K14

Laske Laudatur ClassPadilla

\- Pitkä matematiikka, kevät 2014 –

"Enemmän aikaa matematiikan opiskeluun,

vähemmän aikaa laskimen opetteluun."

Casio Scandinavia

Keilaranta 4 | 02150 Espoo | info@casio.fi

Hyvä lukija,

Käsissäsi on kevään 2014 pitkän matematiikan yo-koe, joka on ratkaistu ClassPad fx-CP400 laskimen tietokoneohjelmalla ClassPad Manager. Ohjelma toimii juuri samalla tavalla kuin laskinkin, joten toisen käytön osaaminen takaa toisenkin käytön osaamisen.

Manager -ohjelma sopii erinomaisesti tällaiseen työskentelyyn ja sillä on helppo tuottaa ruudunkaappauksia laskuista, kuvaajista, diagrammeista, taulukoista, jne. Oikean hiiren napin valikossa on valmis komento sieppauskuvan ottamiseksi. Manager-ohjelma on mukana YTL:n kokeiden sähköistämisprojektissa, joten opiskelijat voivat käyttää sitä tulevaisuudessa vastatessaan sähköisissä yo-kokeissa.

Vastaustapa vuoden 2019 kokeissa on näillänäkymin samanlainen kuin tässä vihkossa käytetty – perusteluja ja ruudunkaappauksia yhteen dokumenttiin tallennettuna. Tätä vihkosta voi siis perustellusti pitää yhtenä mallina sähköisen kokeeseen vastaamisesta.

Kevään 2014 kokeessa oli joitain uudentyyppisiä tehtäviä, kuten lapsuudessa Legoilla rakentaneita ilahduttanut jokeritehtävä 14 ja derivaattafunktion kuvaajaan perustuva funktionmuodostustehtävä 11. Mukaan oli otettu hienosti myös kolmiulotteista geometriaa niin vektorien kuin tason normaalimuotoisen yhtälönkin muodossa.

Alkupään tehtävät eivät tuoneet vaatimustasoltaan kovinkaan paljon muutoksia aiempiin kokeisiin, vaikka niissä olikin derivaatan ja funktion välistä yhteyttä tutkiva tehtävä 2. Uskon silti pisterajojen hieman putoavan viimeisten vuosien tasosta, jolloin yhden pisteen menetys uhkasi jo ylimmän arvosanan saamista.

Tämä ratkaisuvihkonen on tarkoitettu niin opettajien ammattitaidon kehittämiseen kuin opiskelijoidenkin tukimateriaaliksi. Mitä keväällä 2014 kysyttiin, miten symbolisella ClassPadilla voi laskuihin tarttua, kuinka niitä voi hahmotella tai tarkistaa? Uskon tästä olevan hyötyä myös kirjoituksiin tulevaisuudessa valmistautuville abeille kertauksen yhteydessä.

Lisää tukimateriaalia on Casion kotisivuilla

http://www.casio-laskimet.fi

Sivun ”Ajankohtaista” –palstalla on mm. linkki toisen asteen opinnot kattavaan suomenkieliseen kirjaan ja lukion kursseja tiivistetysti esittelevään YouTube-kanavaan. Sivuilta löydät myös aiempien yo-kokeiden ratkaisuja, ideoita ryhmätöihin, laskinesittelyjä ja tietoa tulevista tapahtumista.

Ystävällisin terveisin,

Espoossa 19.3.2014 Pepe Palovaara

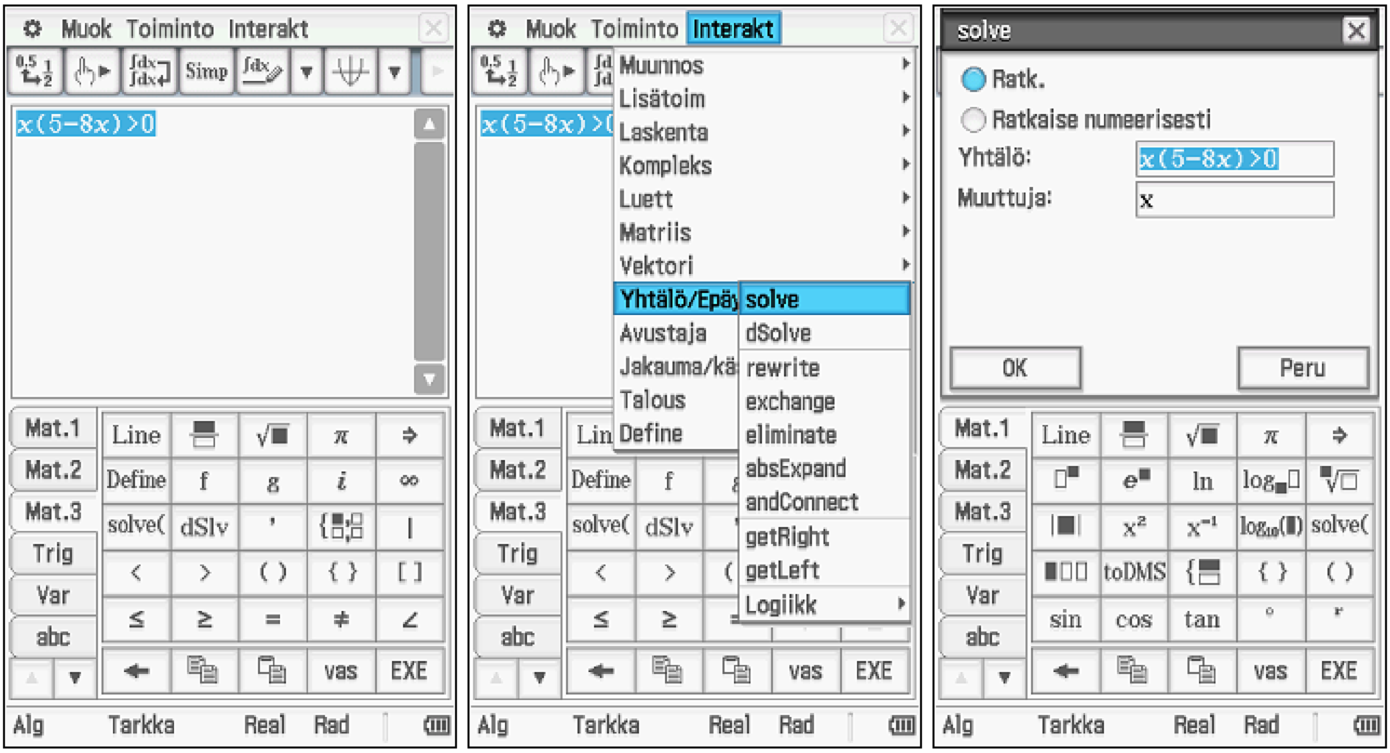
1. **a)** Ratkaise yhtälö $7(x-3)+1=x^2-1-\left(x^2-1\right)$.

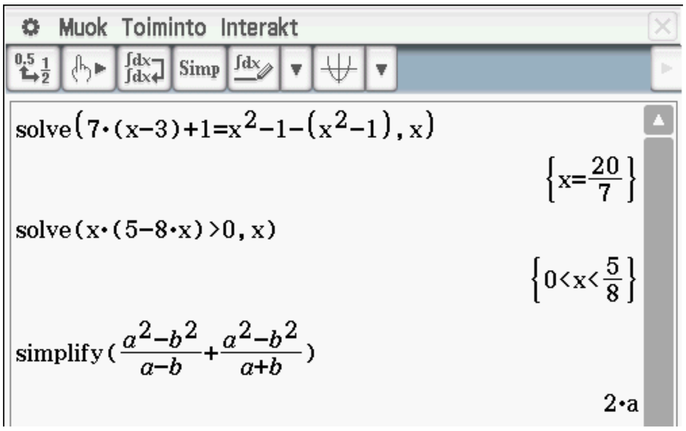
b) Millä muuttujan x arvoilla lauseke $x(5-8x)$ saa positiivisia arvoja?

c) Sievennä lauseke $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}+\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$, kun $a\neq b$ ja $a\neq -b$.

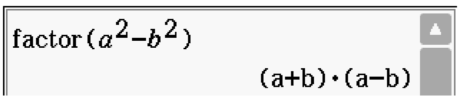
Tehtävä 1. Laskut ovat suoraan ClassPadilla laskettavia. Käyttäjän ei tarvitse kirjoittaa alla näkyviä komentoja ”solve” tai ”simplify”, vaan laskin täydentää ne käyttäjän puolesta.

Tämä onnistuu kirjoittamalla ensin lauseke tai yhtälö, maalaamalla se kosketuskynällä ja valitsemalla interaktiivisesta valikosta haluttu toimenpide:



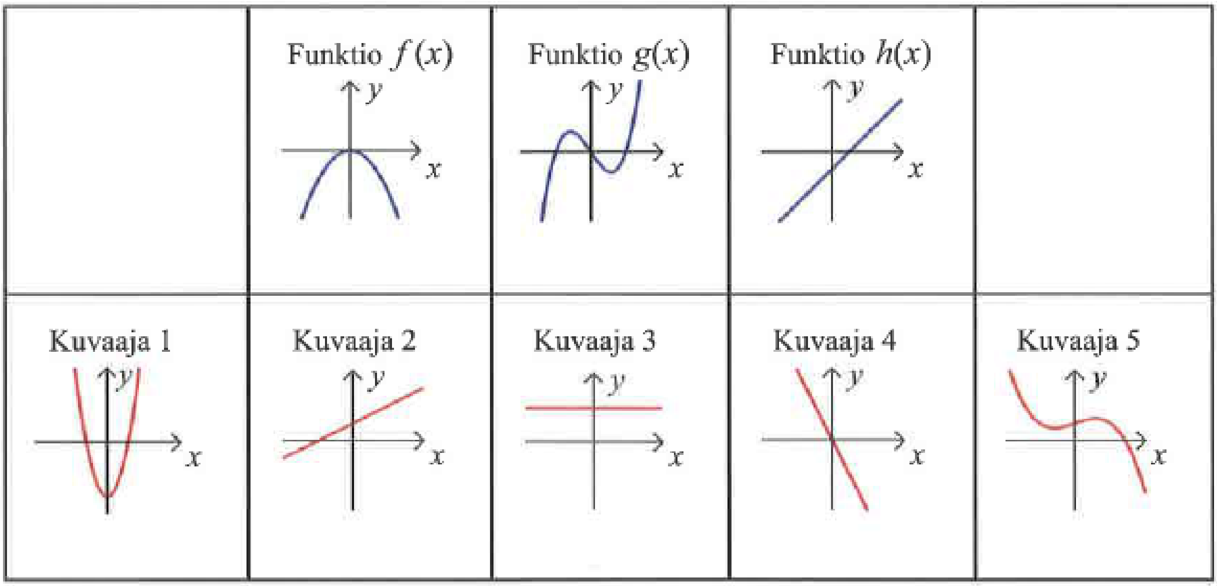


Huomaa, että voit halutessasi jakaa c-kohdan osoittajat ensin tekijöihin:



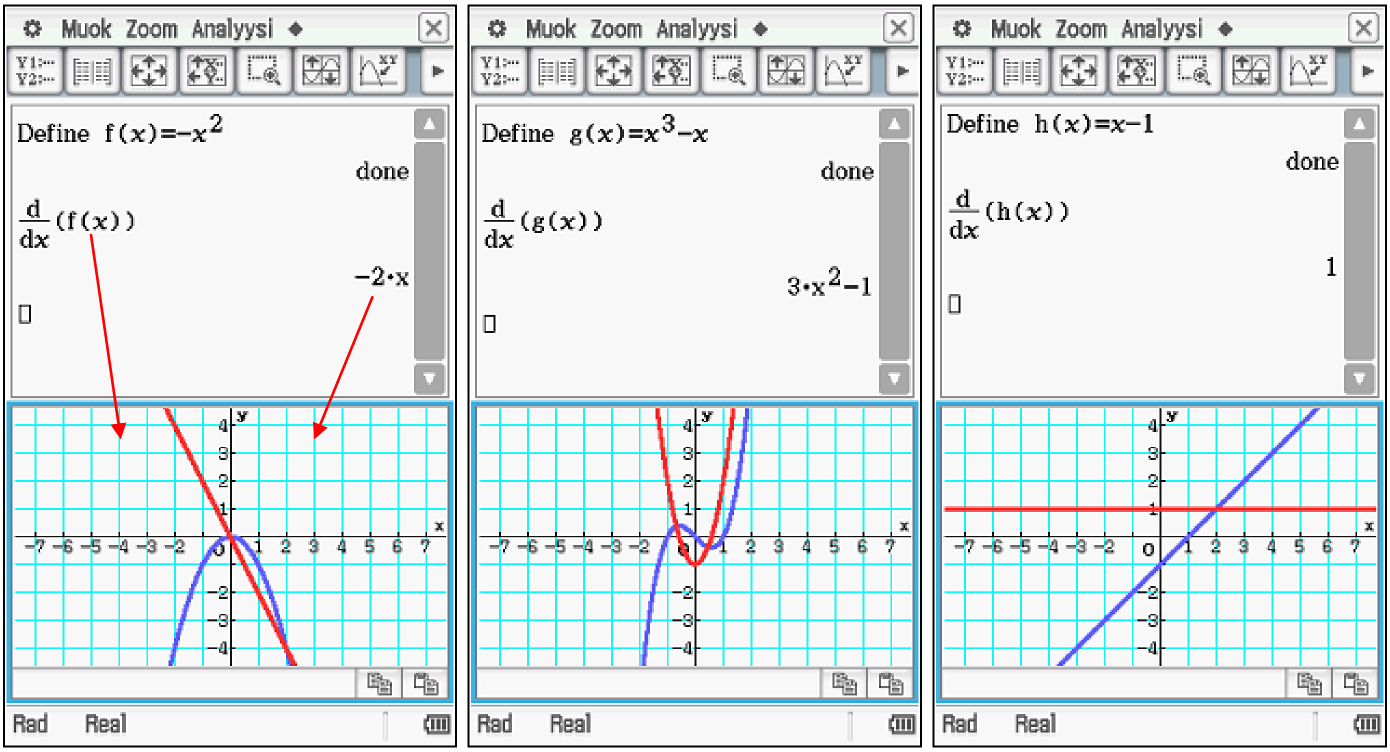
Vastaus: a) x = 20/7 **b) 0 < x < 5/8** **c) 2a**

2. Taulukon ylärivissä ovat funktioiden $f(x)$, $g(x)$ ja $h(x)$ kuvaajat. Alemmassa rivissä on viiden eri funktion kuvaajat. Näiden joukossa ovat myös derivaattafunktioiden $f'(x)$, $g'(x)$ ja $h'(x)$ kuvaajat.



Tehtävä 2. Symbolisella laskimella voi tutkia tehtävän kaltaiset yhteydet funktion ja sen derivaattafunktion välille, kunhan osaa muodostaa peruspolynomifunktioiden kuvaajat. Tarkkoja funktioiden lausekkeita ei tarvita, vaan riittää hahmotella samankaltaisten funktioiden kulku.

Kuvaajat saa piirrettyä raahaamalla halutun lausekkeen koordinaatiston päälle. Alla olevissa kuvissa funktioiden kuvaajat ovat sinisellä ja vastaavien derivaattafunktioiden kuvaajat punaisella.



Vastaus:

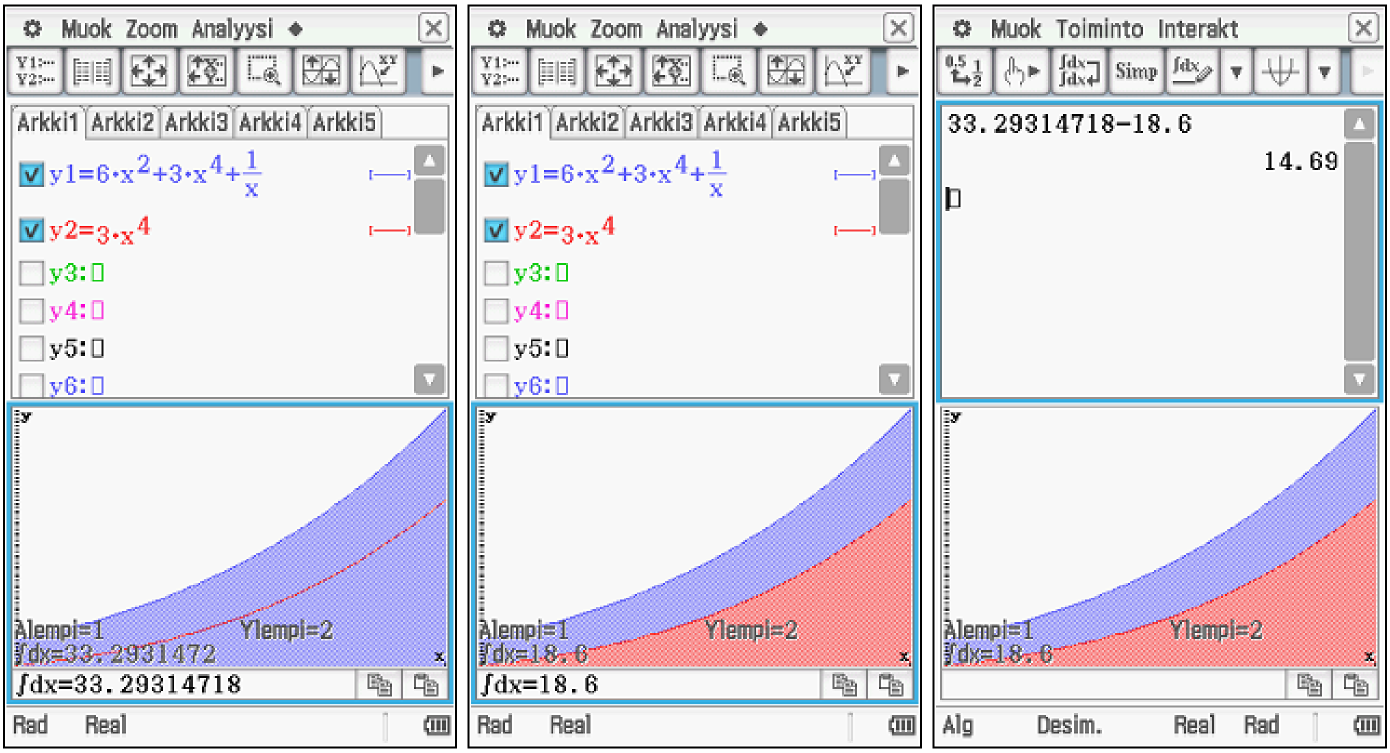
Funktio	f(x)	g(x)	h(x)
Derivaatan kuvaajan numero	4	1	3

3. a) Käyrät $y = 6x^2 + 3x^4 + \dfrac{1}{x}$ ja $y = 3x^4$ sekä suorat $x = 1$ ja $x = 2$ rajaavat tasoalueen. Laske sen pinta-alan likiarvo kahden desimaalin tarkkuudella.

b) Määritellään funktiot $f(x) = x^3 - 3x$ ja $g(x) = \dfrac{1}{2} f(2x)$, kun $x \in \mathbf{R}$. Laske derivaatta $g'(1)$.

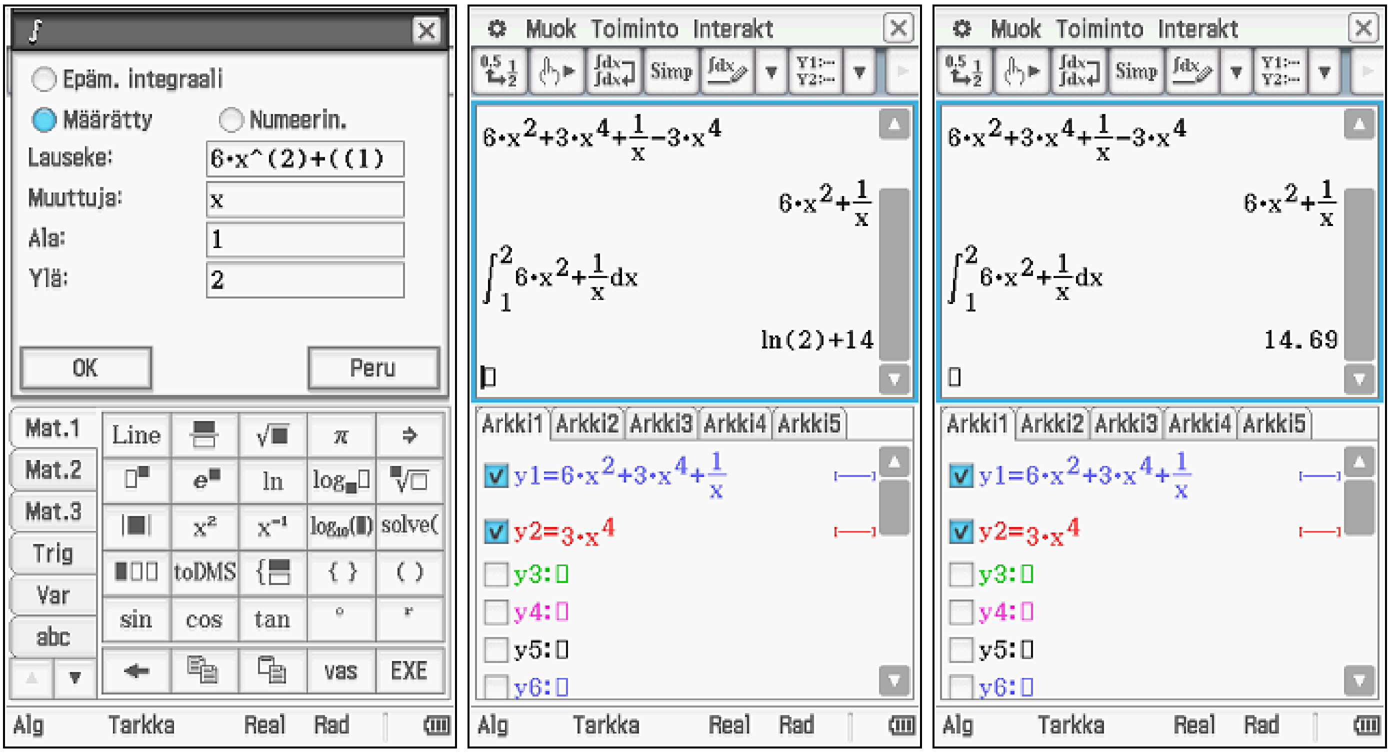
Tehtävä 3. a) Hahmotellaan tehtävän tilanne ClassPadin Käyrä&Taulukko -sovelluksessa. Määrätään piirtoalue välille [1, 2] ja sovitetaan käyrät y-akselin suunnassa ikkunaan. Käyrillä ei ole leikkauspisteitä.

Lasketaan kysytyn alueen pinta-alan likiarvo kahden alueen pinta-alojen erotuksena:



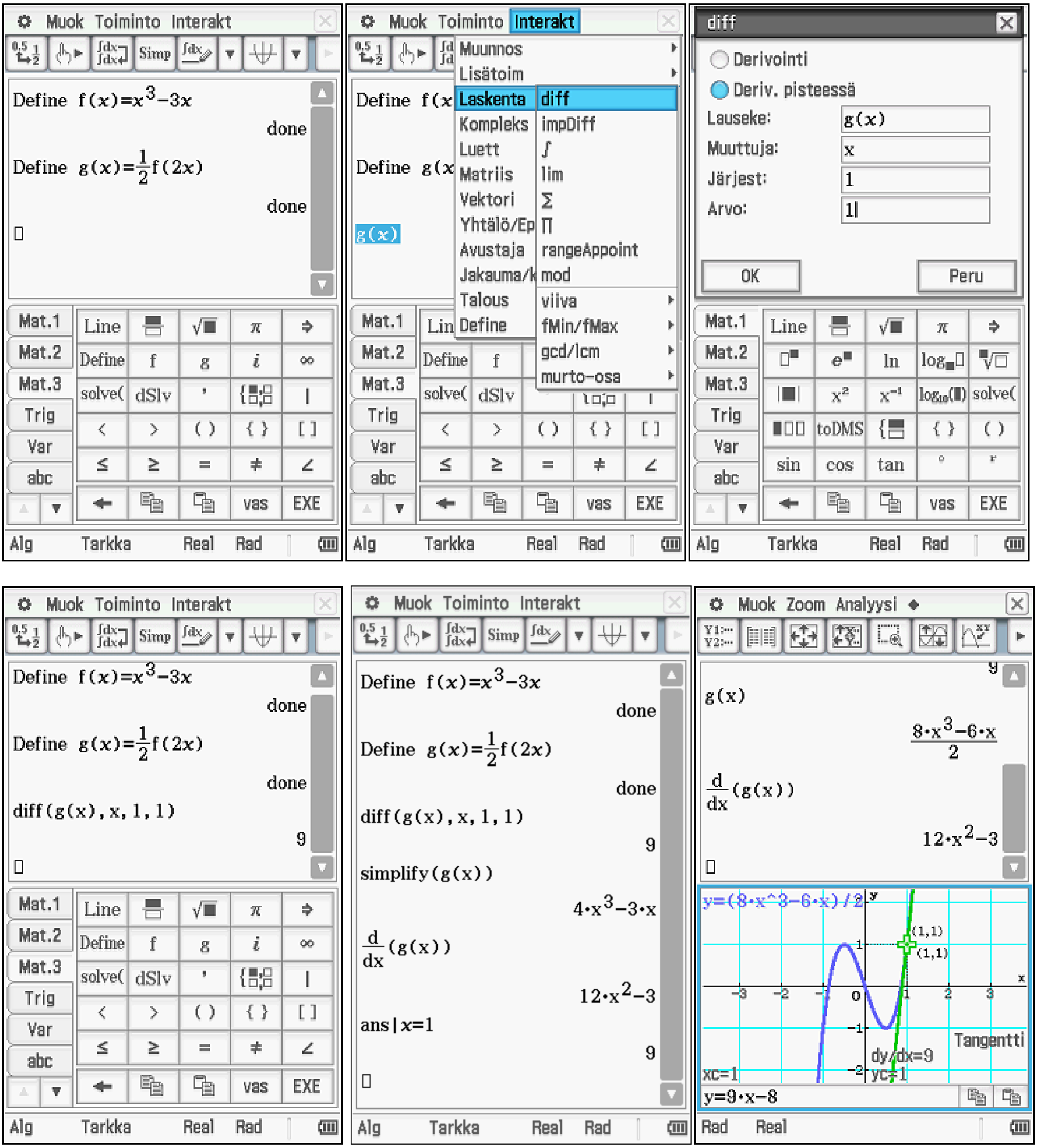
Vastaustarkkuuden kysyttyyn kahteen desimaaliin voi muuttaa asetuksista Perusmuoto -> Numeromuoto -> Korj. 2. Vastaustarkkuuden voi vaihtaa erilaiseksi vaikka jokaiselle laskuriville.

Sama tehtävä voidaan laskea pääsovelluksessa algebrallisesti esim. integoimalla käyrien erotusfunktiota:



b) Määritellään funktiot f ja g laskimeen. Derivoidaan funktio g(x). Tämä on helpointa, kun maalataan funktio g(x) ja valitaan interaktiivisesta valikosta ”Derivaatta pisteessä”.

Viimeisissä kahdessa kuvassa laskuun on sisällytetty enemmän välivaiheita. Näkyvillä on funktion g(x) lauseke, sen derivaattafunktio ja derivaatan arvo pisteessä. Tilanne on esitetty myös graafisesti.

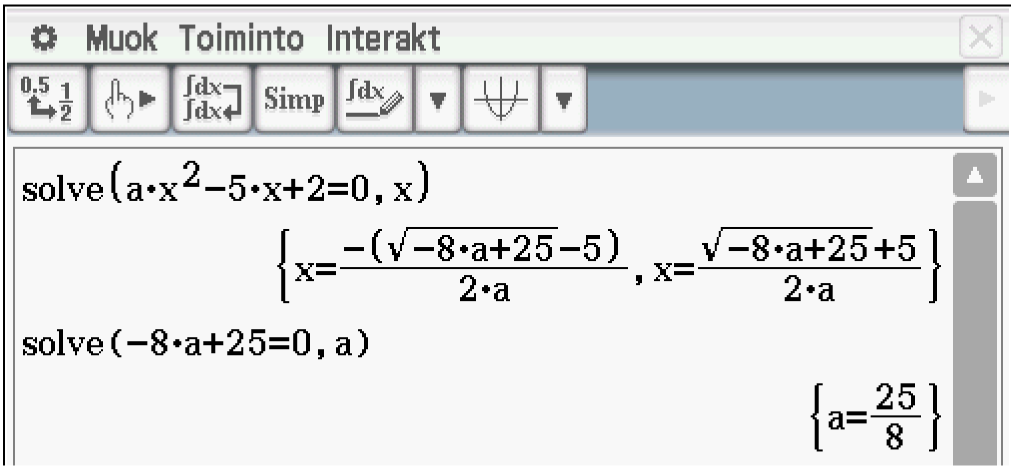


Vastaus:

a) N. 14,69 pay **b) 9.**

4. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $ax^2 - 5x + 2 = 0$ on täsmälleen yksi juuri?

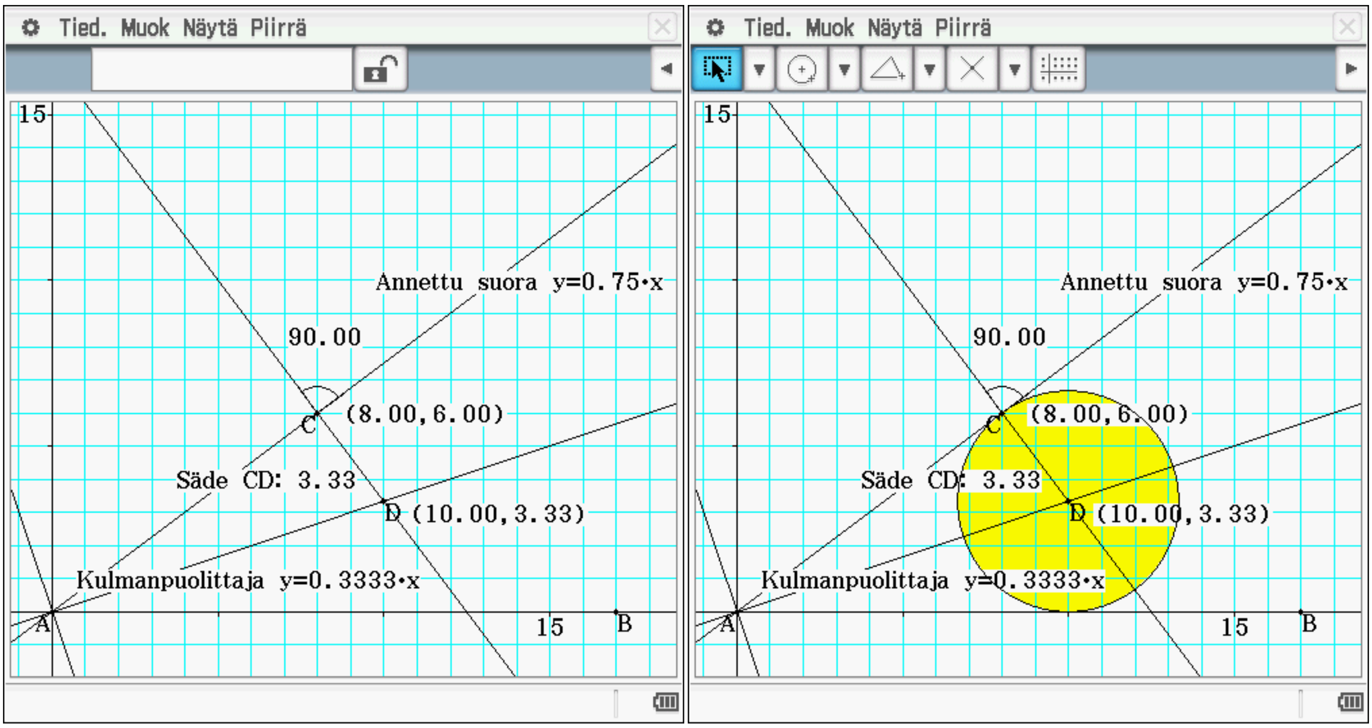
Tehtävä 4. Joko kyseessä on toisen asteen polynomifunktio (a ≠ 0), jolloin yksi juuri saadaan kun diskriminantti on nolla tai sitten kyseessä on ensimmäisen asteen polynomifunktio (a = 0), jolla on yksi juuri x = 2/5.



Vastaus: Kun a = 0 tai a = 25/8, yhtälöllä on täsmälleen yksi juuri.

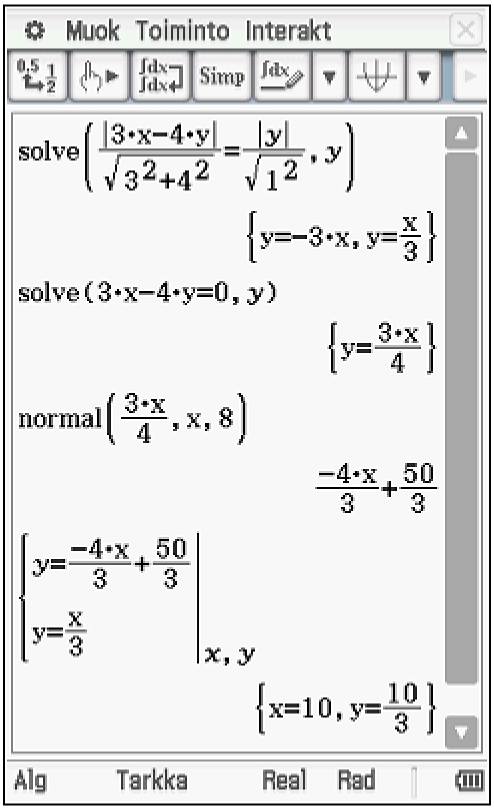
5. Ympyrä sivuaa suoraa $3x - 4y = 0$ pisteessä $(8,6)$. Lisäksi se sivuaa positiivista x-akselia. Määritä ympyrän keskipiste ja säde.

Tehtävä 5. Tehtävää voi mallintaa Geometria-sovelluksen avulla, jolloin ratkaisulle saadaan likiarvo.



Koska ympyrän keskipisteen D etäisyydet ympyrälle origosta piirretyistä tangenteista (x-akseli ja annettu suora) on säteen verran, sijaitsee keskipiste D kulman CAB puolittajalla. Lasketaan keskipiste D kulmanpuolittajan AD ja annetulle suoralle pisteeseen C(8, 6) piirretyn normaalin leikkauspisteenä.

Edellisissä kuvissa tehtävä on tehty Geometria-sovelluksessa graafisesti. ClassPad konstruoi sekä kulmanpuolittajasuoran että pisteen C kautta piirretyn normaalin. Myös niiden leikkauspisteenä saatavan ympyrän keskipisteen D likiarvo saadaan Geometria-sovelluksessa.



Viereisessä kuvassa sama tehtävä on ratkaistu Pääsovelluksessa algebrallisesti.

Tarkan kulmanpuolittajasuoran yhtälön laskemiseen voidaan valita siltä D mielivaltainen piste (x, y), jonka etäisyys kummastakin tangentista AC ja AB asetetaan samaksi. Hylätään laskeva suora, koska silloin ympyrä ei täyttäisi enää tehtävän kriteereitä.

Laitetaan annettu suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

Annetulle suoralle AC lasketaan pisteeseen x = 8 piirretyn normaalin yhtälö.

Lopuksi lasketaan yhtälöparilla saadun normaalin ja kulmanpuolittajan leikkauspisteen D koordinaatit. Ympyrän säde saadaan suoraan y-koordinaatin arvosta.

Vastaus: Keskipiste on {x=10,y=10/3} ja säde on 10/3.

6. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reaalilukuja. Millä muuttujan x arvolla summa $(x-a_1)^2+\cdots+(x-a_n)^2$ on mahdollisimman pieni?

Tehtävä 6. Soveltuu paremmin ratkaistavaksi paperilla.

7. Säännöllisen tetraedrin muotoista noppaa heittämällä voi saada silmäluvuksi 1, 2, 3 tai 4. Nämä ovat kaikki yhtä todennäköisiä. Pelaaja heittää yhtä aikaa tetraedrin muotoista ja tavallista noppaa ja laskee silmälukujen summan.

a) Määritä kaikkien mahdollisten silmälukujen summien todennäköisyydet.

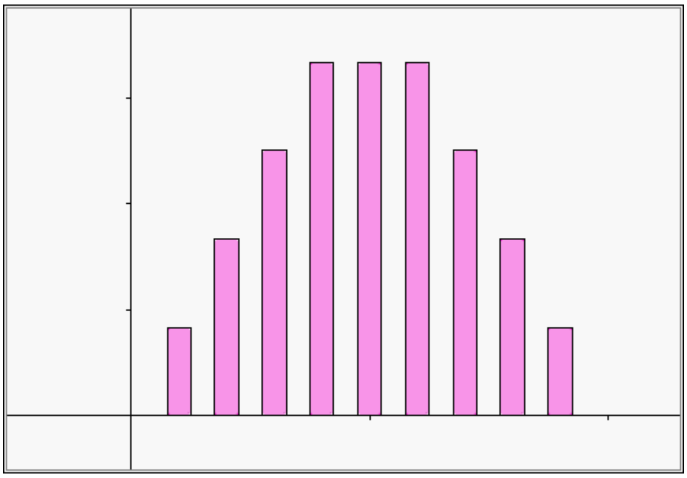
b) Määritä silmälukujen summan odotusarvo.

Tehtävä 7. Tehtävä voidaan miettiä esim. tekemällä 4 x 6 –ruudukko, jonka nurkkiin lasketaan pistelukujen summa. Mahdollinen pistelukujen summien arvojoukko on {2, 3, ..., 10} ja vastaavat frekvenssit ja pistetodennäköisyydet on taulukoitu ClassPadin Taulukko –sovelluksella.

Sinisellä merkityn sarakkeen alle on laskettu odotusarvo, joka voitaisiin perustella suuruusjärjestykseen asetettujen arvojen luettelon keskimmäiseksi arvoksi myös jakauman symmetrian perusteella. Oikeanpuoleisessa kuvassa on lisäksi silmälukujen summan jakauma graafisesti:

	A	B	C	D
1	Arvot	Frekvenssit	Pistetn	Arvo x Frekv.
2	2	1	0.0416667	2
3	3	2	0.0833333	6
4	4	3	0.125	12
5	5	4	0.1666667	20
6	6	4	0.1666667	24
7	7	4	0.1666667	28
8	8	3	0.125	24
9	9	2	0.0833333	18
10	10	1	0.0416667	10
11	Summat:	24	1	144
12			Odotusarvo:	6

=D11/B11

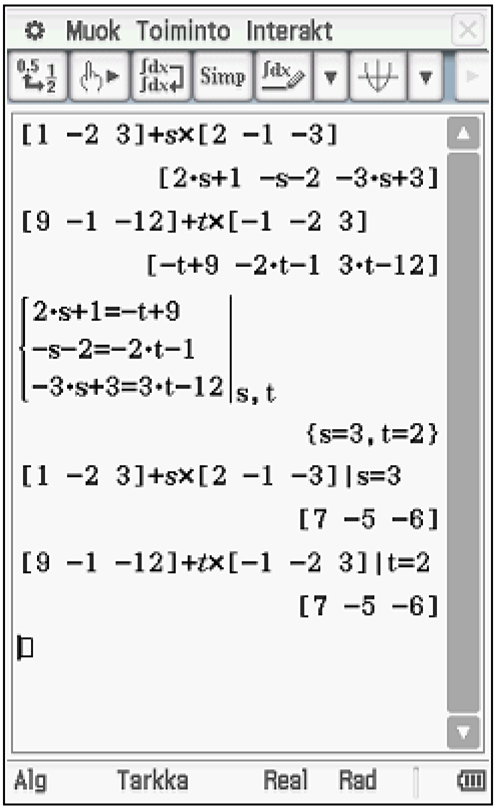


Vastaus: a) Arvojoukkoa {2, 3, ..., 10} vastaavat pistetodennäköisyydet vastaavassa järjestyksessä ovat 1/24, 2/24, 3/24, 4/24, 4/24, 4/24, 3/24, 2/24 ja 1/24. b) Odotusarvo on 6.

8. Lasersäteellä osoitetaan pisteestä $A(1,-2,3)$ vektorin $\overline{u}=2\overline{i}-\overline{j}-3\overline{k}$ suuntaan. Toisella säteellä osoitetaan pisteestä $B(9,-1,-12)$ vektorin $\overline{v}=-\overline{i}-2\overline{j}+3\overline{k}$ suuntaan. Näytä, että säteet leikkaavat toisensa, ja määritä niiden leikkauspiste.

Tehtävä 8. Tehdään molempien lasersäteiden kautta kulkeville suorille vektorimuotoiset esitykset ja merkitään ne samoiksi, jolloin vektorien komponenttien yksikäsitteisyyden vuoksi saadaan ratkaistavaksi yhtälöryhmä.

Yhtälöryhmän ratkaisu voidaan sijoittaa kumman tahansa suoran vektorimuotoon leikkauspisteen laskemiseksi:



Vastaus: Lasersäteet leikkaavat pisteessä (7, -5, -6).

Norjalaisen matemaatikon Tor Andersenin tekemä kirja ClassPadin käytöstä toisen asteen opinnoissa koostuu keskeisimmän oppiaineksen esimerkeistä. Lataa kirja ilmaiseksi osoitteesta www.casio-laskimet.fi !

9. Taso $x+2y+3z=6$ leikkaa positiiviset koordinaattiakselit pisteissä A, B ja C.

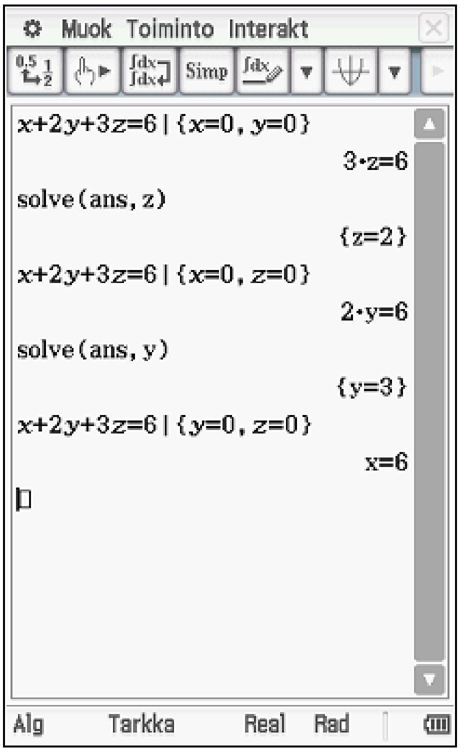
a) Määritä sen tetraedrin tilavuus, jonka kärjet ovat origossa O sekä pisteissä A, B ja C.

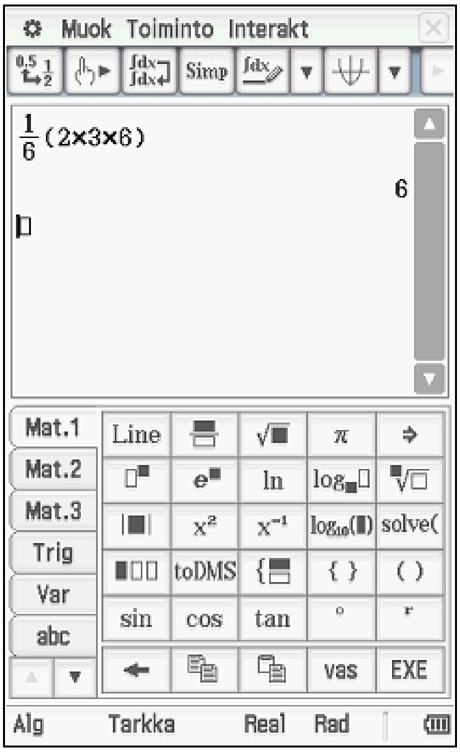
b) Määritä kolmion ABC pinta-ala.

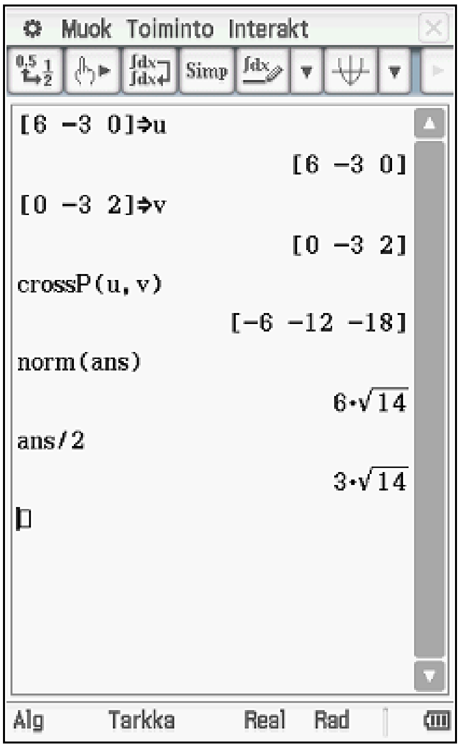
Tehtävä 9. Asettamalla vuoronperään kaksi koordinaateista nolliksi saadaan tason yhtälöstä ratkaistua kolmannen koordinaattiakselin ja tason leikkauspisteet (vasemmanpuoleinen kuva).

Tetraedrin tilavuus on 1/6 vastaavan suuntaissärmiön tilavuudesta (keskimmäinen kuva).

Kolmion pinta-ala on helpointa laskea vektoreiden avulla. Valitaan kolmion virittäjävektoreiksi esim. y-akselin ja tason leikkauspisteestä lähtevät kolmion kylkivektorit. Kolmion ala on puolet virittäjävektorien ristitulon pituudesta (oikeanpuoleinen kuva).







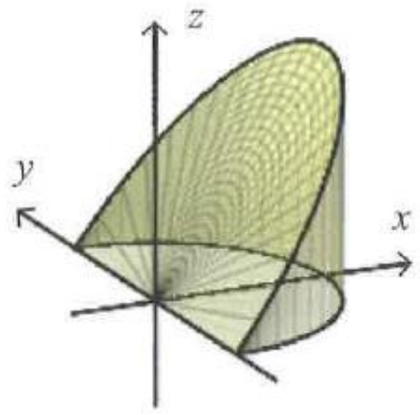
Vastaus: a) 6. **b) $3\sqrt{14}$.**

Huomautus: Käyttäjän ei tarvitse kirjoittaa laskuissa käytettyjä komentoja itse. Esimerkiksi yläpuolella vasemmanpuolimmaisessa kuvassa on käytetty interaktiivista valikkoa ja sieltä kohtaa Yhtälö/Epäyhtälö - > Solve.

Oikeanpuolimmaisessa kuvassa on ensin nimetty vektorit u ja v. Tämän jälkeen interaktiivisesta valikosta on haettu Vektorit -> CrossP, jonka jälkeen laskin kysyy kahta vektoria. Näiden paikalle voi nyt kirjoittaa u ja v, jolloin laskin muodostaa käskyn crossP(u,v) ja ratkaisee ristitulovektorin.

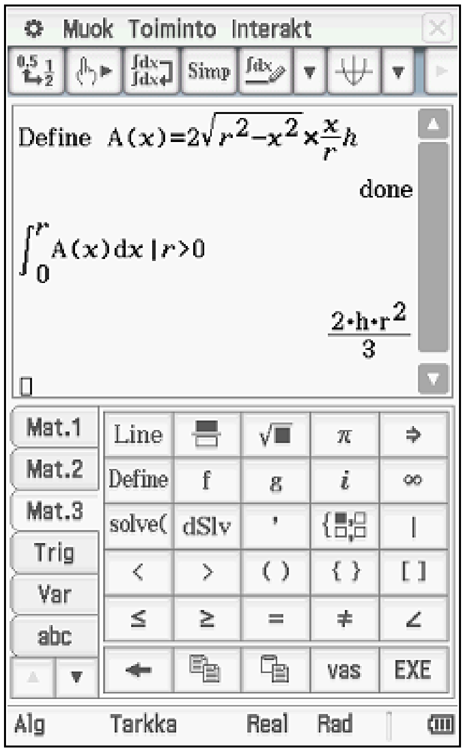
Koko ClassPadin ajatus onkin helpottaa laskimen käyttöä niin paljon kuin mahdollista. Käyttäjän pitää tietää, mitä hän haluaa laskea. Käyttäjän ei tarvitse tietää komentosarjojen oikeinkirjoitusta. Näin pääpaino opetuksessakin voidaan pitää matematiikassa laskimien tukiessa sitä luontevasti.

10. Juustoa myydään suoran ympyrälieriön muotoisessa pakkauksessa. Lieriön korkeus on h ja sen pohjan säde on r. Juusto leikataan ensin pystysuorassa suunnassa kahteen yhtä suureen osaan. Toisesta puolikkaasta leikataan vinosti kuvion osoittama pienempi pala, jonka korkeus on h. Laske tämän juustonpalan tilavuus integroimalla.



<http://www.valio.fi/tuotteet/juustot/valio-oltermanni>. Luettu 12.3.2013.

Tehtävä 10. Lasku voidaan tehdä integroimalla tehtävässä annetun kuvan mukaisen x-akselin suunnassa juustopalasta, jolloin x-akselia vastaan kohtisuoran poikkileikkauksen pinta-ala A(x) on suorakulmio ja integroimisväli [0, r].



Poikkileikkauksen kannan puolikas saadaan Pythagoraan lauseella suorakulmaisesta kolmiosta, jonka sivuina ovat r ja x. Yhdenmuotoisista kolmioista (kk) saadaan verrantoyhtälö poikkileikkauksen korkeudelle.

Vastaus: $\frac{2hr^2}{3}$

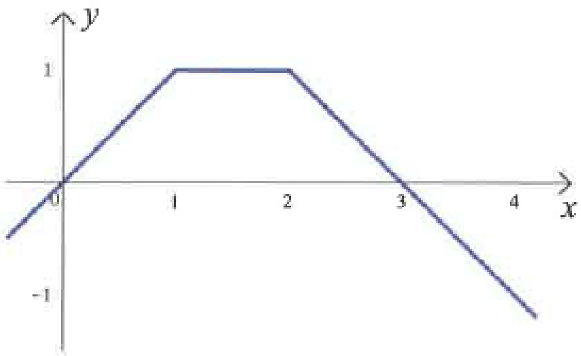
CASIO

11. Alla on funktion f derivaattafunktion kuvaaja $y = f'(x)$. Lisäksi funktio f toteuttaa ehdon $f(0) = 0$.

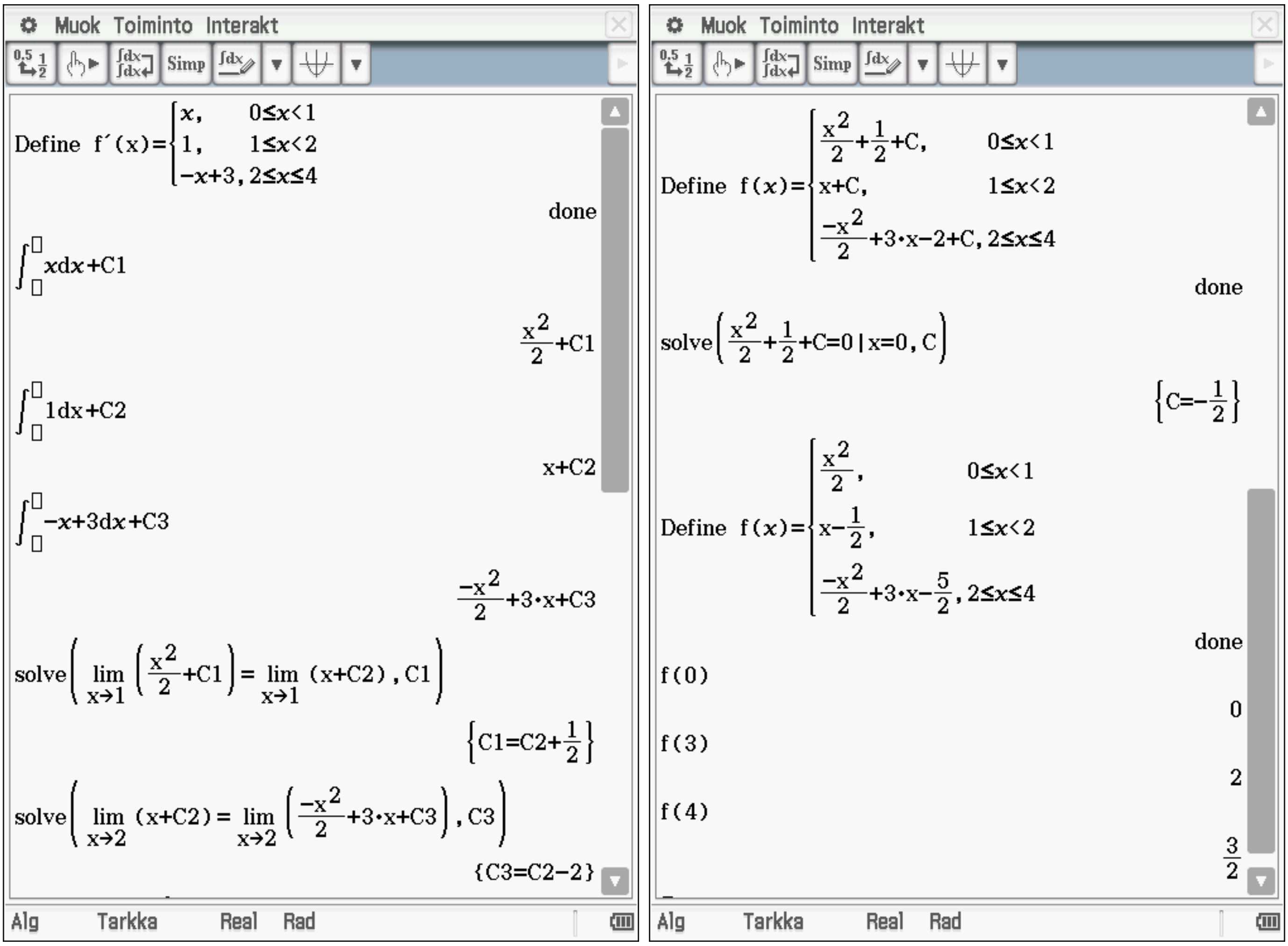
a) Kirjoita derivaatan $f'(x)$ lauseke paloittain määriteltynä funktiona välillä $0 \le x \le 4$.

b) Muodosta funktion $f(x)$ lauseke paloittain määriteltynä välillä $0 \le x \le 4$.

c) Määritä funktion f suurin ja pienin arvo välillä $0 \le x \le 4$.



Tehtävä 11. Muodostetaan ensin funktion f´(x) lauseke paloittain, jonka jälkeen integroidaan osalausekkeet ja tutkitaan integraalifunktion ominaisuuksiin liittyvä jatkuvuusehto vakion määräämiseksi kohdissa x = 1 ja x = 2.



Vakio C saadaan ehdosta f(0) = 0. Koska funktio on integraalifunktiona jatkuva, saa se suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä (kuvasta x = 0 tai x = 4) tai vastaavalle avoimelle välille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa (kuvasta x = 3).

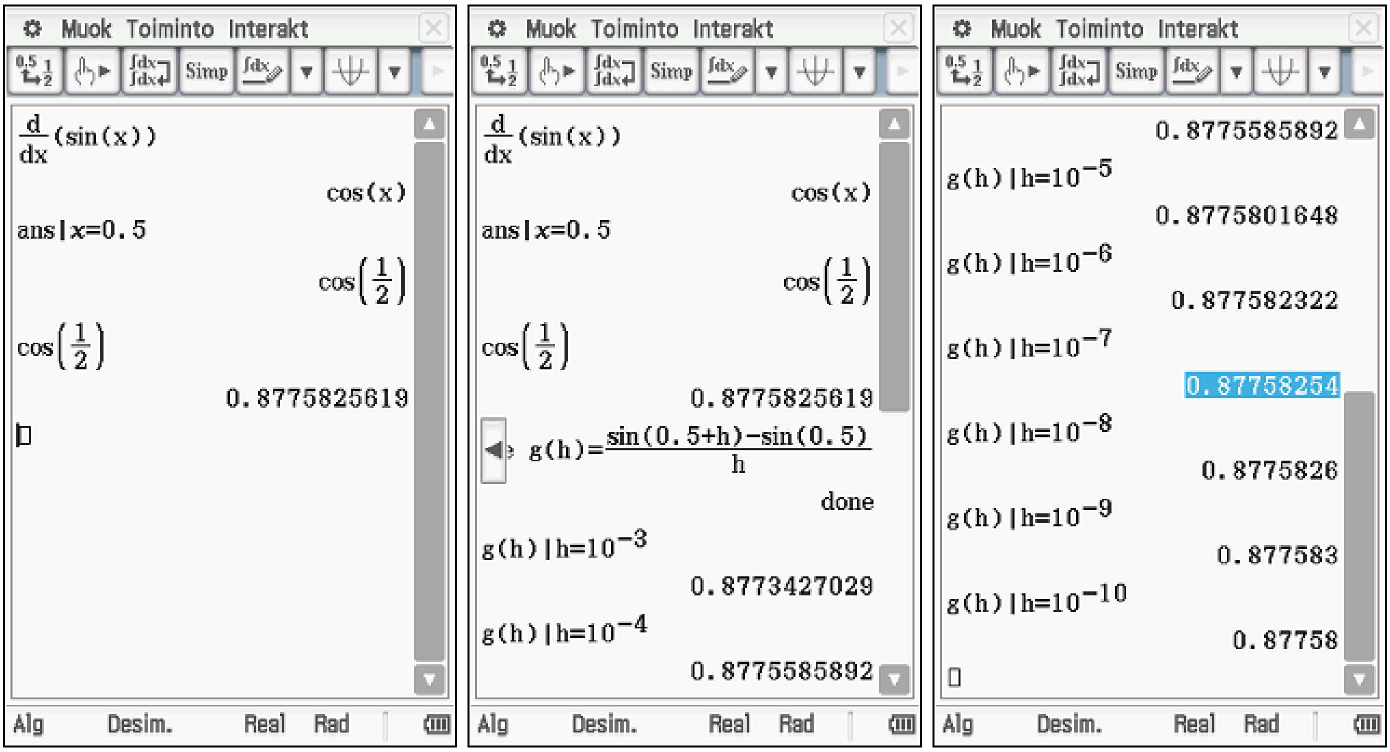
Vastaus: a) vasemmanpuoleisen kuvan ylin paloittainmääritelty funktio, b) oikeanpuoleisen kuvan alimmainen paloittainmääritelty funktio ja c) suurin arvo on 2, pienin arvo 0.

12. Funktion $f(x)$ derivaatan likiarvoja pisteessä x_0 voidaan laskea lausekkeen

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

avulla, kun $h>0$ on pieni. Oletetaan, että $f(x)=\sin x$, $x_0=0{,}5$ ja $h=10^{-p}$, kun $p=3,\ldots,10$. Mikä näistä p:n arvoista antaa parhaan likiarvon luvulle $f'(x_0)$? Tehtävässä muuttujan x yksikkö on radiaani.

Tehtävä 12. Lasketaan ensin derivaatan tarkka arvo ja laskimen antamalla tarkkuudella likiarvo. Verrataan siihen erotusosamäärästä saatuja likiarvoja.



Vastaus. Paras likiarvo saadaan, kun p = 7.

13. Tarkastellaan positiivisia kokonaislukuja n ja k, joille

$$n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+k)=1007.$$

a) Osoita, että tällaiset luvut n ja k toteuttavat yhtälön $(k+1)(2n+k)=2014$.

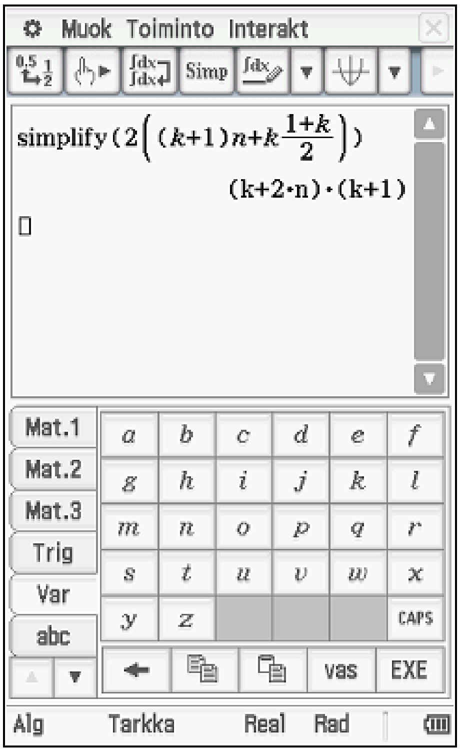
b) Määritä luvun 2014 kaikki alkutekijät.

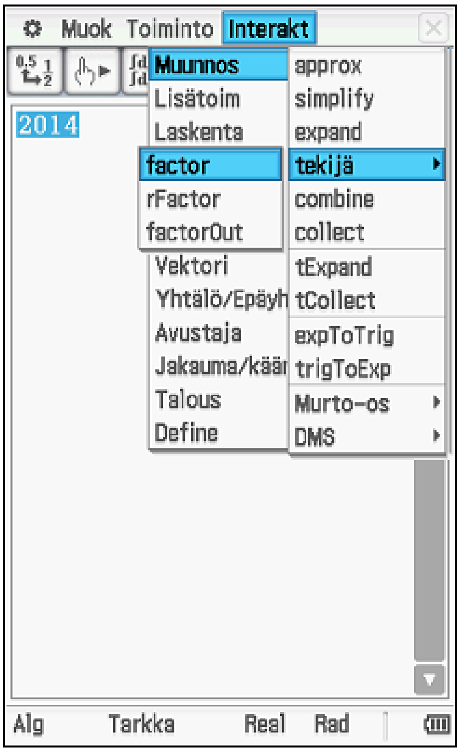
c) Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n ja k, jotka toteuttavat a-kohdan yhtälön.

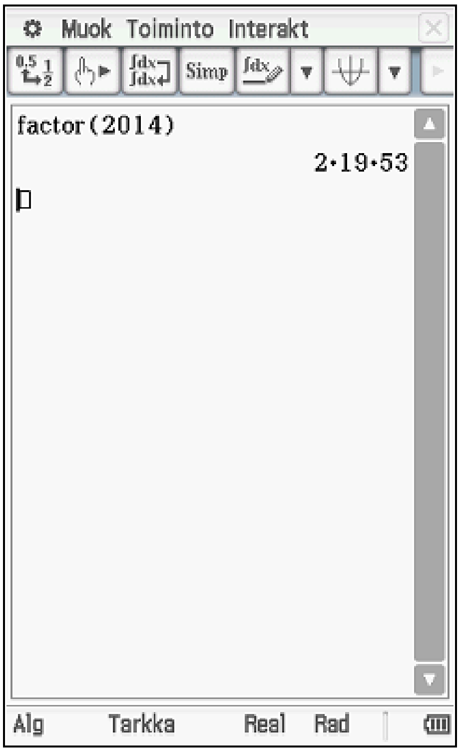
Tehtävä 13. Kerrotaan yhtälö puolittain luvulla 2, jolloin a-kohdassa riittää verrata yhtälöiden vasempien puolten yhtäsuuruutta oikeiden puolten ollessa 2014.

Kun tämän jälkeen sulut avataan alkuperäisestä yhtälöstä, saadaan yhtälön vasemmalle puolelle k+1 kpl kokonaislukuja n laskettuna yhteen aritmeettisen summan 1 + 2 + ... + k kanssa ja laskun eteen kerroin 2.

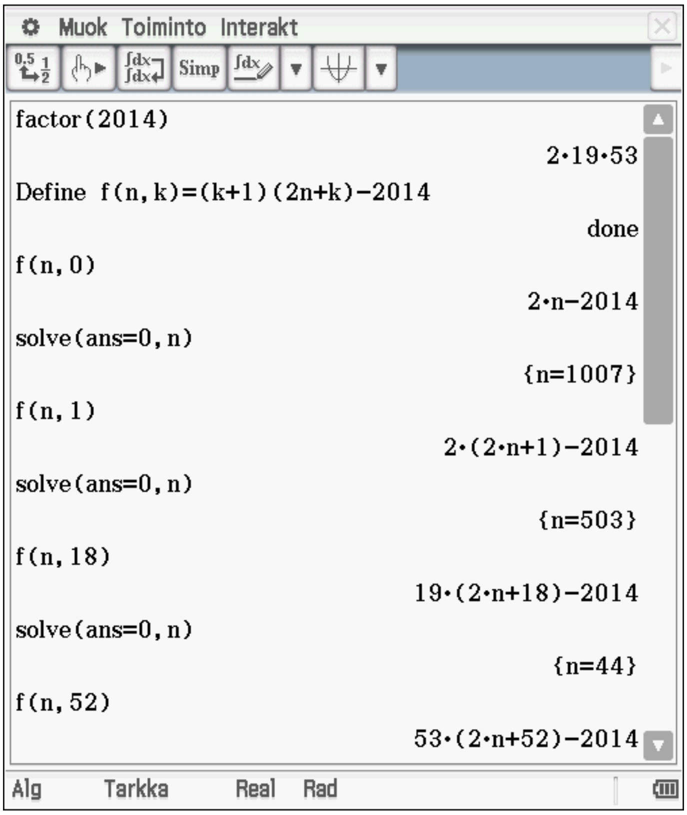
b-kohdan tekijöihin jako on kahdessa viimeisimmässä kuvassa.

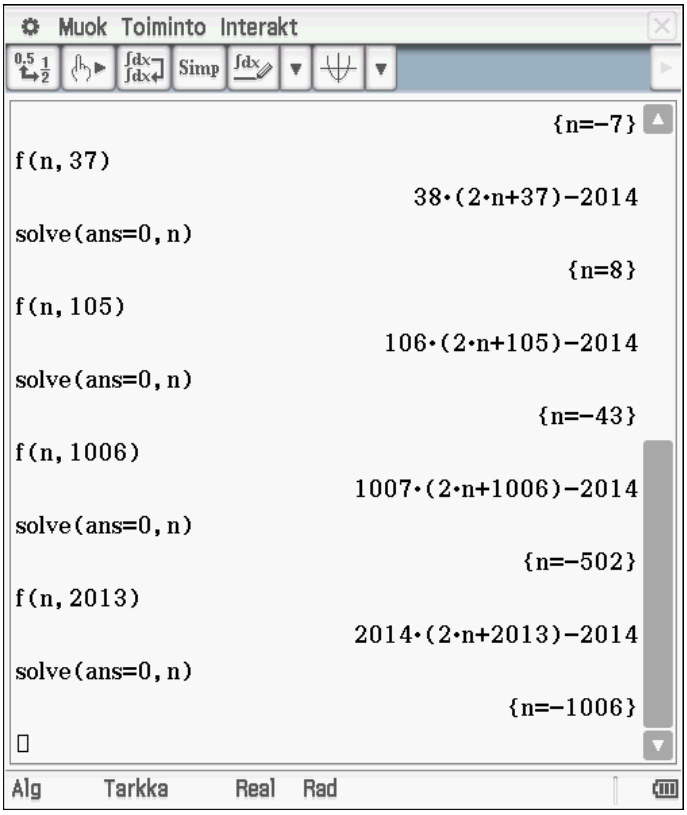






Edellisten alkulukujen lisäksi k voi saada arvon 1. Testaamalla luvun k+1 paikalle eri vaihtoehdot (1, 2, 19, 53, 2*19, 2*53, 19*53 ja 2*19*53) saadaan kysytyt positiiviset kokonaislukuparit:

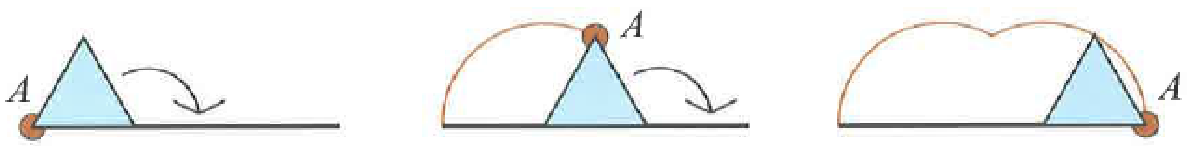




Vastaus: a) Osoitettu laskemalla. b) 2*19*53 c) (k, n) = (1, 503) tai (37, 8) tai (18, 44).

***14.** Erään tarinan mukaan ihmiskunta kokeili liikkumista säännöllisten monikulmioiden avulla, ennen kuin pyörä keksittiin.

a) Tasasivuinen kolmio kiertyy oikealle kuvion mukaisesti, kunnes kärki A osuu uudelleen alustaan. Kärki A piirtää kuvion mukaisen käyrän. Laske käyrän pituus, kun kolmion piiri on p. (2 p.)



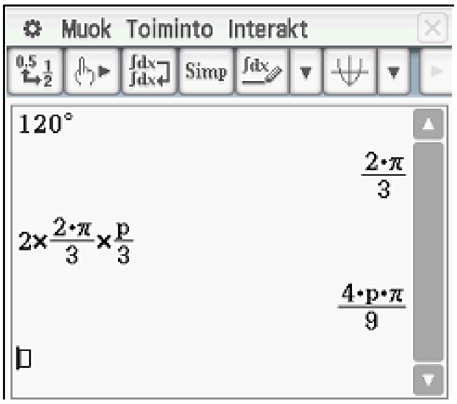
b) Hahmottele vastaavat käyrät neliön ja kuusikulmion tapauksessa. Kummassakin tapauksessa monikulmio kiertyy niin monta kertaa, että vasemmalla alhaalla oleva kärki osuu uudelleen alustaan. (2 p.)

c) Laske b-kohdan käyrän pituus neliölle, jonka piiri on p. (2 p.)

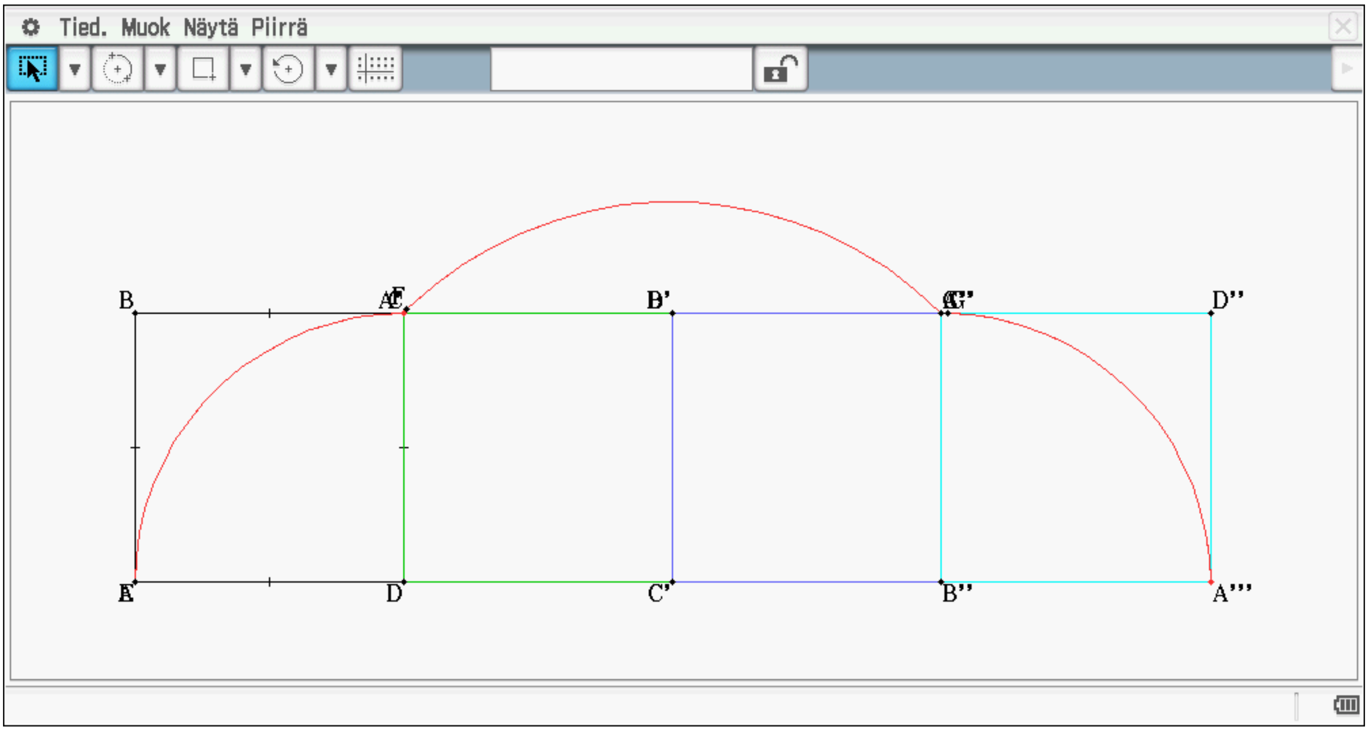
d) Laske b-kohdan käyrän pituus kuusikulmiolle, jonka piiri on p. (3 p.)

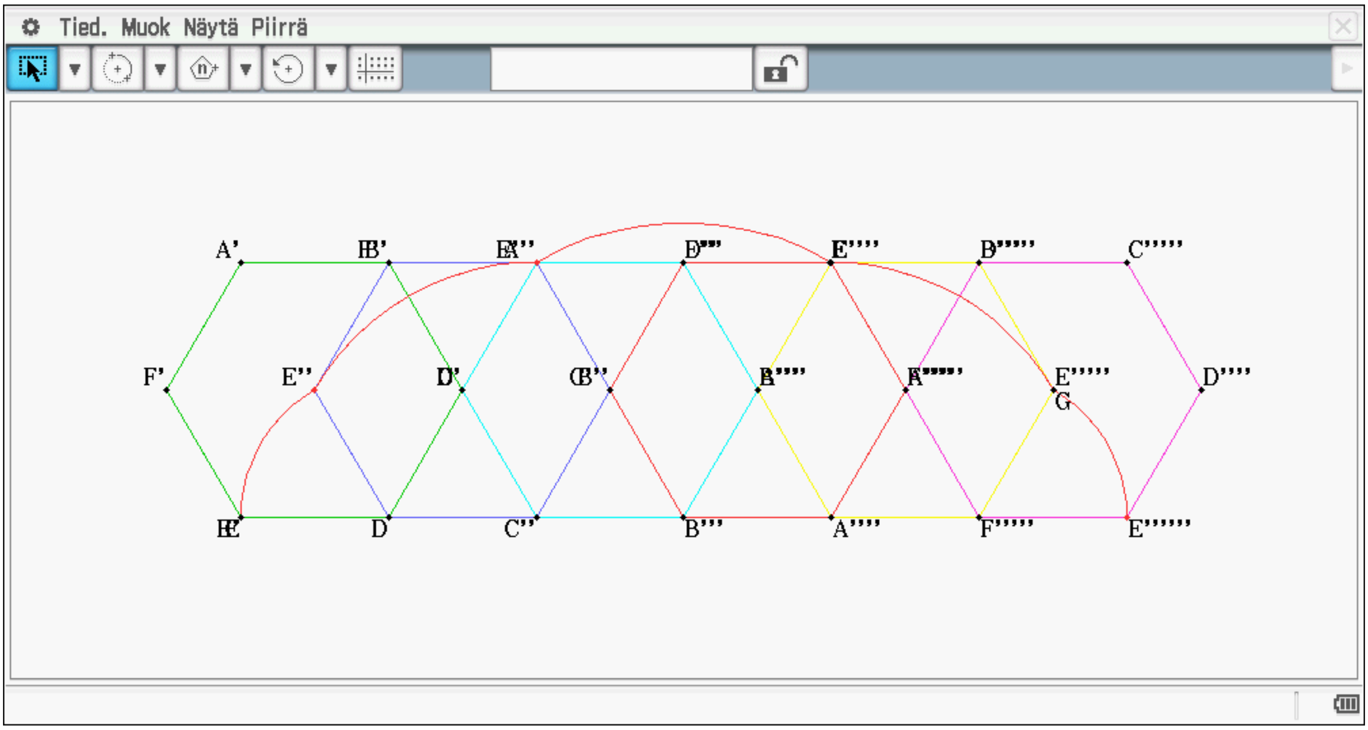
CASIO

Tehtävä 14. a) Merkitään kolmion sivua a. Käyrä muodostuu kahdesta ympyrän kaaresta, joiden säde on a ja keskuskulma 120°. Kun laskimen laskentatila on radiaanit (näytön alla oikealla), niin laittamalla asteen merkin kulman perään ClassPad muuttaa sen automaattisesti radiaaneiksi.



b) Käytetään ClassPadin Geometria-sovellusta. Kierretään neliötä yhden kulmansa ympäri 90 astetta kerrallaan ja seurataan pisteen A paikan vaihtumista. Tehdään sama 6-kulmiolle. Punaisella kaarella on merkitty pisteen A siirtyminen neliön tapauksessa ja pisteen E´ siirtyminen 6-kulmion tapauksessa.

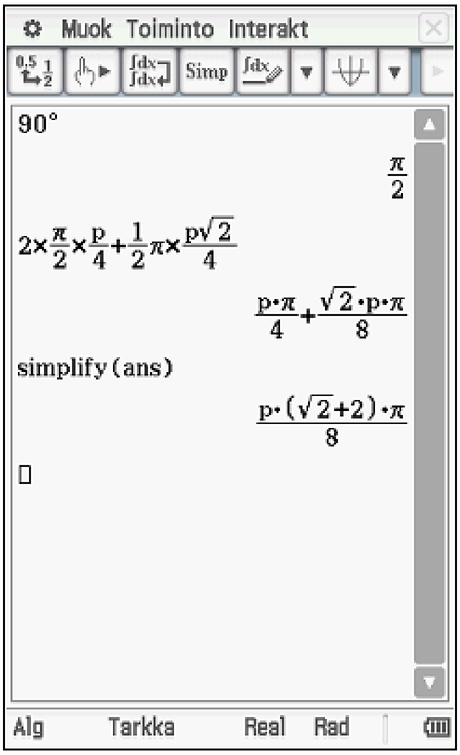


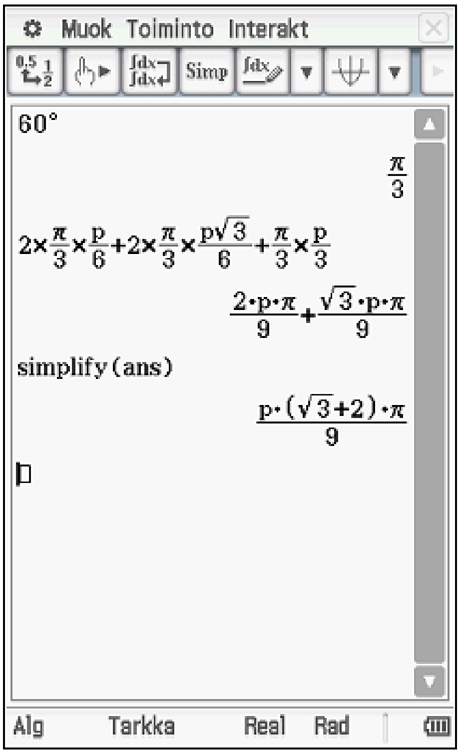


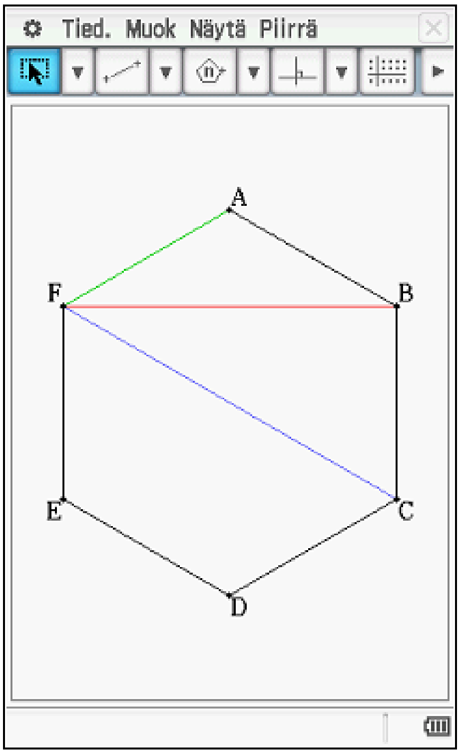
c) Käyrä koostuu yhteensä yhdestä neliön sivu säteenä piirretystä puoliympyrästä ja yhdestä 90° keskuskulmalla piirretystä kaaresta, jonka säde on neliön lävistäjä (kuva vasemmalla).

d) Käyrä koostuu keskuskulmaa 60° vastaavista ympyrän kaarista, joista laitimmaiset ovat keskenään yhtäpitkät ja niiden viereiset kaaret keskenään yhtä pitkät (keskimmäinen kuva).

Kaaria on kolmen eri säteisiä ja ne on kuvattu oikean puolimmaisessa kuvassa. Lyhimmät kaaret piirtyvät säteenään 6-kulmion sivu (vihreä), keskimmäiset kaaret säteenään 6-kulmion yhden kulman ohittava lävistäjä (punainen) ja pisimmät kaaret säteenään 6-kulmion puolittava lävistäjä (sininen).







Vastaus: a) $\frac{4\pi}{9}p$ **b) Ks. piirros.** **c)** $\frac{(\sqrt{2}+2)\pi}{8}p$ **d)** $\frac{(\sqrt{3}+2)\pi}{9}p$

Casion suosittu YouTube –kanava löytyy hakusanalla fx-CP400. Tilaa kanava ja saat tiedon päivityksistä automaattisesti! Kanavalta löytyy käyttövinkkejä kaikkiin pakollisiin kursseihin. Sopii hyvin tueksi kurssien alkuun sekä itsenäiseen opiskeluun. Myös lyhyt matikka tulossa.

CASIO

***15.** Välillä $[-1,1]$ jatkuvien funktioiden f ja g skalaaritulo $f * g$ määritellään kaavalla

$$f * g = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

Funktiot ovat *ortogonaaliset*, jos $f * g = 0$.

a) Määritellään $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ ja $f_2(x) = x^2$, kun $x \in [-1,1]$. Niiden avulla määritellään funktiot $g_k : [-1,1] \to \mathbf{R}$, $k = 0,1,2$, käyttämällä kaavoja

$$g_0(x) = f_0(x), \quad g_1(x) = f_1(x) - \frac{g_0 * f_1}{g_0 * g_0} g_0(x) \text{ ja}$$

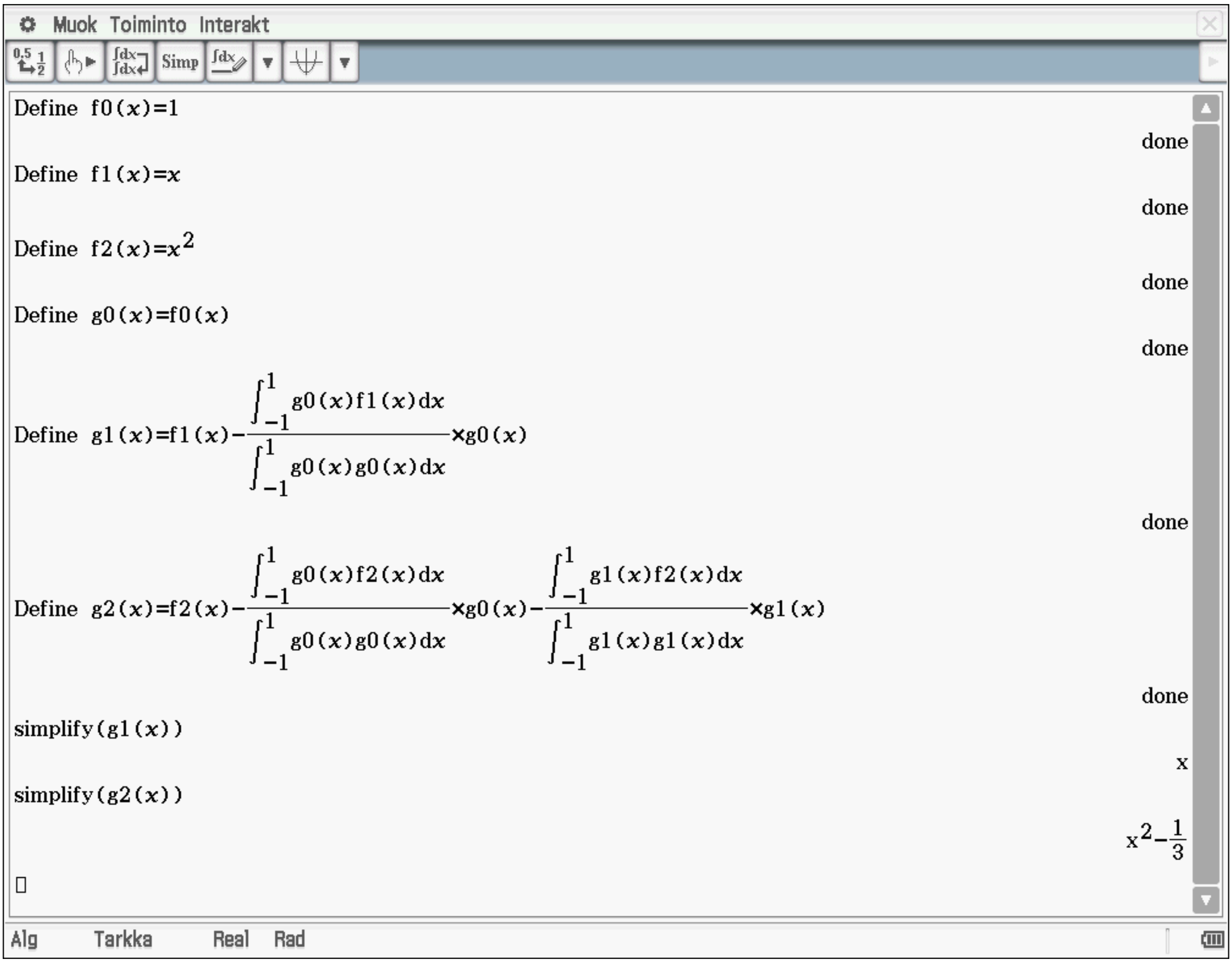
$$g_2(x) = f_2(x) - \frac{g_0 * f_2}{g_0 * g_0} g_0(x) - \frac{g_1 * f_2}{g_1 * g_1} g_1(x).$$

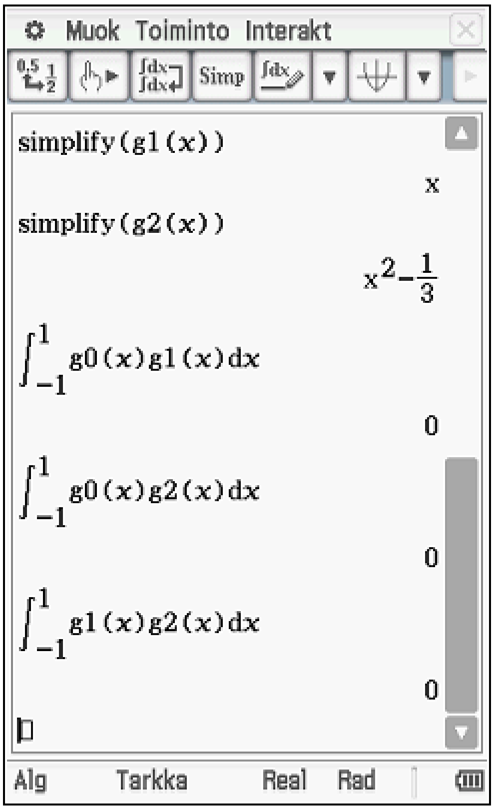
Sievennä funktioiden g_1 ja g_2 lausekkeet. (4 p.)

b) Osoita, että funktiot g_j ja g_k ovat ortogonaaliset kaikilla eri indekseillä $0 \le j < k \le 2$. (2 p.)

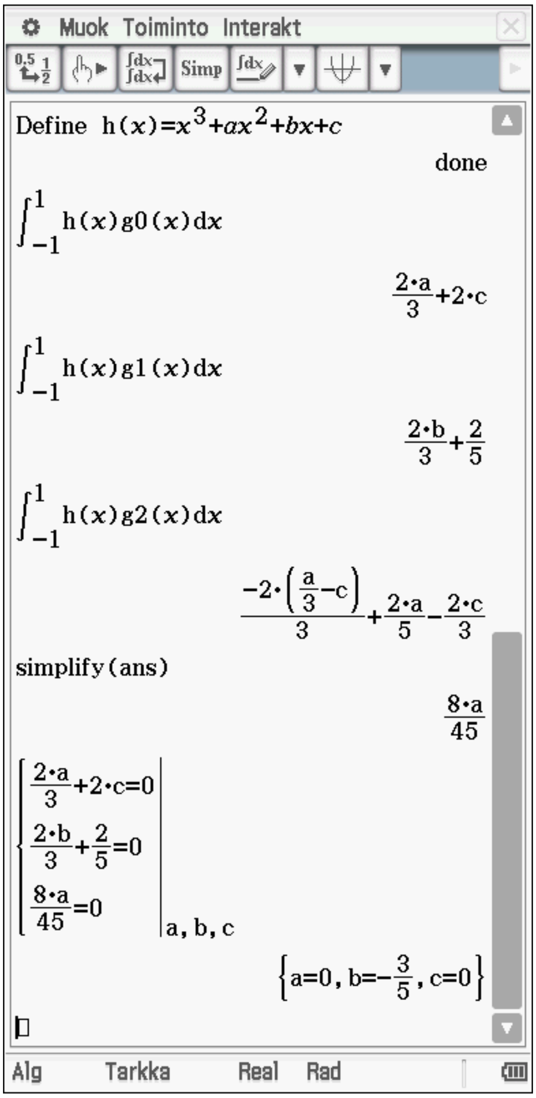
c) Olkoon $h(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Määritä vakioille a, b ja c sellaiset arvot, että funktiot h ja g_k ovat ortogonaaliset jokaisella $k = 0,1,2$. (3 p.)

Tehtävä 15. Tehtävän a-kohdan voi suoraan määritellä ClassPadiin sieventämistä varten.





b-kohdan integroinnit osoittavat, että ortogonaalisuusehto on voimassa kaikille funktiopareille (g0, g1), (g0, g2) ja (g1, g2).



c-kohdan skalaaritulojen laskemista varten määritellään funktio h(x). Skalaaritulojen pitää olla nollia, joten saadaan yhtälöryhmä. Yhtälöryhmän ratkaisusta nähdään funktion h(x) vakiot, joille ortogonaalisuus funktioiden g0, g1 ja g2 kanssa on voimassa.

Vastaus:

a) g1(x) = x, g2(x) = x^2-1/3

b) Osoitettu laskemalla ortogonaalisuus ehto.

c) Funktiot ovat ortogonaaliset vakioiden arvoilla a = 0, b = -3/5 ja c = 0.

Laskimen fx-CP400 kääntyvä näyttö auttaa pitkissä tehtävissä.

Manager-ohjelman näytön voi skaalata vapaasti halutun suuruiseksi.

CASIO