(t) = 2^{0{,}5t}$	$h(t) = 1\,048\,576$

Kaikille funktioille on yhteistä se, että muuttujana on aika (jonka yksikkönä voi olla esimerkiksi vuosi, kuukausi, vuorokausi, tunti tai sekunti).

1. Tarkastele funktiota f. **(6 p.)**
   i. Esitä sanallisesti käytännön elämään liittyvä esimerkki, jota funktiolla voidaan mallintaa. Kerro myös, mitä funktiossa olevat luvut ja muuttuja tarkoittavat esimerkkisi tapauksessa.
   ii. Arvioi mallin hyvyyttä ja käyttökelpoisuutta valitsemassasi esimerkissä.
   iii. Ratkaise taulukon oikeassa sarakkeessa annettu yhtälö. Tulkitse sanallisesti, mitä esimerkissäsi tarkoittaa se, että funktio saa yhtälössä annetun arvon.
2. Tarkastele funktiota g ja tee tehtävät i–iii, kuten funktion f tapauksessa edellä. **(6 p.)**
3. Tarkastele funktiota h ja tee tehtävät i–iii, kuten funktion f tapauksessa edellä. **(6 p.)**

1.

i) f(t)=6000t+200000: Ajan alussa t=0 kaupungissa on ihmisiä 200000 ja määrä lisääntyy 6000 ihmistä vuodessa. Muuttuja t on vuosien määrä ja kasvu on lineaarista.

ii) Malli toimii hyvin lyhyellä aikavälillä, mutta jossain vaiheessa kaupungin kasvun on hidastuttava.

iii) Ratkaistaan, kuinka kauan aikaa kuluu vuosina siihen, että kaupungin väkiluku on 300000:

solve(6000t+200000=300000,t)

{t=16.66666667}

Tasaisen kasvun mukaan kaupungin väkiluku on 300000 n. 16,7 vuoden kuluttua siitä, kun se oli 200000. Harva kaupunki kasvaa näin tasaisesti yli 16 vuotta, joten mallin ennuste ei ole kovin luotettava.

2.

i) $g(t)=50000*(0.8)^t$: Ajan alussa t=0 kaupungissa on 50000 ihmistä ja määrä vähenee 20% vuosittain. Muuttuja t on vuosien määrä ja väheneminen on ekponentiaalista.

ii) Malli toimii hyvin, mikäli kaupungin ihmisten määrä todellä vähenee 20% vuosittain. Pitkällä aikavälillä kaupunki kuihtuu olemattomiin.

iii) Ratkaistaan, kuinka monta vuotta kuluu siihen, että 50000 ihmisen kaupunki on pienentynyt 5000 ihmisen paikkakunnaksi.

solve($50000*(0.8)^t$=5000,t)

{t=10.31885116}

Aikaa kuluu n. 10,3 vuotta.

3.

i) $h(t)=2^{0.5t}$: Ajan alussa t=0 on 1 atomiydin, joka halkeaa kahdeksi joka toinen attoosekunti. Muuttuja t on siis aika 2 attosekuntia. Ketjureaktio jatkuu ja jokainen syntynyt atomiydin halkeaa kahdeksi ajallisesti tasaisin välein.

ii) Malli toimii hyvin niin kauan kuin ketjureaktion on mahdollista jatkua ja halkeavia atomiytimiä riittää.

iii) Ratkaistaan, kuinka monta kahden attosekunnin jakson kuluttua atomiytimiä on 1048576:

solve($2^{0.5t}$=1048576,t)

{t=40}

Aikaa tähän kuluu 80 attosekuntia.

11. Polynomifunktio (18 p.)

Valitse osatehtävissä 11.1–11.6 oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 1 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p. Vastattuasi väittämään voit vaihtaa vastausvaihtoehtoa, mutta et voi jättää väittämää enää kokonaan ilman vastausta. Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluakaan jättää tehtävää arvosteltavaksi, merkitse jokaiseen väittämään vaihtoehto ”En vastaa”.

Vastaa osatehtävään 11.7 normaalisti perustellen.

11.1 Onko seuraava väittämä tosi vai epätosi? (1 p.)

Polynomifunktion suurin arvo saavutetaan aina derivaatan nollakohdassa.

- ○ Tosi
- ◉ Epätosi
- ○ En vastaa.

11.2 Onko seuraava väittämä tosi vai epätosi? (1 p.)

Polynomifunktiolla ja sen derivaatalla voi olla nollakohta samassa pisteessä.

- ◉ Tosi
- ○ Epätosi
- ○ En vastaa.

11.3 Onko seuraava väittämä tosi vai epätosi? (1 p.)

Jos polynomifunktio on kasvava, niin se saavuttaa suljetulla välillä suurimman arvonsa välin päätepisteessä.

- ◉ Tosi
- ○ Epätosi
- ○ En vastaa.

11.4 Onko seuraava väittämä tosi vai epätosi? (1 p.)

Jos polynomifunktion derivaatta on vakio, kyseessä on toisen asteen polynomi.

- ○ Tosi
- ◉ Epätosi
- ○ En vastaa.

11.5 Onko seuraava väittämä tosi vai epätosi? (1 p.)

Polynomifunktiolla on avoimella välillä aina suurin arvo.

- ○ Tosi
- ◉ Epätosi
- ○ En vastaa.

11.6 Onko seuraava väittämä tosi vai epätosi? (**1 p.**)

Jos polynomifunktion derivaatta on negatiivinen, kun $x < 0$, ja positiivinen, kun $x > 0$, niin kyseessä on toisen asteen polynomi.

- ○ Tosi
- ◉ Epätosi
- ○ En vastaa.

11.7 Vastaa osatehtävään 11.7 normaalisti perustellen. (**12 p.**)

Tutkitaan funktiota $f(x) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$.

i. Määritä funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[1, 3]$. **(3 p.)**

ii. Derivoi funktio f ja määritä derivaatan nollakohdat. **(3 p.)**

iii. Piirrä funktion f kuvaajalle tangentti kohtaan $x = 1$ ja määritä funktion hetkellinen muutosnopeus tässä pisteessä. **(3 p.)**

iv. Millä väleillä funktio f on kasvava? **(3 p.)**

i) Keskimääräinen muutosnopeus välillä [1,3] saadaan jakamalla funktion arvojen erotus muuttujien arvojen erotuksella (sekantin kulmakerroin):

define $f(x)=x^4-9x^2+4x+12$

done

$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}$

8

Keskimääräinen muutosnopeus on siis 8.

ii) Derivoidaan funktio laskimella ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$\frac{d}{dx}(f(x))$

$4\cdot x^3-18\cdot x+4$

solve$(4\cdot x^3-18\cdot x+4=0, x)$

$\left\{x=2, x=\frac{-\sqrt{6}}{2}-1, x=\frac{\sqrt{6}}{2}-1\right\}$

iii) Hetkellinen muutosnopeus kohdassa x=1 on funktion derivaatan arvo kohdassa x=1. Tämä on samalla tangentin kulmakerroin tuossa pisteessä.

$4\cdot x^3-18\cdot x+4 \mid x=1$

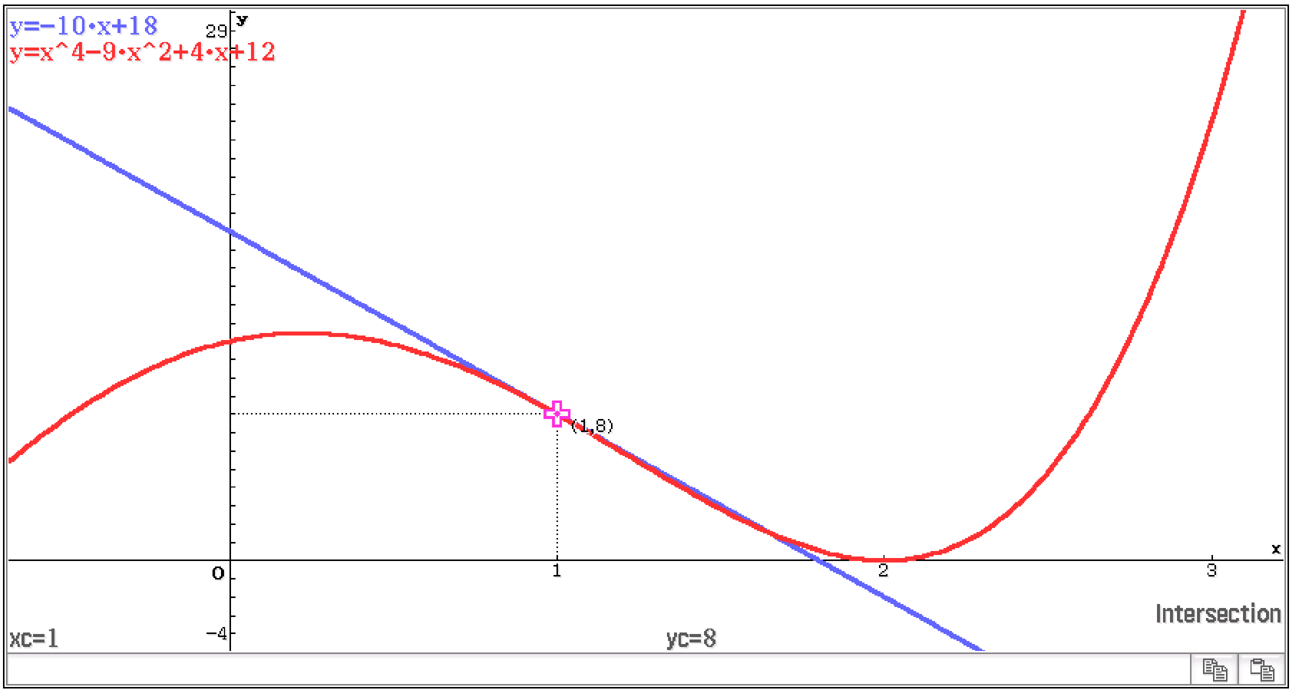
-10

Funktion arvo kohdassa x=1 on tangentin sivuamispisteen y-koordinaatti:

f(1)

8

Tangentin yhtälö on y-8=-10(x-1) ja sen kuvaaja on



iv) Funktio kasvaa, kun sen derivaatta on positiivinen tai nolla erillisessä pisteessä. Ratkaistaan tätä vastaava epäyhtälö:

solve$(4\cdot x^3-18\cdot x+4\geq 0, x)$

$$\left\{\frac{-\sqrt{6}}{2}-1\leq x\leq \frac{\sqrt{6}}{2}-1,\ 2\leq x\right\}$$

Funktio on siis kasvava väleillä $[\frac{-\sqrt{6}}{2}-1,\ \frac{\sqrt{6}}{2}-1]$ ja $[2,\infty[$.

Muistiinpanoja ja huomioita: