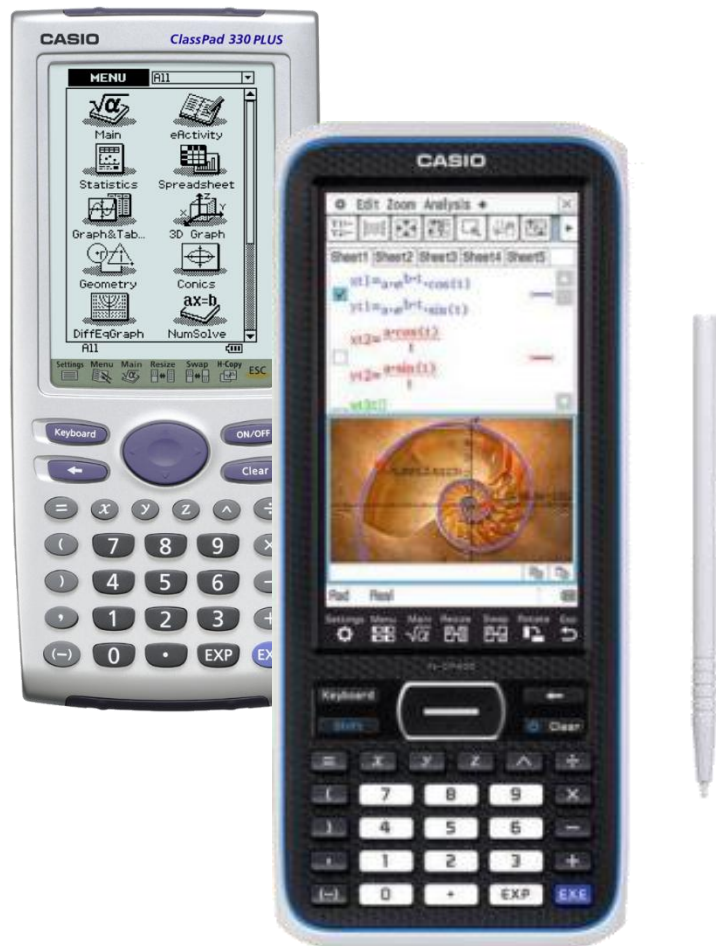


Pitkän matematiikan ylioppilaskoe ClassPadilla - kevät 2013 –



***”Enemmän aikaa matematiikan opiskeluun,
vähemmän aikaa laskimen opetteluun.”***

Arvoisa lukija,

Jälleen yhdet matematiikan ylioppilaskokeet on saatu päätökseen. Tehtävät osoittautuivat hyvin perinteisiksi ja symbolinen laskin auttoi tarkastamaan saatuja vastauksia. Osa vastauksista saadaan jopa laskimella suoraan.

Ylioppilastutkintolautakunta tarkensi viime hetkellä vielä laskimen käyttöohjeita ennen kirjoituksia. Ohjeen mukaan

”Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskinta, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.”

Nähtäväksi tässä vaiheessa jää, mitä katsotaan rutiinitehtäviksi ja mitä laajemmiksi tehtäviksi. Toinen mielenkiintoinen seikka on pisterajojen määräytyminen.

Muitakin uudistuksia on luvassa lähitulevaisuudessa ja ylioppilaskirjoitukset elävätkin hyvin muutosrikasta aikaa. Suunniteltu sähköinen ylioppilaskoe asettaa varmasti melkoiset haasteet niin koulujen infrastruktuurille kuin kokeiden laatijoille – ja viimekädessä myös tekijöille. Vuonna 2016 on määrä aloittaa ensimmäiset kokeilut vähän opiskelijoita keräävien aineiden osalta ja laajentaa testausta pikku hiljaa kaikkiin aineisiin. YTL:n uusi puheenjohtaja Patrik Scheinin vastasi Sanomalehti Kalevan kysymykseen ”Onko 2020-luvulla enää pelkästään sähköisiä yo-kokeita?” maltillisesti ”Olettaisinkin niin.”

Casio on mukana kehittämässä suomalaista osaamista matemaattisten aineiden osalta. Tätä kirjoittaessani on Casio juuri julkistanut uuden värinäyttöisen symbolisen laskimen ClassPadien sarjaansa. fx-CP400 laskin tulee Suomeen myyntiin kesällä 2013. Samoin sitä vastaava tietokoneohjelma ClassPad Manager päivittyy vastaamaan opettajien tarpeita entistä paremmin. Nämä malliratkaisut on tehty vielä hieman keskeneräisellä kokeiluversiolla, mutta sekin näyttää suoriutuvan mainiosti asetetuista haasteista.

Uusina ominaisuuksina fx-CP400 laskimessa mainittakoon käyrien välisen pinta-alan laskeminen (ks. tehtävä 8), käännettävä näyttöä pitkiä tehtäviä varten (tehtävät 3, 6, 8 ja 11) sekä suomenkielinen käyttöjärjestelmä, joka ei vielä kokeiluversiossa ollut käytössä. Muilta osin käyttöjärjestelmä on saanut paljon kiitosta ja se pysyykin olennaisesti samanlaisena. Myös laskimilla tehdyt opetusmateriaalit ovat muutoksia lukuunottamatta yhteensopivat aiempien mallien kanssa.

Tätä materiaalia saa vapaasti käyttää omassa opetuksessa ja lukiolaisten taitojen kehittämisessä. Vastaan mielelläni kommentteihin ja otan palautetta vastaan.

Toivon mukavia ja ajatuksia herättäviä lukuhetkiä näiden ratkaisujen parissa,

Kempeleessä 21.3.2013

Pepe Palovaara

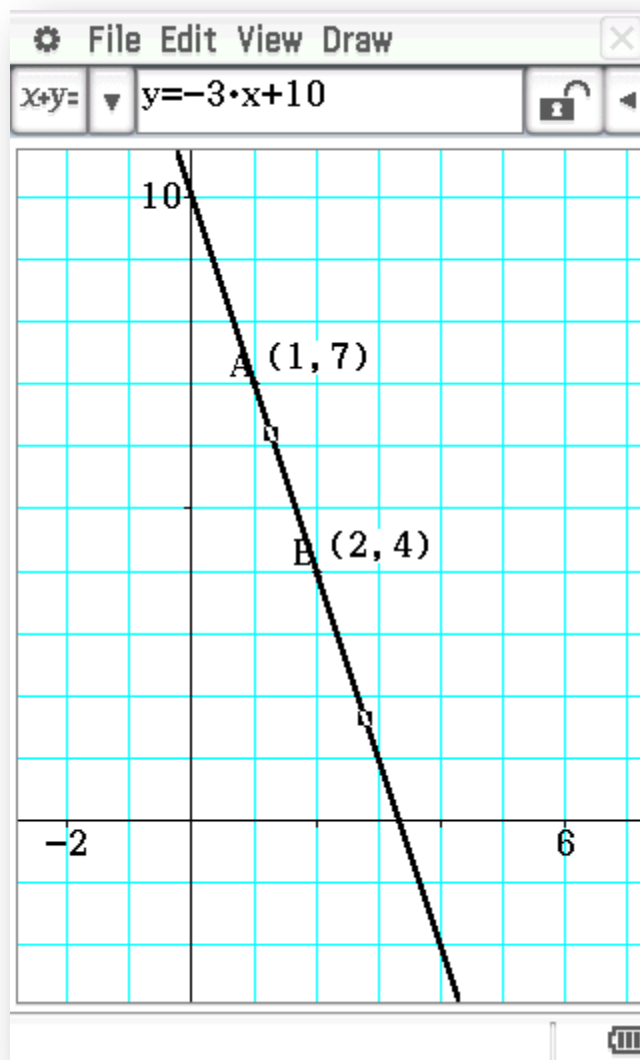
1. a) Ratkaise yhtälö $(x-4)^2 = (x-4)(x+4)$.
- b) Ratkaise epäyhtälö $\frac{3}{5}x - \frac{7}{10} < -\frac{2}{15}x$.
- c) Suora kulkee pisteiden (1,7) ja (2,4) kautta. Missä pisteessä se leikkaa x-akselin?

Ratkaisu: ClassPad fx-CP400 laskimella saadaan ratkaisut kaikkiin kohtiin. a) –kohdassa kirjoitetaan yhtälö sellaisenaan, maalataan se ja valitaan **Interactive** –valikosta komento **Solve**. b) –kohdassa samoin ja c) –kohdassa piirretään **Geometry** –sovelluksessa suora annettujen pisteiden kautta. Valitsemalla suora saadaan sen yhtälö kopioitua esim. **Main** –sovellukseen, jossa voidaan ratkaista x, kun $y = 0$.

The screenshot shows the 'Edit Action Interactive' window with the following content:

- Problem a: $\text{solve}((x-4)^2 = (x-4) \cdot (x+4), x)$ resulting in $\{x=4\}$.
- Problem b: $\text{solve}(\frac{3}{5} \cdot x - \frac{7}{10} < -\frac{2}{15} \cdot x, x)$ resulting in $\{x < \frac{21}{22}\}$.
- Problem c: $\text{solve}(0 = -3 \cdot x + 10, x)$ resulting in $\{x = \frac{10}{3}\}$.

The bottom of the window shows the mode selection: Alg, Standard, Real, Rad.



2. a) Laske funktion $f(x) = \sin(3x)$ derivaatan tarkka arvo kohdassa $x = \frac{\pi}{9}$.
- b) Määritä vektoreiden $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$ ja $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$ erotusvektori $\vec{a} - \vec{b}$ sekä erotusvektorin pituus.
- c) Kulma α toteuttaa ehdot $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ja $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Määritä luvun $\cos \alpha$ tarkka arvo.

Ratkaisu: a) –kohdassa vastauksen saa ilman derivaatan lausekettakin helposti, mutta tässä esimerkissä on ratkaistu ensin derivaattafunktio ja sijoitettu siihen annettu muuttujan x arvo. b) –kohdan ratkaisu saadaan suoraan laskimella. c) –kohdassa on käytetty taulukkokirjastakin löytyvää trigonometrian perusyhtälöä ehdolla $\cos \alpha > 0$.

The screenshot shows the 'Edit Action Interactive' window of a Casio calculator. The main display area contains the following steps and results:

- Input: $\frac{d}{dx}(\sin(3 \cdot x))$
- Result: $3 \cdot \cos(3 \cdot x)$
- Input: $3 \cdot \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{9}\right)$
- Result: $\frac{3}{2}$
- Input: $[4 \ 1 \ -7] \Rightarrow a$
- Result: $[4 \ 1 \ -7]$
- Input: $[2 \ -3 \ -5] \Rightarrow b$
- Result: $[2 \ -3 \ -5]$
- Input: $a - b$
- Result: $[2 \ 4 \ -2]$
- Input: $\text{norm}(\text{ans})$
- Result: $2 \cdot \sqrt{6}$

At the bottom, the mode is set to 'Alg'.

The screenshot shows the 'Edit Action Interactive' window of a Casio calculator. The main display area contains the following steps and results:

- Input: $\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}$
- Result: $\frac{\sqrt{15}}{4}$

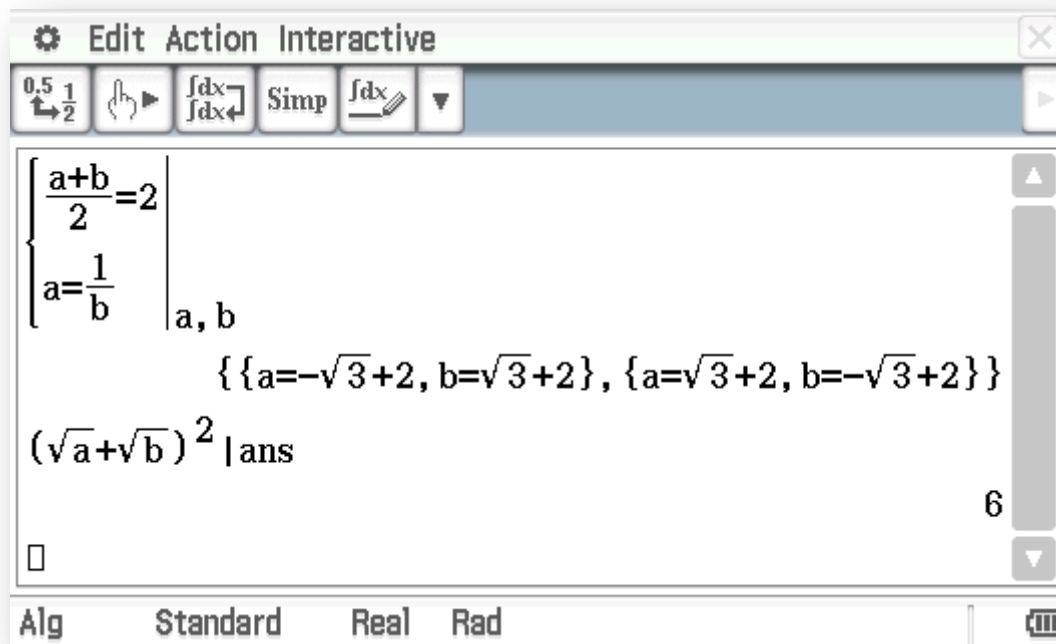
Below the display is a grid of mathematical functions:

Math1	Line	$\frac{\square}{\square}$	$\sqrt{\square}$	π	\Rightarrow
Math2	sin	cos	tan	i	∞
Math3	\sin^{-1}	\cos^{-1}	\tan^{-1}	θ	t
Trig	sinh	cosh	tanh	\circ	r
Var	\sinh^{-1}	\cosh^{-1}	\tanh^{-1}	\square^{\square}	
abc					
	\leftarrow	\square	\square	ans	EXE

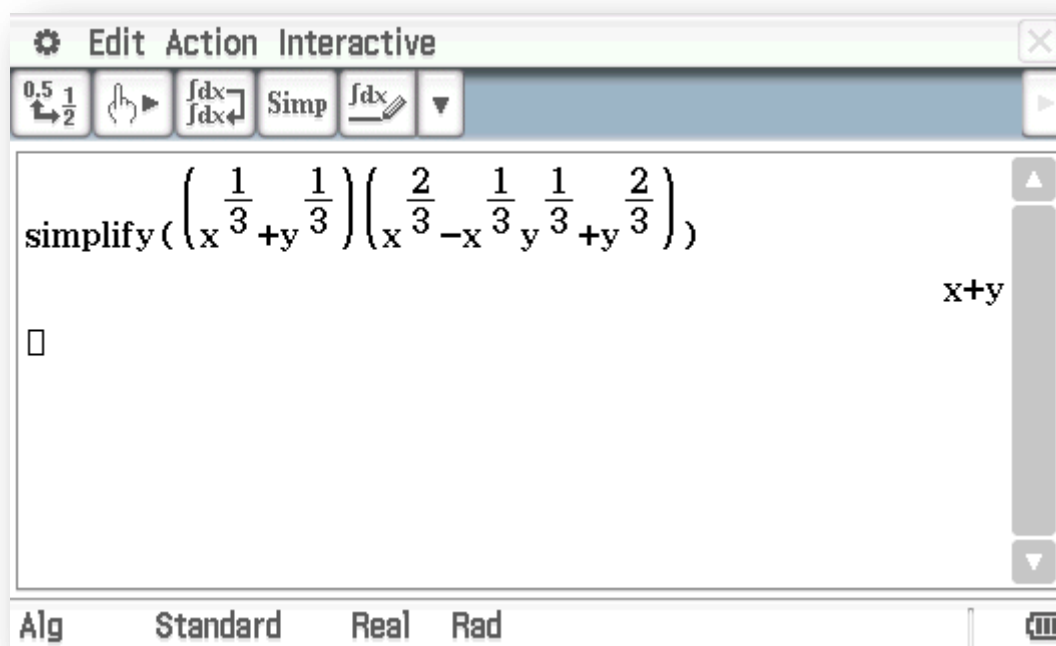
At the bottom, the mode is set to 'Alg'.

3. a) Laske lausekkeen $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ tarkka arvo, kun positiiviset luvut a ja b ovat toistensa käänteislukuja ja lukujen a ja b keskiarvo on 2.
- b) Sievennä lauseke $\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right) \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)$.

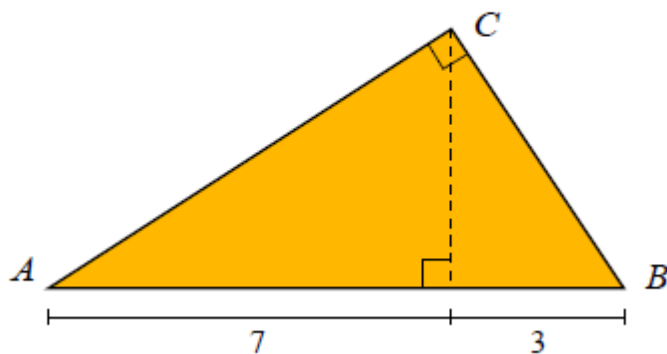
Ratkaisu: a) –kohdassa tehtävän ehdoista voidaan tehdä yhtälöpari, jonka ratkaisu voidaan sijoittaa annettuun lausekkeeseen. Pitkissä laskuissa laskimen **fx-CP400** näytön voi kääntää vaakasuoraan.



b) –kohdan lauseke sievenee komennolla **Simplify**:



4. Laske oheisen kuvan suorakulmaisen kolmion ABC pinta-alan tarkka arvo.



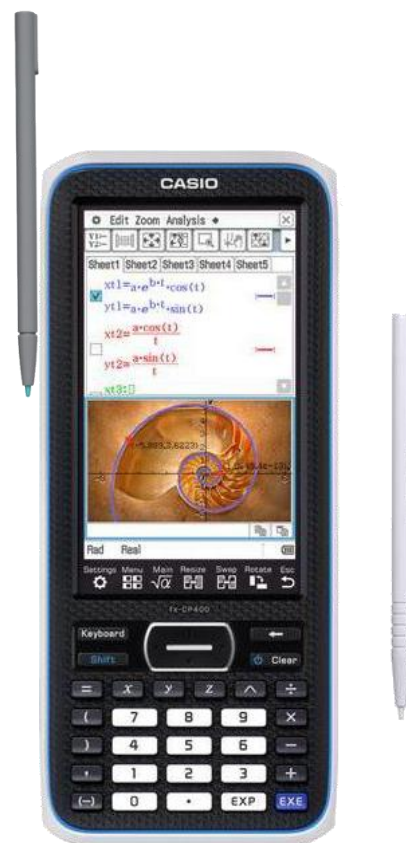
Ratkaisu: Merkitsemällä kolmion korkeutta symbolilla h saadaan yhdenmuotoisuudesta verrantoyhtälö, josta h ratkeaa. Vain positiivinen arvo korkeudelle hyväksytään. Sijoitetaan korkeus kolmion pinta-alan lausekkeeseen.

$\text{solve}\left(\frac{7}{h} = \frac{h}{3}, h\right)$
 $\{h = -\sqrt{21}, h = \sqrt{21}\}$
 $\text{ans} | h > 0$
 $\{h = \sqrt{21}\}$
 $\frac{1}{2} \times 10 \times \sqrt{21}$
 $5 \cdot \sqrt{21}$

Alg Standard Real Rad



ClassPad 330 Plus



fx-CP400

5. Määritä funktion $(x^2 - x - 5)e^{-x}$ suurin ja pienin arvo, kun $x \geq 0$.

Ratkaisu: ClassPad laskee annetuilla ehdoilla suoraan funktion suurimman ja pienimmän arvon. Funktion $f(x)$ lauseke on määritelty komennolla **Define**, jolloin siihen voidaan kaikissa laskuissa viitata nimellä $f(x)$. Ratkaisu on haettu valikon **Interactive** -> **Calculation** komennoilla **fMin** ja **fMax** (kuva vasemmalla).

Laskin täydentää tarvittavan syntaksin, joten käyttäjän ei itse tarvitse kirjoittaa kuvassa näkyviä komentoja. Tässä ratkaisumallissa on jatkuvaa funktiota tutkittu lisäksi analyysin raja-arvon avulla (kuva oikealla).

0.5 1/2 | fdx | fdx | Simp | fdx |

Define $f(x) = (x^2 - x - 5) \cdot e^{-x}$ done

fMin($f(x)$, x , 0, ∞)
 {MinValue=-5, x=0}

fMax($f(x)$, x , 0, ∞)
 {MaxValue= $7 \cdot e^{-4}$, x=4}

Alg Standard Real Rad

0.5 1/2 | fdx | fdx | Simp | fdx |

Define $f(x) = (x^2 - x - 5) \cdot e^{-x}$ done

$\frac{d}{dx}(f(x))$
 $-(x^2 - 3 \cdot x - 4) \cdot e^{-x}$

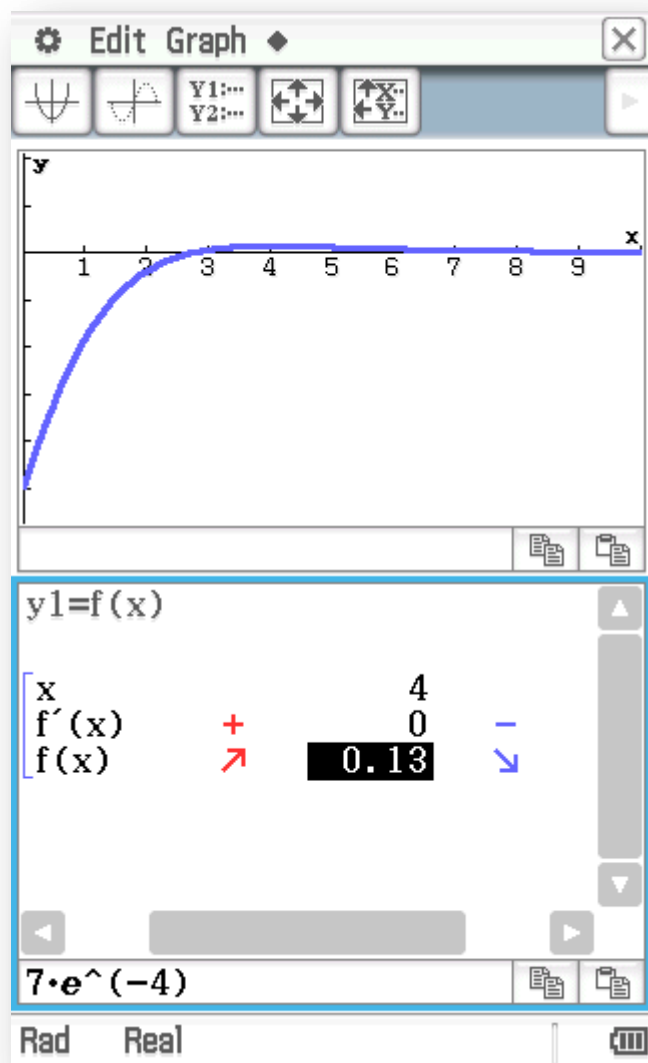
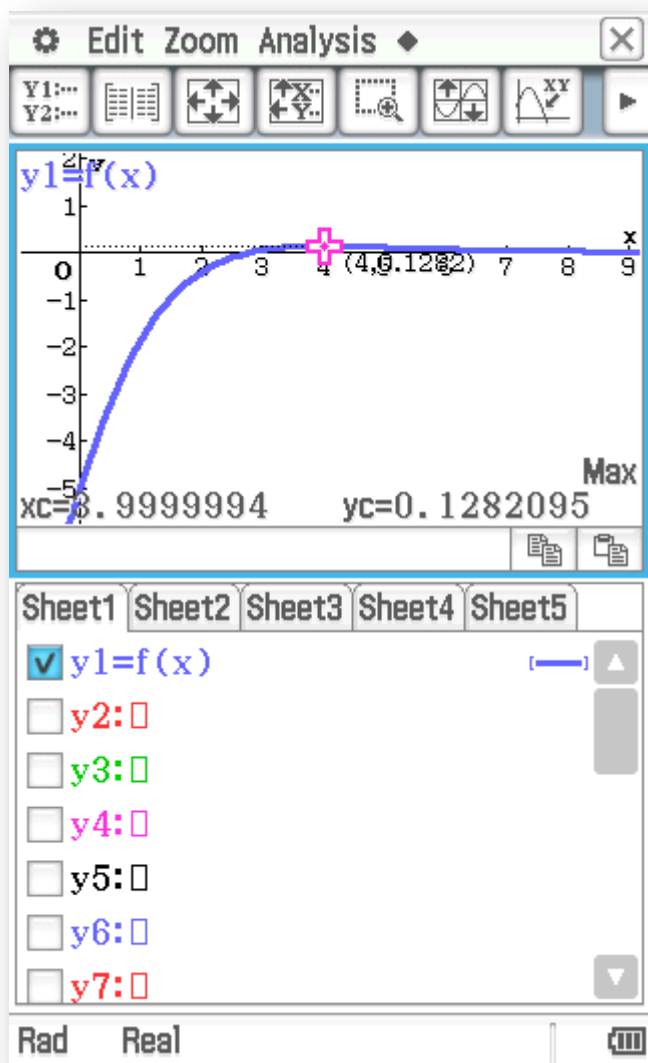
solve(ans, x) | $x \geq 0$
 {x=4}

f({0, 4})
 {-5, $7 \cdot e^{-4}$ }

lim($f(x)$)
 $x \rightarrow \infty$
 0

Alg Standard Real Rad

ClassPad tekee myös yhdellä kosketuksella funktiosta kulkukaavion, jolla voi perustella funktion suurimman ja pienimmän arvon. Kun funktio on kerran määritelty komennolla **Define**, siihen voidaan viitata myös muissa sovelluksissa. Kulkukaavio löytyy **Graph&Table** -sovelluksen työkaluista (seuraava sivu, kuva oikealla).



Voit ladata ilmaisen Manager –ohjelmiston testiversion käyttöösi
 osoitteesta edu.casio.com. Opettajille tullaan tarjoamaan edullisesti
 uutta fx-CP400 mallia testattavaksi yhdessä ohjelmiston kanssa.
 Seuraa ilmoitteluamme!

6. Veriryhmien B ja O esiintymistodennäköisyydet ovat $P(B) = 0,17$ ja $P(O) = 0,33$. Vampyyri puree kahtatoista ihmistä. Laske todennäköisyys sille, että
- joukossa on enintään yhdeksän ihmistä, joiden veriryhmä on O.
 - joukossa on kolme tai neljä ihmistä, joiden veriryhmä on B.

Ratkaisu: Lasku voidaan suorittaa riippumattomien tapahtumien toistokokeena eli satunnaismuuttujana toimiva tiettyä veriryhmää edustavien ihmisten lukumäärä noudattaa binomijakaumaa. a) –kohdan kysymyksen ratkaisusta malli on vasemman puoleisessa kuvassa komplementin avulla laskettuna. Tehtävä voidaan myös tarkistaa **ClassPadin** mukana tulevien jakaumien avulla. Niistä löytyy esim. binomijakauma, johon annetaan onnistumisten rajat, toistojen lukumäärä ja onnistumisen todennäköisyys yhdessä toistossa (kuva oikealla).

0.5 1/2 f dx f dx Simp f dx

$1 - \binom{12}{10} 0.33^{10} \times 0.67$

0.9995039292

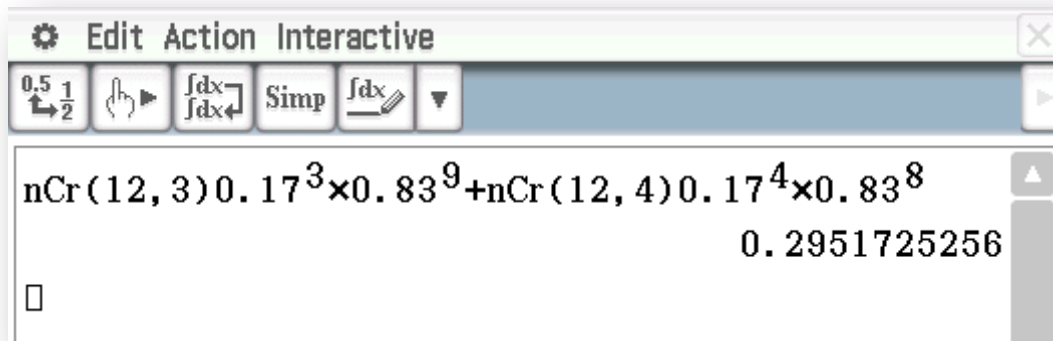
□

Alg Standard Real Rad

prob	0.9995039
Lower	0
Upper	9
Numtrial	12
pos	0.33

<< Back Help

b)-kohdan tehtävä voidaan tehdä identtisesti ja näytön kääntäminen auttaa hahmottamaan tehtävänä helpommin:



CASIO | Laskimet Liiketoiminta | Lehdistötiedotteet | Opettajan tietopalvelu

Alkuun > Opettaja & koulu > Vanhemmat & koululaiset > Tuotteet > Ajankohtaista > Yhteystiedot

Opettaja & koulu

Tukea opettajille ja opetukseen

Etsitkö nykypäivän opetustarpeet tyydyttävää opetusmateriaalia ja apuneuvoja opettajille? Täältä löydät opettajille tarkoitettua tietoa koululaskinten käytöstä ja tilaamisesta.

OPETUSMATERIAALIA

Käytännönläheiset tehtävät, työvihot ja opetuskokonaisuudet tekevät matematiikanopetuksesta kiinnostavaa.

[Lisätietoa materiaaleista >](#)

WORKSHOPIT

Ilmaiset henkilöstölle tarkoitetut workshopit antavat hyviä vinkkejä laskinten käyttöön matematiikan opetuksessa.

[Ilmoittaudu tästä >](#)

REFERENSSIKOULUT

Casion uudet suomenkieliset Websivut ovat tarkastusvaiheessa. Löydät ne piakkoin osoitteesta www.casio-laskimet.fi

OPETTAJALLE

Opettajan tietopalvelusta saat arkielämän esimerkkejä ja havainnollistamisvihjeitä matematiikan opetuksen.

[Opettajalle >](#)

OPETTAJAN TIETOPALVELU

Uutiskirje sisältää esimerkkitehtäviä, opetuskokonaisuuksia ja uutta tietoa CASIO-koululaskinten käytöstä opetustyössä.

[Ilmoittaudu tästä >](#)

OPETTAJAN TESTILAITE

Opettajana voitte tilata koululaskimen tarvikkeineen hyvin edullisesti.

[Tilaa nyt >](#)

7. Pisteiden $A(2,0,1)$ ja $B(3,1,3)$ yhdysjanan keskipisteen kautta asetetaan taso, joka on kohtisuorassa yhdysjanaa vastaan. Missä pisteessä tämä taso leikkaa y -akselin?

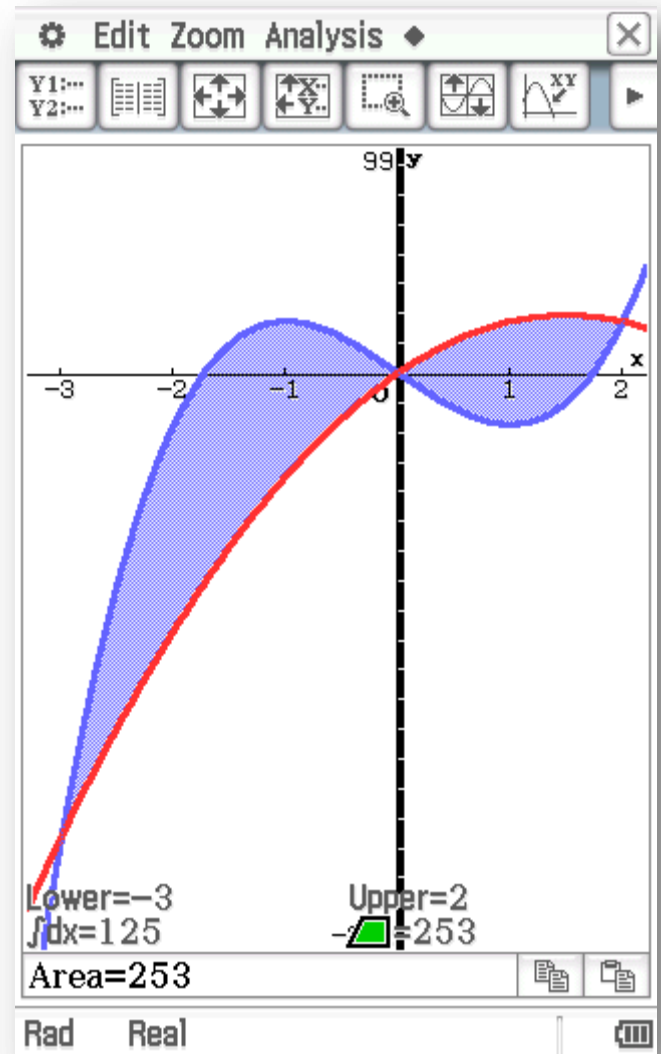
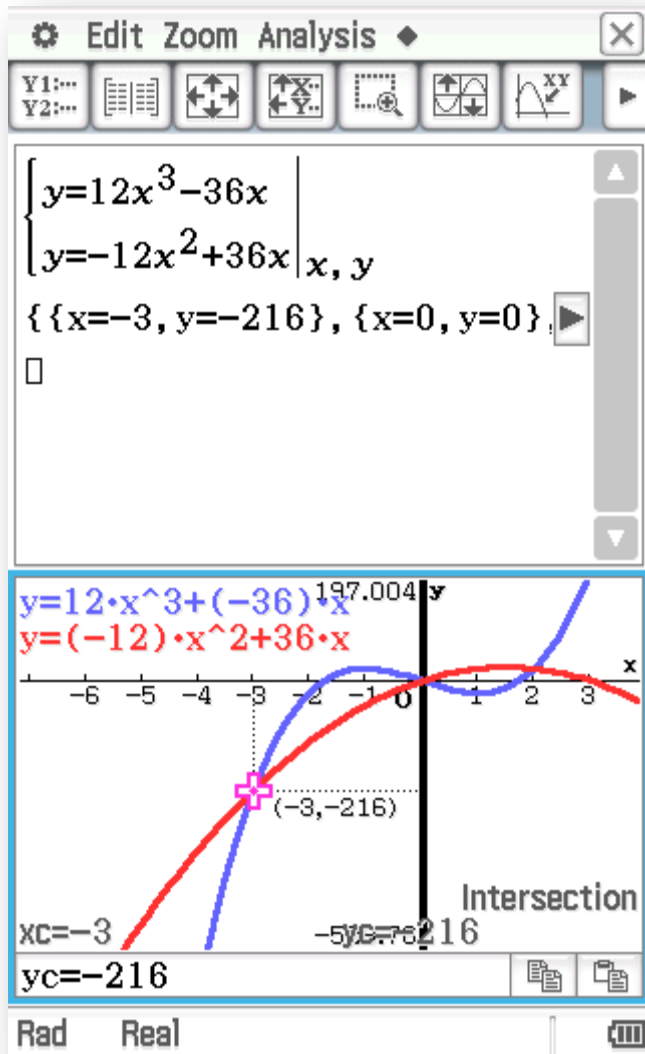
Ratkaisu: Koska yhdysjanan keskipiste sijaitsee tasossa, toteuttavat sen koordinaatit tason yhtälön. Tason yhtälö saadaan normaalimuotoon normaalivektorin avulla. Normaalivektoriksi käy mikä tahansa tasoa vastaan kohtisuora vektori, esim. AB . Tämän jälkeen kysytty leikkauspiste saadaan sijoittamalla tason yhtälöön y -akselilla olevat muiden koordinaattien arvot eli $x = z = 0$.

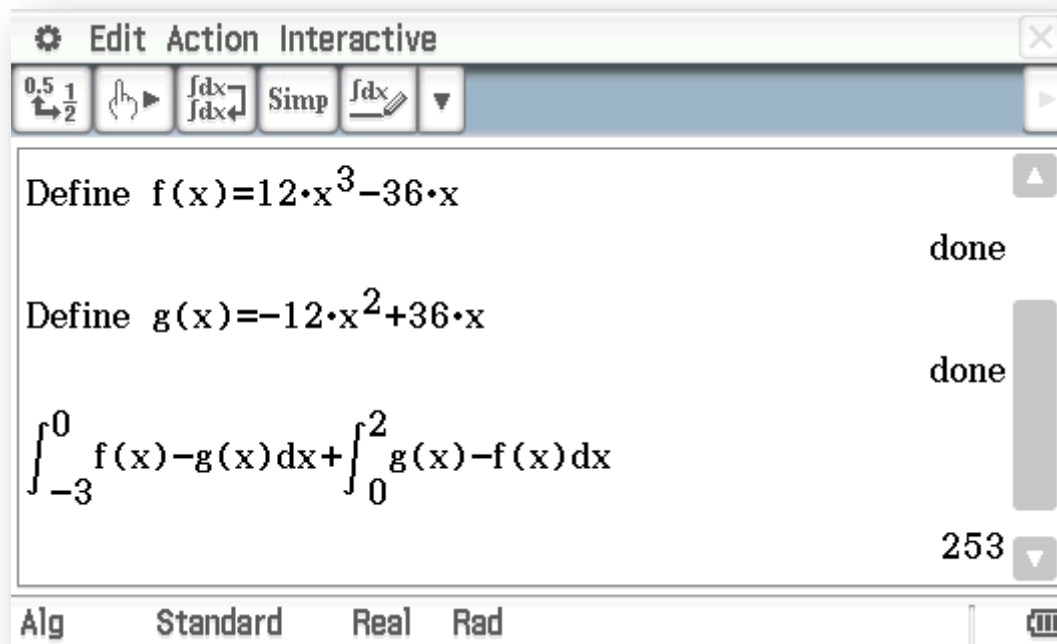
$[3-2 \ 1-0 \ 3-1]$
 $[1 \ 1 \ 2]$
 $\left\{ x = \frac{2+3}{2}, y = \frac{1+0}{2}, z = \frac{3+1}{2} \right\}$
 $\left\{ x = \frac{5}{2}, y = \frac{1}{2}, z = 2 \right\}$
 $\text{solve}(x+y+2 \cdot z+d=0, d)$
 $\{d = -x-y-2 \cdot z\}$
 $\text{ans} | \left\{ x = \frac{5}{2}, y = \frac{1}{2}, z = 2 \right\}$
 $\{d = -7\}$
 $\text{solve}(x+y+2 \cdot z-7=0 | \{x=0, z=0\})$
 $\{y=7\}$
 \square

Alg Standard Real Rad

8. a) Määritä käyrien $y=12x^3-36x$ ja $y=-12x^2+36x$ leikkauspisteet.
 b) Näiden käyrien väliin jää kaksi rajoitettua aluetta. Laske niiden pinta-alojen summa.

Ratkaisu: Käyrien leikkauspiste voidaan laskea yhtälöparin avulla ja tarkistaa graafisesti raahaamalla käyrien yhtälöt koordinaatiston päälle ja valitsemalla **G-Solve** -> **Intersection**. **fx-CP400** laskee suoraan käyrien välisen alan, mutta se voidaan tehdä myös integroimalla kahdessa osassa eli huomioimalla käyrien suuruusjärjestyksen muutos. Kuvat ratkaisutavoista ovat alla.



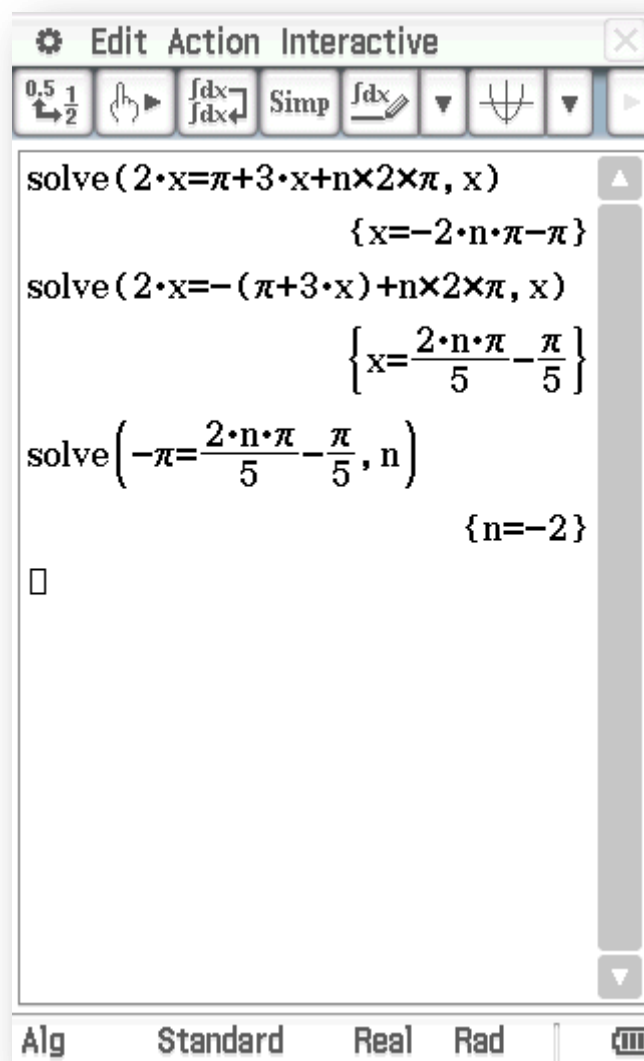


9. Ratkaise yhtälö $\cos(2x) + \cos(3x) = 0$.

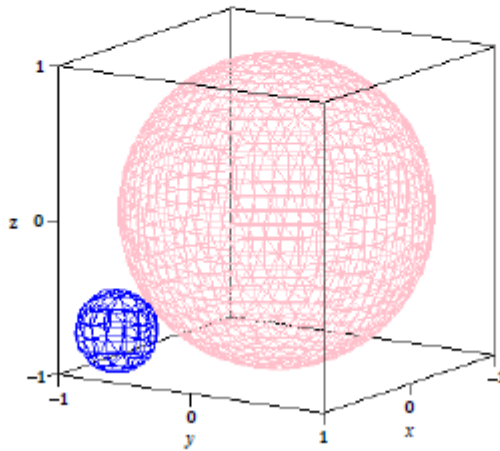
Ratkaisu: Kosinien arvot ovat samat, jos kulmat ovat samat tai toistensa vastakulmat tai niitä erottaa kosinin jakson mittainen väli.

Siirretään kosinin lausekkeet yhtälön eri puolille ja poistetaan kertoimena oleva miinus esim. taulukkokirjan palautuskaavan mukaisesti. Ratkaistaan saadut yhtälöt **ClassPadilla**.

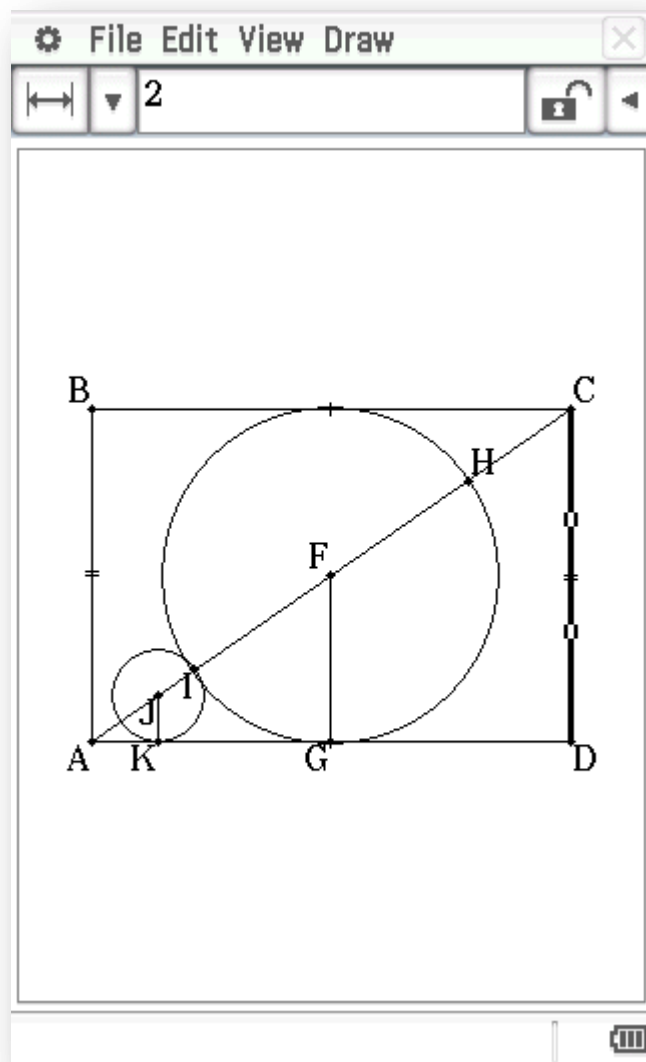
Koska viimeisen yhtälön ratkaisuksi saadaan kokonaisluku, vastausjoukot voidaan yhdistää ja kaikki vastaukset saadaan jälkimmäisestä ratkaisujoukosta.



10. Oheisen kuution särmän pituus on 2. Sen sisällä on vaaleanpunainen pallo, joka sivuaa jokaista kuution tahkoa. Kuution yhdessä kulmassa on pienempi sininen pallo, joka sivuaa suurta palloa ja kolmea kuution tahkoa kuvion mukaisesti. Laske sinisen pallon säteen tarkka arvo.

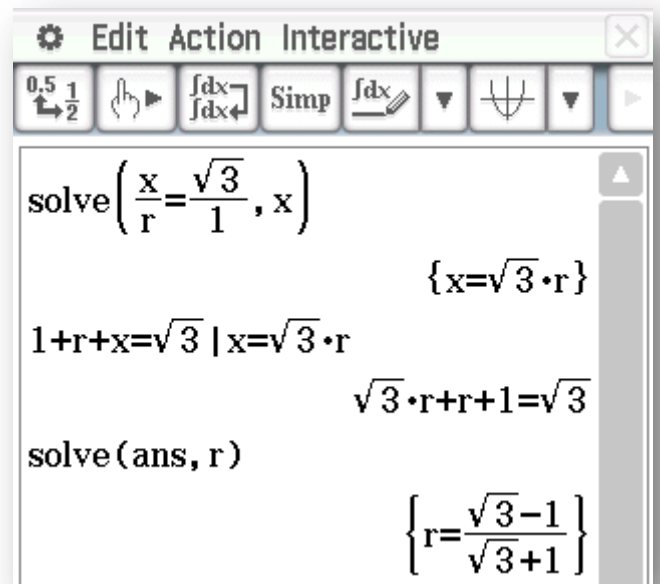


Ratkaisu: 2-ulotteinen poikkileikkaus, joka kulkee pallojen keskipisteiden läpi ja on kohtisuorassa pohjaa vastaan, näyttää tältä **ClassPadin Geometry**-sovelluksella (kuva vasemmalla). Jana AD on pohjaneliön lävistäjänä $2\sqrt{2}$, jana AG puolet siitä ja jana AC kuution avaruuslävistäjänä $2\sqrt{3}$.



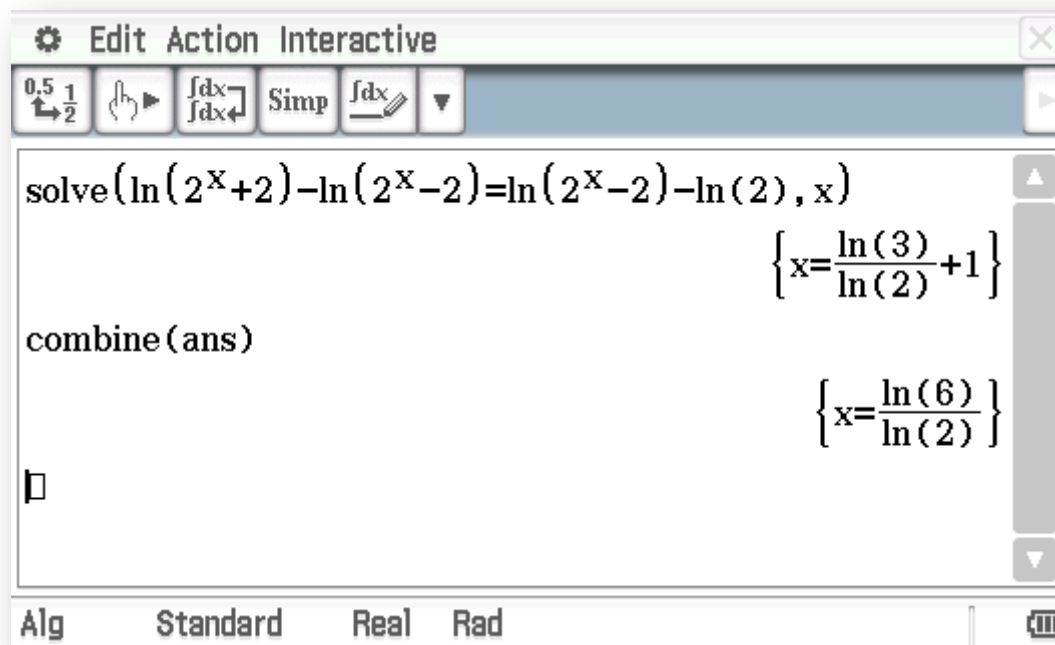
Merkitään pienemmän pallon sädettä r (kuvassa IJ) ja etäisyyttä pienemmän pallon keskipisteestä kulmaan A symbolilla x (kuvassa AJ). Isomman pallon säde on 1 tehtävänannon mukaan.

Yhdenmuotoisista kolmioista AKJ ja AGF saadaan verranto, josta voidaan ratkaista x säteen r avulla. Janan AF pituus on puolet avaruuslävistäjästä ja tämän tiedon perusteella voidaan ratkaista r .



11. Millä muuttujan x arvolla jono $\ln 2, \ln(2^x - 2), \ln(2^x + 2)$ on aritmeettinen?

Ratkaisu: Jono on aritmeettinen, kun peräkkäisten jäsenten erotus on vakio. Ratkaistaan tästä ehdosta saatu yhtälö **ClassPadilla**. **Combine** -komento laventaa murtolausekkeet "yhdeksi viivalle".



Kouluille on tarjolla ilmaisia lainasettejä laskimista. Kovassa alumiinikotelossa laskimet ovat helposti liikuteltavassa paketissa. Voit tutustua niihin yhdessä opiskelijoidesi kanssa kuukauden tai yhden jakson ajan.

Kysy lainasettejä koulullesi yhdessä Workshopin kanssa! Saat samalla perehdytyksen laskimien käyttöön. Lainasettejä löytyy tällä hetkellä laskimista fx-CG20 ja ClassPad 330 Plus.



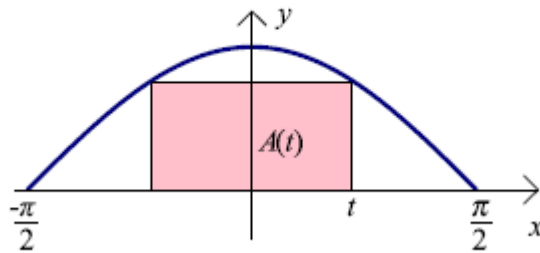
12. Suorakulmion yksi sivu on x -akselilla ja kaksi kärkeä käyrällä $y = \cos x$, kun $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

a) Muodosta lauseke suorakulmion pinta-alalle $A(t)$ kuvioon merkityn muuttujan $0 < t < \frac{\pi}{2}$

funktiona.

b) Ratkaise funktion $A(t)$ derivaatan nollakohta kahden desimaalin tarkkuudella käyttämällä valitsemaasi numeerista menetelmää.

c) Määritä suurimman mahdollisen suorakulmion pinta-alan likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.



Ratkaisu: Pinta-ala on suorakulmiona kanta * korkeus, jotka saadaan suoraan annetuista tiedoista. Sovelletaan Newtonin (Newton-Rhapsodin) menetelmää tämän lausekkeen derivaatan nollakohtien ratkaisemiseen. Huomaa,

että tällöin tarvitaan alkuperäisestä pinta-alan lausekkeesta toinen derivaatta Newtonin menetelmää varten. Iterointi ei enää tarkkene kahden desimaalin osalta kahden askeleen jälkeen.

Suurin arvo saadaan sijoittamalla pinta-alan lausekkeeseen iteroinnissa saatu muuttujan t arvo. Desimaalien määrän voi muuttaa **Basic Format** – valikosta.

Edit Action Interactive

Define $A(t) = 2 \cdot t \cdot \cos(t)$ done

Define $A1(t) = \frac{d}{dt}(A(t))$ done

Define $A2(t) = \frac{d}{dt}(A1(t))$ done

$1 \Rightarrow t$ 1

$t - \frac{A1(t)}{A2(t)} \Rightarrow t$ 0.8645363974

$t - \frac{A1(t)}{A2(t)} \Rightarrow t$ 0.8603390776

Alg Decimal Real Rad

Edit Action Interactive

$t - \frac{A1(t)}{A2(t)} \Rightarrow t$ 0.860333589

A(ans) 1.122192676

1.122192676 1.1

Huomautus. Tehtävässä 13 symbolinen laskin ei tuo lisäarvoa ratkaisemiseen, joten ratkaisu sivuutetaan.

*14. Olkoon $P(x) = x^2 + x - 2$.

a) Jaa $P(x)$ ensimmäisen asteen tekijöihin. (2 p.)

b) Määritä sellaiset vakiot A ja B , että $\frac{1}{P(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$ kaikilla $x \geq 2$. (2 p.)

c) Määritä funktion $\frac{1}{P(x)}$ integraalifunktiot, kun $x \geq 2$. (2 p.)

d) Laske epäoleellinen integraali $\int_2^{\infty} \frac{1}{P(x)} dx$. (3 p.)

Ratkaisu: ClassPad jakaa polynomit tekijöihin ja laskee osamurtohajotelman. Vakioiden A ja B ratkaisemiseksi pitää tosin poistaa nimittäjistä luku 3. Myös integrointi voidaan tehdä suoraan laskimella kohdissa c) ja d). Laskijan on syytä muistaa lisätä vastaukseen integroimisvakio C.

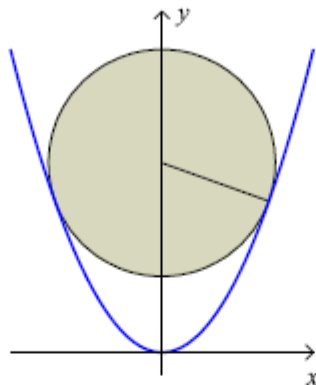
Edit Action Interactive
 0.5 1/2 f dx / f dx Simp f dx ▾ ▾ ▾
 $\text{factor}(x^2+x-2)$
 $(x+2) \cdot (x-1)$
 $\text{expand}\left(\frac{1}{x^2+x-2}, x\right)$
 $\frac{-1}{3 \cdot (x+2)} + \frac{1}{3 \cdot (x-1)}$
 $\int \square \text{ans} dx$
 $\frac{-\ln(|x+2|) - \ln(|x-1|)}{3}$
 $\text{simplify}(\text{ans}) | x \geq 2$
 $\frac{-\ln(x+2) - \ln(x-1)}{3}$
 □

Alg Standard Real Rad

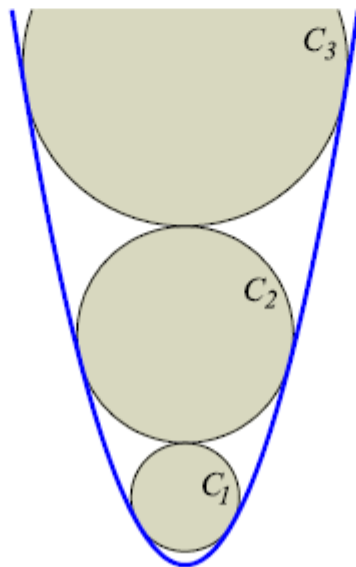
Edit Action Interactive
 0.5 1/2 f dx / f dx Simp f dx ▾ ▾ ▾
 Define $P(x) = x^2 + x - 2$
 done
 $\int_2^a \frac{1}{P(x)} dx$
 $\frac{-\ln(|a+2|)}{3} + \frac{\ln(|a-1|)}{3} + \frac{2 \cdot \ln(2)}{3}$
 $\lim_{a \rightarrow \infty} (\text{ans})$
 $\frac{2 \cdot \ln(2)}{3}$
 □

Alg Standard Real Rad

- *15. a) Ympyrä, jonka säde on $r > \frac{1}{2}$, asetetaan paraabelin $y = x^2$ sisäpuolelle alla olevan kuvan mukaisesti. Näytä, että ympyrän keskipisteen y -koordinaatti on $r^2 + \frac{1}{4}$. (3 p.)



- b) Ympyrä C_1 saadaan valitsemalla a-kohdassa $r = r_1 = 1$. Sitä sivuamaan asetetaan toinen ympyrä C_2 , joka sivuaa myös paraabelia. Jatkamalla näin saadaan alla olevan kuvan mukainen jono ympyröitä C_1, C_2, C_3, \dots . Määritä ympyrän C_2 säde r_2 . (2 p.)
- c) Osoita, että peräkkäisten ympyröiden C_n ja C_{n+1} säteet r_n ja r_{n+1} toteuttavat rekursio-kaavan $(r_{n+1})^2 - r_{n+1} = (r_n)^2 + r_n$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$ (2 p.)
- d) Osoita c-kohdan avulla, että $r_{n+1} = r_n + 1$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$ (2 p.)



Ratkaisu: a) –kohdassa käyrän mielivaltainen piste on muotoa (a, a^2) . Lasketaan käyrälle piirretyn normaalin yhtälö ja seuraavaksi y -akselin ja normaalin leikkauspiste eli ympyrän keskipiste. Ratkaistaan ympyrän säde r kahden pisteen etäisyyden kaavalla ja osoitetaan väite todeksi laskemalla y :lle arvo saadun tuloksen perusteella.

Edit Action Interactive

$\frac{0.5}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$

diff(x^2, x, 1, a)

$2 \cdot a$

$y - a^2 = -\frac{1}{2 \cdot a} (x - a) \mid x=0$

$-a^2 + y = \frac{1}{2}$

solve(ans, y)

$\left\{ y = a^2 + \frac{1}{2} \right\}$

□

Alg Standard Real Rad

Edit Action Interactive

$\frac{0.5}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$

$\sqrt{(a-0)^2 + \left(a^2 - \left(a^2 + \frac{1}{2}\right)\right)^2}$

$\frac{\sqrt{4 \cdot a^2 + 1}}{2}$

$r^2 = \text{ans}^2$

$r^2 = \frac{4 \cdot a^2 + 1}{4}$

ans×4

$4 \cdot r^2 = 4 \cdot a^2 + 1$

ans-1

$4 \cdot r^2 - 1 = 4 \cdot a^2$

ans/4

$\frac{4 \cdot r^2 - 1}{4} = a^2$

□

Alg Standard Real Rad

Edit Action Interactive

$\frac{0.5}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$ $\frac{f_{dx}}{f_{dx}}$

$y = \frac{4 \cdot r^2 - 1}{4} + \frac{1}{2}$

$y = \frac{4 \cdot r^2 - 1}{4} + \frac{1}{2}$

simplify(ans)

$y = r^2 + \frac{1}{4}$

□



ClassPad Manager

b)-kohdassa on valittu ensimmäiseksi säteeksi 1. Hyödyntämällä a) –kohdan tulosta saadaan ensimmäisen ympyrän C_1 keskipisteeksi $(0, \frac{5}{4})$. Tällöin ympyrän C_2 keskipiste on $r_2^2 + \frac{1}{4}$. Tehdään yhtälö keskipisteiden etäisyydestä: etäisyys saadaan laskettua sekä kahden pisteen etäisyytenä että säteiden summana. Ratkaistaan tästä yhtälöstä toisen ympyrän säde r_2 .

Aivan vastaavasti muodostetaan yhtälö c) –kohdassa n . ja $(n+1)$. ympyrän säteille (kuva oikealla). Merkitään näitä säteitä yksinkertaistamisen vuoksi m ja k , vastaavasti. d) –kohta ratkaistaan c) –kohdan yhtälön avulla ja vain positiivinen juuri $k = m + 1$ kelpuutetaan vastaukseksi.

The screenshot shows the calculator's 'Edit Action Interactive' window. The input field contains the equation $y = \frac{4 \cdot r^2 - 1}{4} + \frac{1}{2}$. Below it, the command 'simplify (ans)' is entered, resulting in $y = r^2 + \frac{1}{4}$. Then, the command 'solve((r2)^2 - 1 = 1 + r2, r2) | r2 > 0' is entered, yielding the solution $\{r_2 = 2\}$. A keypad with various mathematical functions is visible at the bottom.

The screenshot shows the calculator's 'Edit Action Interactive' window. The input field contains the equation $k^2 + \frac{1}{4} - (m^2 + \frac{1}{4}) = k + m$. Below it, the command 'ans - k' is entered, resulting in $k^2 - m^2 = k + m$. Then, the command 'ans + m^2' is entered, resulting in $k^2 - m^2 - k = m$. Next, the command 'ans - m^2' is entered, resulting in $k^2 - k = m^2 + m$. Finally, the command 'solve(ans, k)' is entered, yielding the solution $\{k = m + 1, k = -m\}$. A keypad with various mathematical functions is visible at the bottom.

Tiesitkö, että Casio tarjoaa opettajille tukea mm. ilmaisten Workshoppien muodossa? Pyydä koulutusta omalle koulullesi ottamalla yhteyttä pepe.palovaara@casio.fi tai soittamalla numeroon 044-72 75 776.

Olemme mukana myös MAOLin päivillä keväällä 2013 Helsingissä ja syksyllä 2013 Jyväskylässä. ITK-päivillä Hämeenlinnassa voit tulla juttelemaan osastollemme ja testaamaan uutta fx-CP400 mallia!