ClassPad 330 Plus ylioppilaskirjoituksissa

-syksy 2012 lyhyt matematiikka-

Enemmän aikaa matematiikan opiskeluun,

vähemmän aikaa laskimen opetteluun.

ClassPad.

CASIO

Hyvä lukija,

CAS-laskennan hyödyntäminen ylioppilaskirjoituksissa on Suomessa alussa. Pisteytyksen ongelma opiskelijan kannalta on siinä, mitä välivaiheita vastauksessa pitää näkyä. Opettajat tarvitsevat täydennyskoulutusta ja opetussuunnitelmatkin muutoksia. Myös ylioppilaskokeeseen tullee tämän myötä erilaisia tehtäväosioita tai eri tyyppisiä tehtäviä.

Tässä vihkosessa on ratkaistu syksyn 2012 lyhyen matematiikan koe Casion ClassPad 330 Plus –laskimella. Tämä on järjestyksessään toinen ylioppilaskoe, jossa symbolinen laskin oli sallittu. Kuten lukija huomannee, myös lyhyellä matematiikalla symbolisesta laskimesta on suuri hyöty.

Joissakin vastauksissa on sekä laskimen antama välitön vastaus annettuun tehtävään että välivaiheita sisältävä vastaus. Ratkaisuissa on lyhyesti selitetty myös, miten tehtävät voi ja kannattaa laskimeen syöttää.

Periaate ClassPad 330 Plus:n käytössä on, että lauseke tai yhtälö **kirjoitetaan laskimeen sellaisenaan**. Tämän jälkeen lauseke tai yhtälö **maalataan kynällä** (kuten esim. tekstinkäsittelyohjelmissa) ja Interactive-valikosta **valitaan** sille **tehtävä toimenpide**. Lausekkeita voi kopioida **raahaamalla** tai **Edit->Copy** valikon kautta laskimen eri ohjelmien välillä.

Tällöin laskijan ei tarvitse tietää laskimen syntaksia ja ikäviltä virheiltä tai laskemista jumittavilta tilanteilta vältytään. Toki paljon laskinta käyttäneelle löytyy **Action** –valikko, jolloin laskinta voi käyttää myös komentojen kautta. Aloittelevalle käyttäjälle tai opiskelijalle on huomattavan paljon miellyttävämpää päästä heti laskemaan tehtäviä ilman laskimen opiskelua ja heille **Interactive** –valikko tarjoaa siihen keinot.

Otan mielelläni vastaan kysymyksiä ja kommentteja. Yhteystietoni ovat vihkon takakannessa. Mukavia hetkiä matematiikan ja tämän ratkaisuvihkon parissa!

Kempeleessä 10.10.2012 *Pepe*

CASIO

1. **a)** Ratkaise yhtälö $x^2 - 2x = 0$.

b) Ratkaise yhtälö $\frac{2}{3}x - 1 = \frac{2}{3}$.

c) Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 2x - y = -3. \end{cases}$$

Ratkaisu: Laskimesta

$$\mathrm{solve}(x^2 - 2\cdot x = 0, x)$$
$$\{x=0, x=2\}$$
$$\mathrm{solve}\left(\frac{2}{3}\cdot x - 1 = \frac{2}{3}, x\right)$$
$$\left\{x = \frac{5}{2}\right\}$$
$$\begin{cases} x+2y=-4 \\ 2x-y=-3 \end{cases}\Bigg|_{x,y}$$
$$\{x=-2, y=-1\}$$

Laskut kannattaa syöttää a- ja b-kohdissa antamalla pelkkä yhtälö. Tämän jälkeen yhtälö **maalataan** kynällä ja valikosta **Interactive -> Advanced** valitaan komento **Solve** ja hyväksytään avautuva ikkuna koskemalla kynällä **OK**. C-kohdassa kannattaa käyttää keyboardin välilehteä 2D, jossa on yhtälöparin merkki . Pelkkä exe-painikkeen koskeminen ratkaisee yhtälöparin.

Tiesithän, että ohjelmisto on saatavissa myös tietokoneelle! Voit käyttää projektoria tai älytaulua yhdessä ohjelmiston kanssa luokkahuoneessa havainnollistamaan laskuja opiskelijoille. Lataa kokeiluversio ilmaiseksi osoitteesta http://edu.casio.com

2. **a)** Mikä on meetvurstin suolapitoisuus prosentin kymmenesosan tarkkuudella, kun 250 grammassa meetvurstia on $9{,}0$ grammaa suolaa?

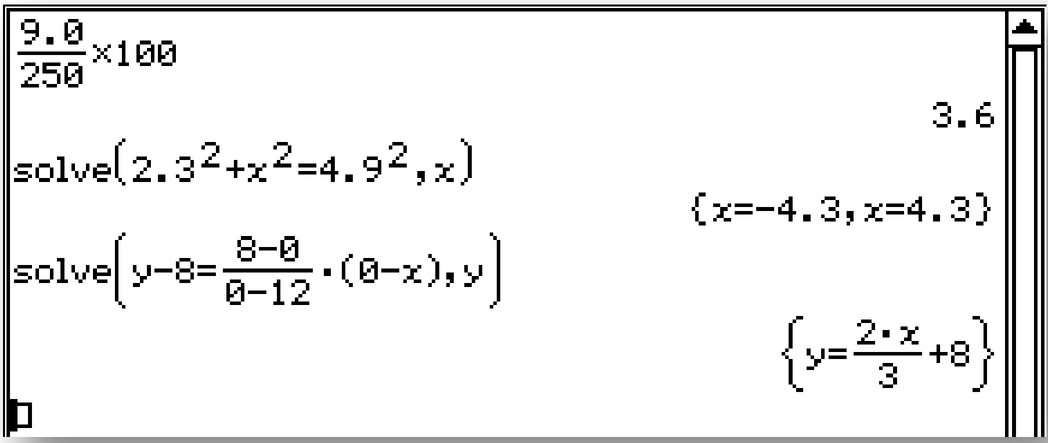
b) Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on $4{,}9$ m ja kateetin pituus $2{,}3$ m. Laske toisen kateetin pituus $0{,}1$ metrin tarkkuudella.

c) Määritä pisteiden $(0,8)$ ja $(12,0)$ kautta kulkevan suoran yhtälö.

Ratkaisu: A- ja b-kohdissa vastaukset saadaan suoraan laskimen avulla. Tosin b-kohtaan hyväksytään vain positiivinen ratkaisu 4,3 m.

Jos halutaan käyttää laskinta likiarvon pyöristämiseen vaadittuun tarkkuuteen, niin esim. yhden desimaalin tarkkuuden voi asettaa kuvakkeesta avautuvasta valikosta **Basic Format -> Number Format -> Fix 1**.

C-kohdassa voi käyttää taulukkokirjastakin löytyvää suoran yhtälöä. Sijoitetaan siihen annettujen pisteiden koordinaatit ja ratkaistaan yhtälöstä y. Tämä onnistuu maalaamalla yhtälö ja valitsemalla **Interactive -> Advanced -> Solve.**

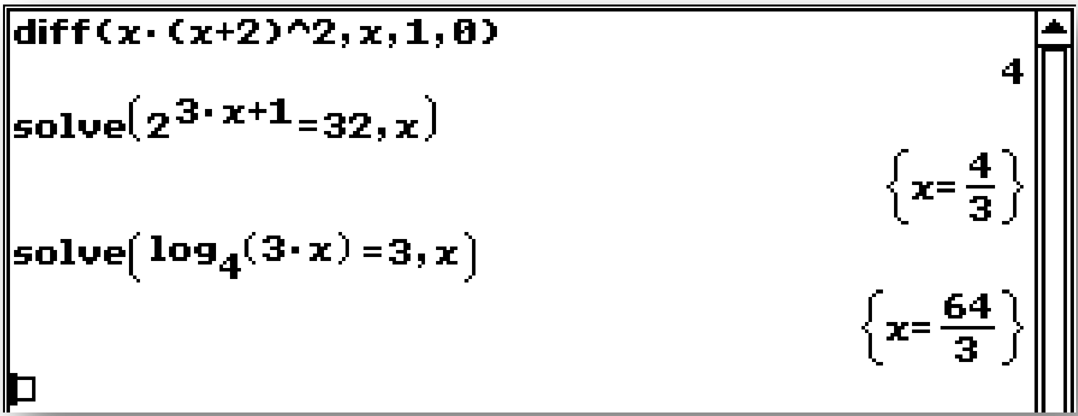


3. a) Määritä funktion $f(x) = x(x+2)^2$ derivaatta kohdassa $x = 0$.

b) Ratkaise yhtälö $2^{3x+1} = 32$.

c) Ratkaise yhtälö $\log_4(3x) = 3$.

Ratkaisu: Kaikkiin kohtiin vastaukset saadaan suoraan laskimella. Lausekkeet kannattaa jälleen kirjoittaa tehtävän muodossa ja maalamisen jälkeen ratkaisut löytyvät **Interactive -> Calculation -> diff** ja **Interactive -> Advanced –> solve**

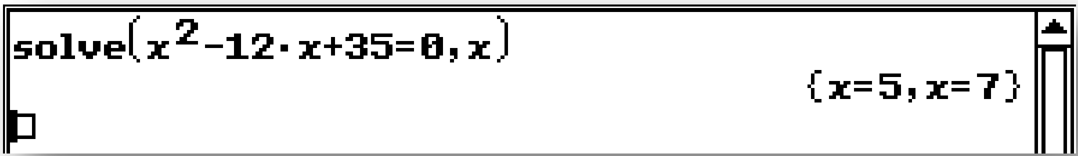


4. Tarkastellaan paraabelia $y = x^2 - 12x + 35$.

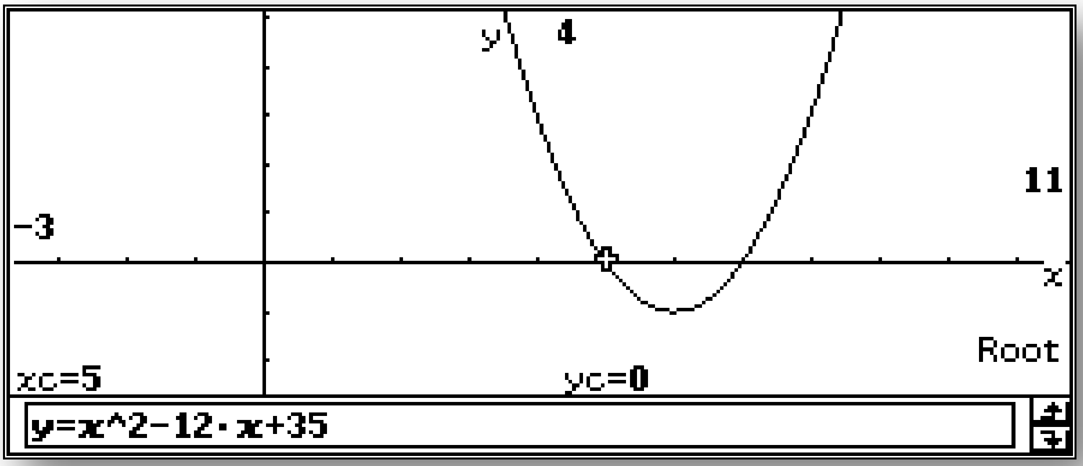
a) Missä pisteissä paraabeli leikkaa x-akselin?

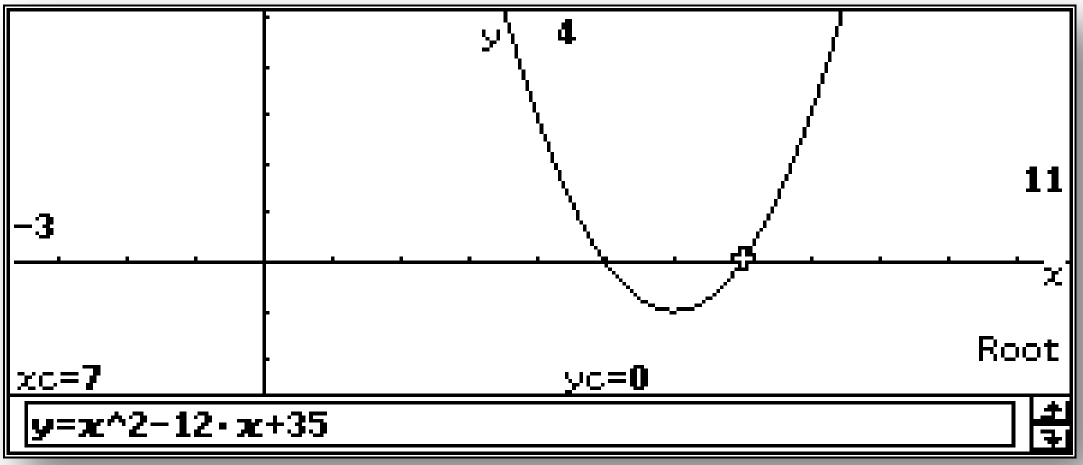
b) Määritä paraabelin huipun koordinaatit.

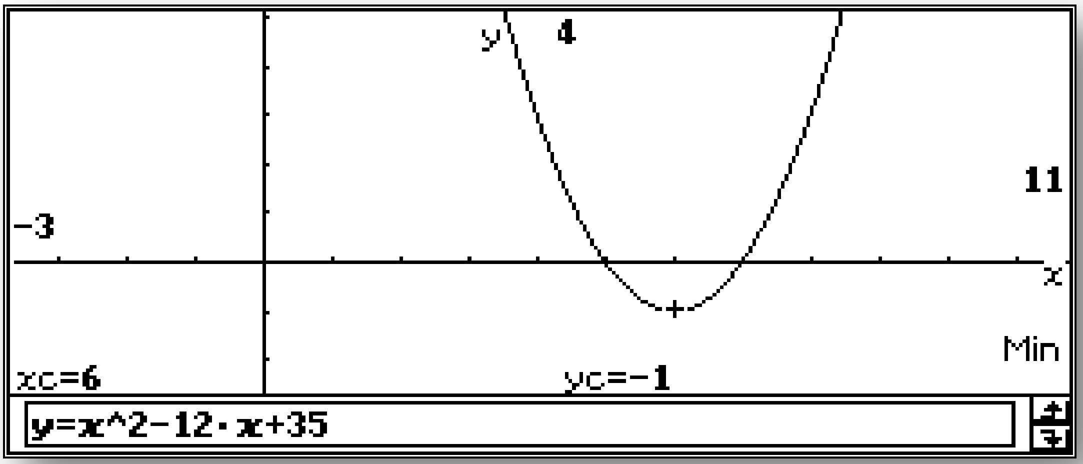
Ratkaisu: Nollakohtien ratkaisun voi tehdä **Main** –sovelluksessa kirjoittamalla nollakohtien yhtälö sellaisenaan, maalaamalla se ja valitsemalla **Interactive -> Advanced -> Solve**, jolloin laskin huolehtii syntaksista:



Yhtälön oikean puolen voi syöttää myös laskimeen **keyboardin 2D** –välilehden avulla. Tämän jälkeen klikkaamalla painiketta saa näytön jaettua kahteen osaan, joista alemmassa on koordinaatisto. Maalaamalla lauseke hiirellä ja **raahaamalla se koordinaatiston päälle** saadaan kuvaaja piirrettyä. Painikkeista ja saa ratkaistua sekä nollakohdat (**navigointinäppäimen** oikean reunan painallus etsii seuraavan nollakohdan) että minimin. Katso kuvat:


y
4
11
-3
x
Root
xc=5
yc=0
y=x^2-12·x+35


y
4
11
-3
x
Root
xc=7
yc=0
y=x^2-12·x+35


y
4
11
-3
x
Min
xc=6
yc=-1
y=x^2-12·x+35

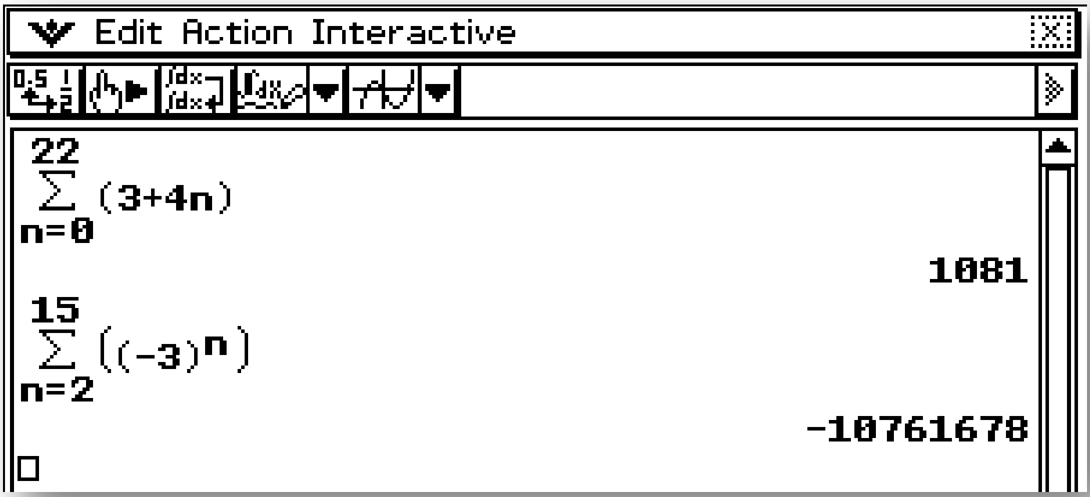
Uudet www-sivut osoitteessa www.casio-laskimet.fi on juuri valmistumassa!

5. Laske summat

a) $\sum_{n=0}^{22}(3+4n)$

b) $\sum_{n=2}^{15}(-3)^n$

Ratkaisu: Keyboardin 2D –välilehdellä kohdassa CALC on valmiit summakaavamerkinnät, joiden avulla summille saadaan tarkat arvot



6. Erään japanilaisen auton keskikulutus maantieajossa on $6{,}8$ litraa bensiiniä sadalla kilometrillä. Saman kokoluokan amerikkalaisella autolla voi ajaa 32 mailia yhdellä gallonalla bensiiniä. Kumpi auto kuluttaa vähemmän polttoainetta? Yksi gallona on noin $3{,}785$ litraa, ja yksi maili noin $1{,}609$ kilometriä.

Ratkaisu: Laskimella autojen keskikulutuksiksi saadaan

Päätellään tästä vastaukseksi, että japanilainen auto kuluttaa vähemmän.

7. Saksalainen tähtitieteilijä Johannes Kepler (1571–1630) keksi planeetan etäisyyden ja kiertoajan välisen yhteyden. Planeetan kiertoaikaa Auringon ympäri merkitään symbolilla x ja sen etäisyyttä Auringosta symbolilla y. Alla olevassa taulukossa on viiden Aurinkoa lähinnä olevan planeetan kiertoaika vuosina ja etäisyys astronomisen yksikön avulla lausuttuna.

Planeetta	Merkurius	Venus	Maa	Mars	Jupiter
x	0,241	0,615	1,0	1,881	11,861
$\sqrt[3]{x}$					
y	0,387	0,723	1,0	1,523	5,203
$\sqrt{y}$					

a) Kopioi taulukko vastauspaperiisi ja täydennä puuttuvat kohdat kolmen desimaalin tarkkuudella.

b) Päättele, mikä on Keplerin kaava etäisyydelle y kiertoajan x avulla lausuttuna.

c) Saturnuksen kiertoaika on $29,457$ vuotta. Mikä on sen etäisyys Auringosta?

Ratkaisu: Tämän tehtävän voi laskea tavalliseen tapaan **Main** –sovelluksessa. Sen voi myös tehdä Spreadsheet-sovelluksessa. Kolmen desimaalin tarkkuuden voi asettaa kuvakkeesta avautuvasta valikosta **Basic Format -> Number Format -> Fix 3**.

Annetut luvut voi sijoittaa **Spreadsheet** –sovellukseen ja asettaa riveille 2 ja 4 laskukaavat kuutio- ja neliöjuuren saamiseksi.

	A	B	C	D	E	F	G
1	0.241	0.615	1.000	1.881	11.861		
2	0.622	0.850	1.000	1.234	2.281		
3	0.387	0.723	1.000	1.523	5.203		
4	0.622	0.850	1.000	1.234	2.281		
5							

Spreadsheet –sovellus toimii kuten Microsoftin Excel, joten 4. rivi voidaan täydentää syöttämällä soluun A4 laskukaavaksi **=√ A3 exe**. Tämä kaava voidaan kopioida raahaamalla myös muihin 4. rivin soluihin, jolloin niihin saadaan 3. rivin lukujen neliöjuuret. Toisen rivin laskukaavoihin voi käyttää kaavaa **=A2^(1/3).**

Vertaamalla 2. ja 4. riviä saadaan yhteys kiertoajan ja etäisyyden välille. Saturnuksen kiertoaika saadaan laskimella maalaamalla yhtälö ja valikosta **Interactive -> Advanced** löytyvällä komennolla **solve.**

$$\text{solve}\left(\sqrt{y}=x^{\frac{1}{3}},y\right)$$

$$\left\{y=x^{\frac{2}{3}}\right\}$$

$$\text{solve}\left(\sqrt{y}=29.457^{\frac{1}{3}},y\right)$$

$$\{y=9.538037154\}$$

8. Veetun lounaspaikassa on kolmenlaisia pitsoja: $7{,}50$ euron peruspitsa, $8{,}50$ euron ruispitsa ja $10{,}50$ euron pannupitsa. Pitsoihin valitaan 15 täytteestä kaksi erilaista. Maksamalla euron lisää voi valita vielä kolmannen täytteen. Veetu yrittää syödä aina erilaisen pitsan, joka eroaa kaikista aikaisemmista joko pohjaltaan tai täytteiltään.

a) Kuinka monta viikkoa hän voi tehdä näin, jos hän syö ravintolassa viisi kertaa viikossa?

b) Mikä on erilaisten pitsojen keskimääräinen hinta?

Ratkaisu: **Keyboardin mth** –välilehdeltä kohdasta **CALC** löytyy kombinaation symboli **nCr**

$$\text{nCr}(15,3)\times 3+\text{nCr}(15,2)\times 3$$

$$1680$$

$$\text{ans}/5$$

$$336$$

$$\text{nCr}(15,2)$$

$$105$$

$$\text{nCr}(15,3)$$

$$455$$

$$\frac{105\times(7.50+8.50+10.50)+455\times(8.50+9.50+11.50)}{1680}$$

$$9.645833333$$

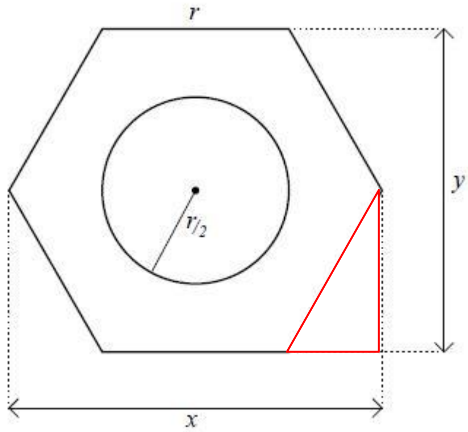
Suoralla laskulla saadaan viikkojen määräksi 336 ja pitsojen keskihinnaksi 9.65 euroa.

9. Tarkastellaan oheisen kuvan mukaista säännöllistä kuusikulmiota, jonka sivun pituus on r.

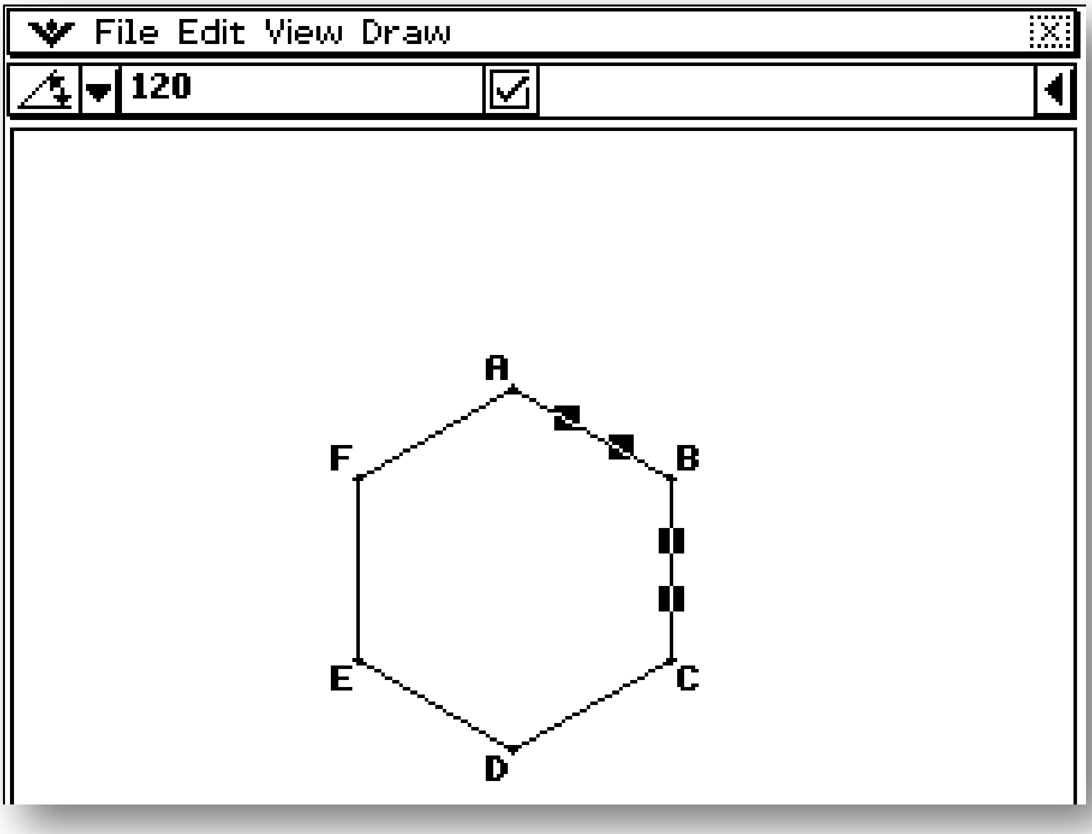
a) Johda leveyden x lauseke sivun pituuden r avulla lausuttuna.

b) Johda korkeuden y lauseke sivun pituuden r avulla lausuttuna.

c) Laske kuusikulmion ja ympyrän väliin jäävän alueen pinta-ala, kun ympyrän säde on $\frac{r}{2}$.



Ratkaisu: **Geometria** –sovelluksen avulla voidaan piirtää nopeasti säännöllinen kuusikulmio ja ratkaista sen kulmaksi 120 astetta valitsemalla kaksi sivua. Tällöin tehtävän kuvassa kolmion, jonka kateetit ovat katkoviivoilla merkitty ja hypotenuusa on r (punaisella merkitty ylläolevaan kuvaan), kantakulma on 60^{o}.



CASIO

Suorakulmaisen kolmion trigonometriaa hyödyntäen saadaan leveys x koostumaan kahdesta tällaisen kolmion kannasta ja sivusta r. Asetetaan tämä muuttujan x paikalle sijoitusoperaattoria $\Rightarrow$ käyttäen. Vastaavasti korkeus y koostuu kahden tällaisen kolmion pidemmistä kateeteista.

Kysytyn pinta-alan laskeminen voidaan tehdä monella tapaa. Tässä ratkaisussa ei ole käytetty taulukkokirjan säännöllisen kuusikulmion pinta-alan kaavaa, vaan laskettu kuusikulmion ala vähentämällä sitä ulkopuolitse sivuavasta suorakaiteesta neljä nurkkiin jäävää kolmiota. Tämä arvo on sijoitettu muuttujaksi ”kuusikul”.

Ympyrän ala on sijoitettu muuttujaksi ”ympyra” ja sitten näiden muuttujien vähennyslaskulla on saatu kysytty ala. Valikosta **Interactive -> Transformation** löytyvällä komennolla **factorOut** voidaan poimia yhteiseksi tekijäksi r^2. Vastauksesta voi ottaa likiarvon maalaamalla se ja koskemalla painiketta .

$$r+2\cos(60)r \Rightarrow x$$

$$2\cdot r$$

$$2\sin(60)r \Rightarrow y$$

$$\sqrt{3}\cdot r$$

$$x\,y-4\times\frac{1}{2}\times\cos(60)r\times\sin(60)r \Rightarrow kuusikul$$

$$\frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot r^2}{2}$$

$$\pi\times\left(\frac{r}{2}\right)^2 \Rightarrow ympyra$$

$$\frac{r^2\cdot\pi}{4}$$

$$kuusikul-ympyra$$

$$\frac{-r^2\cdot\pi}{4}+\frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot r^2}{2}$$

$$\mathrm{factorOut}\left(ans, r^2\right)$$

$$r^2\cdot\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$$

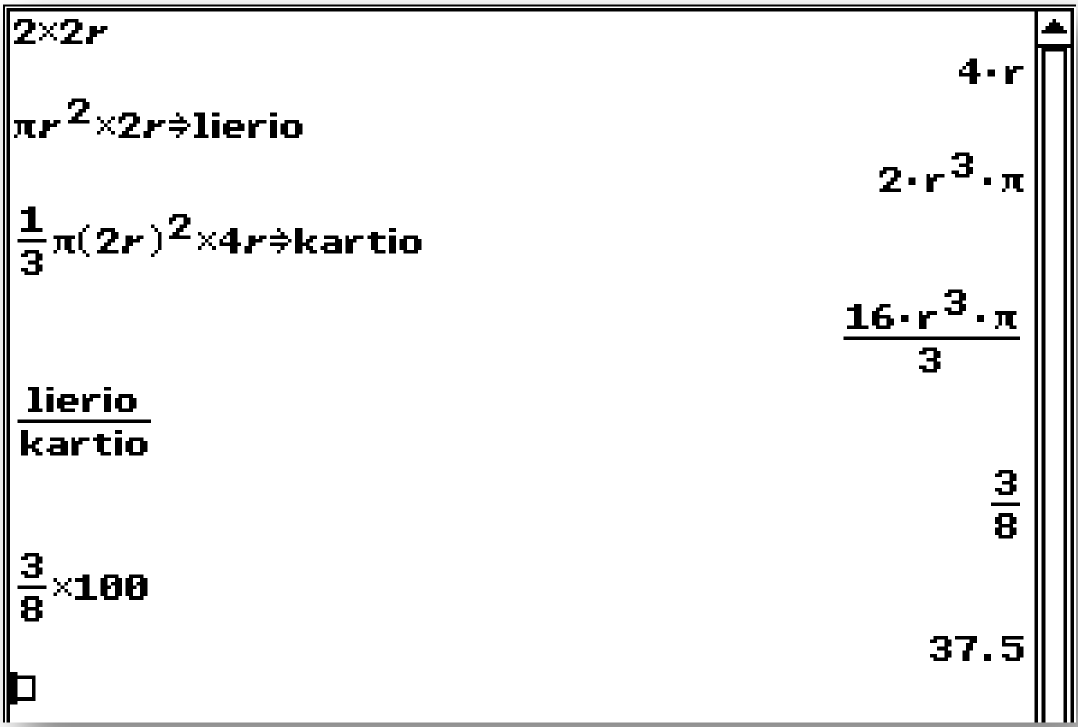
$$r^2\cdot\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$1.812678048\cdot r^2$$

Huomautus: Edelliseen vastaukseen voi aina viitata **ans**, kuten tässäkin tekijän ottamisessa on tehty. Laskimen kulmanyksikkönä on tässä laskussa ollut asteet. Voit vaihtaa kulman yksikön koskemalla kynällä näytön alareunassa olevaa merkintää, josta näkyy jokin kolmesta vaihtoehdosta **Deg-Gra-Rad**.

10. Suoran ympyräkartion sisällä on suora ympyrälieriö, jonka pohja on kartion pohjalla ja yläreuna sivuaa kartion vaippaa. Lieriön pohjan halkaisija on yhtä suuri kuin sen korkeus. Toisaalta lieriön pohjan halkaisija on puolet kartion pohjan halkaisijasta. Kuinka monta prosenttia lieriön tilavuus on kartion tilavuudesta? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

Ratkaisu: Merkitään kartion korkeutta h ja lieriön korkeutta 2r. Lieriön korkeus on samalla pohjan halkaisija tehtävänannon mukaisesti. Nyt laskimella saadaan lieriölle ja kartiolle tilavuuksien lausekkeet, jotka on tässä ratkaisussa sijoitettu vastaavien muuttujien nimille ”lierio” ja ”kartio”. Lasketaan lopuksi kysytty tilavuuksien suhde



Huomautus: ClassPad 330 Plus hyväksyy mitä tahansa kahdeksan aakkosen mittaisia muuttujan nimiä. Tämä on hyödyllinen tehtävissä, joissa on paljon muuttujia tai jos tehtävä halutaan tarkoituksella kirjoittaa tietynlaiseksi. Kuten tässä vihkosessa tehtävän 15 vektoreiden nimeämisen osalta.

11. Aikuisen ihmisen sääriluun pituus y riippuu henkilön pituudesta x kaavojen

$$y = 0,43x - 27 \text{ (nainen)}$$
$$y = 0,45x - 31 \text{ (mies)}$$

mukaisesti, kun yksikkönä on senttimetri.

a) Arkeologi löytää naisen sääriluun, joka on 41 cm pitkä. Kuinka pitkä nainen oli?

b) Kaivauksissa löytyneen miehen pituudeksi arvioidaan 175 cm. Miehen läheltä löytyy sääriluu, jonka pituus on 42 cm. Onko kyseessä saman henkilön sääriluu?

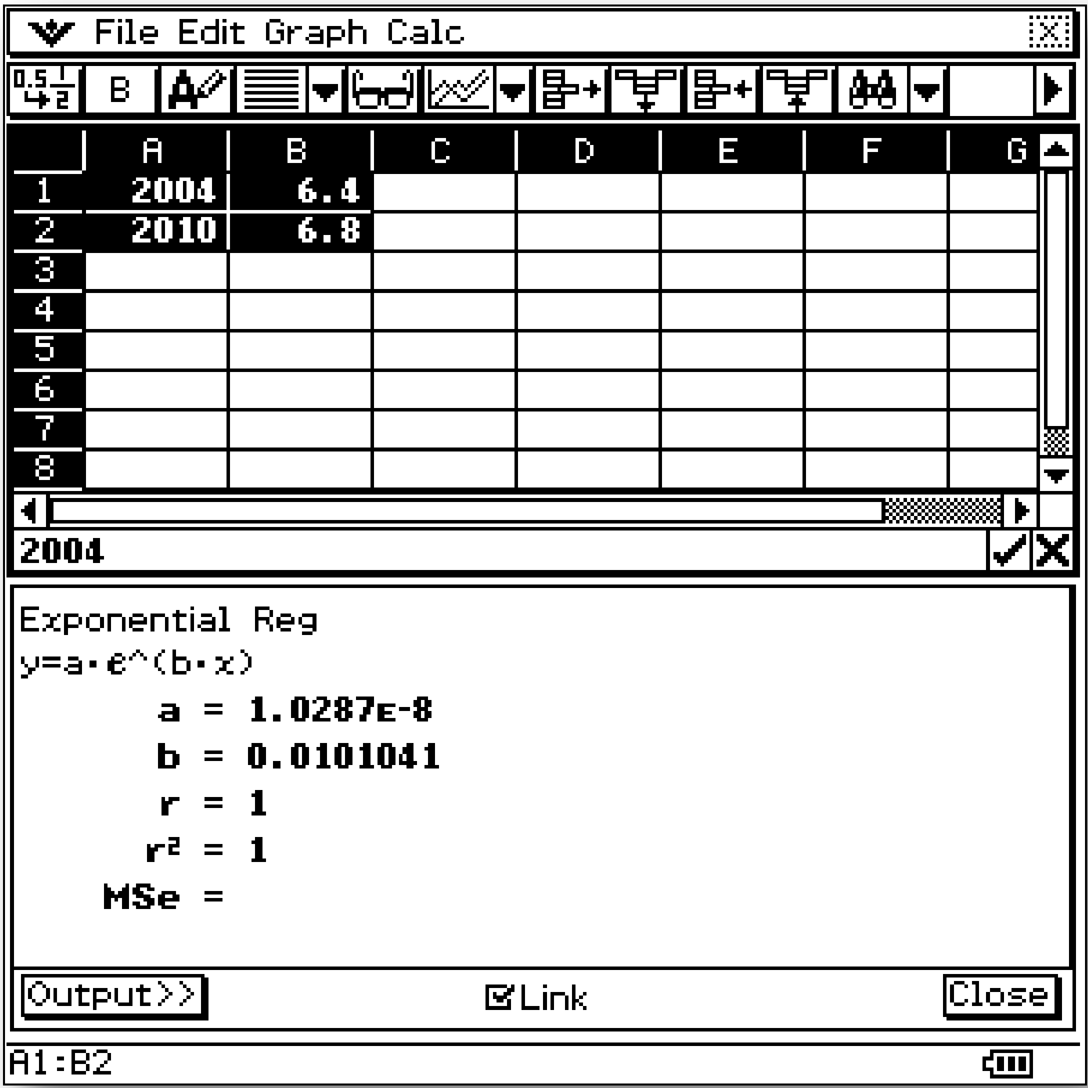
<http://tieku.fi/kulttuuri-ja-historia/menneisyyden-kulttuurit/joukkohauta-viikingit-menettivat-paansa-englannissa>. Luettu 29.3.2011.

Ratkaisu: Kirjoittamalla yhtälöt laskimeen ja ratkaisemalla ne annetuilla luun pituuksilla saadaan ihmisten pituudet suoraan laskimesta. B-kohdassa henkilö ei voi olla luun omistaja, koska 42 cm sääriluu kuuluu noin 162cm pitkälle miehelle.

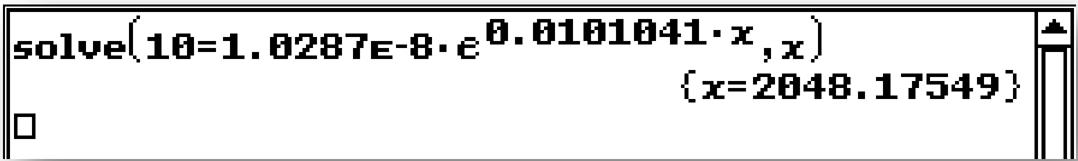
```
solve(41=0.43·x-27,x)
                              {x=158.1}
solve(42=0.45·x-31,x)
                              {x=162.2}
```

12. Maailman väkiluvun kasvua kuvataan usein eksponentiaalisen mallin avulla. Vuonna 2004 väkiluku oli $6,4$ miljardia ja vuonna 2010 noin $6,8$ miljardia. Minä vuonna väkiluku ylittää mallin mukaan 10 miljardin rajan?

Ratkaisu: **Spreadsheet** –sovellukseen voidaan syöttää annetut luvut ja etsiä eksponentiaalinen regressiomalli valikosta **Calc -> Regressions -> Exponential Reg**.



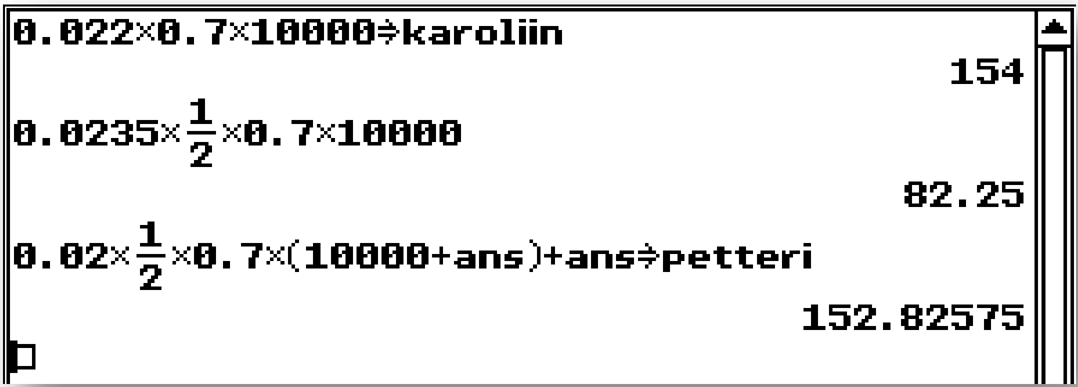
Sijoittamalla saatuun yhtälöön 10 miljardia ihmistä saadaan laskimen ratkaisuna vuodeksi 2048.



CASIO

13. Karoliina ja Petteri tallettivat kumpikin 10 000 euroa vuodeksi. Karoliina sijoitti rahansa vuoden määräaikaistilille 2,20 %:n vuotuisella korolla. Maksetusta korosta pankki pidätti 30 % lähdeveroa. Petteri sijoitti rahansa ensin puolen vuoden määräaikaistilille, jonka vuosikorko oli 2,35 %. Puolen vuoden kuluttua Petteri sijoitti pääoman korkoineen, josta pankki oli pidättänyt 30 % lähdeveroa, toiselle puolen vuoden määräaikaistilille. Tämän tilin vuosikorko oli 2,00 %. Maksetusta korosta pankki pidätti jälleen 30 % lähdeveroa. Kumpi teki paremman sijoituksen, ja mikä oli sen arvo vuoden kuluttua?

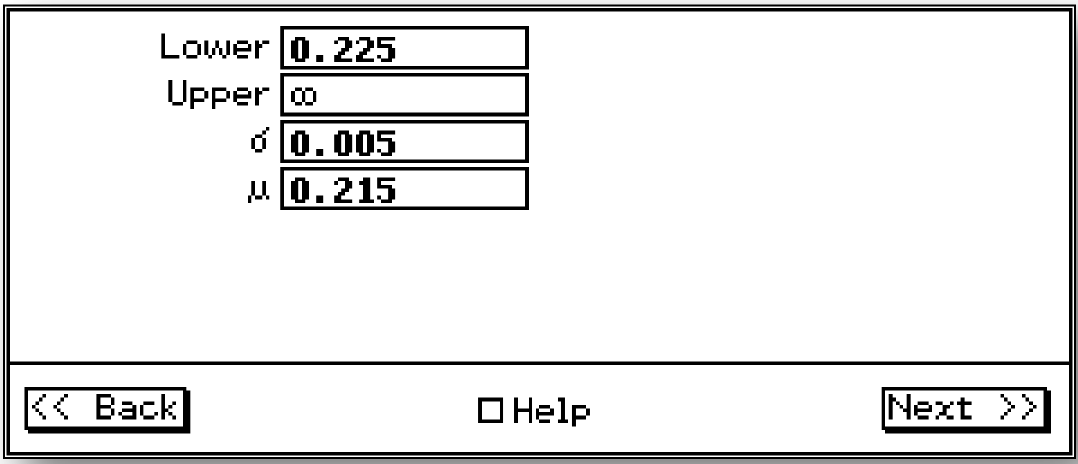
Ratkaisu: Lasketaan molemmille tallettajille koron suuruus vuoden ajalta



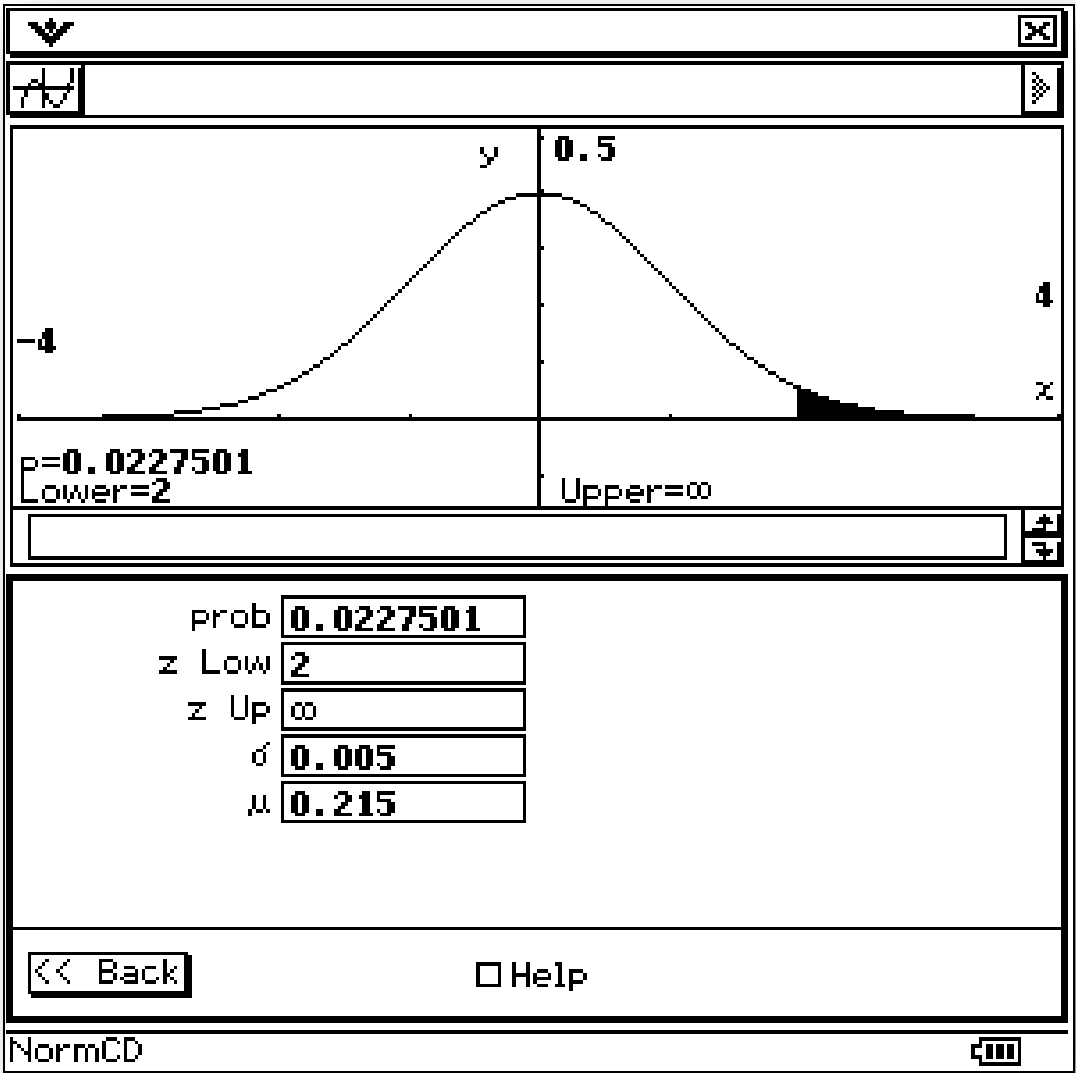
Koska Karoliinan korkotuotto vuodessa oli suurempi, oli hän parempi sijoittaja. Karoliinan talletuksen arvo vuoden lopussa oli siis 10154 euroa.

14. Eräässä tutkimuksessa mitattiin tiettyä lisäainepitoisuutta sadassa pullollisessa virvoitusjuomaa. Pitoisuuden keskiarvoksi saatiin $\bar{x} = 0{,}215$ % ja keskihajonnaksi $s = 0{,}005$ %. Lisäainepitoisuus noudattaa normaalijakaumaa. Millä todennäköisyydellä lisäaineen pitoisuus pullossa ylittää sallitun rajan $0{,}225$ %?

Ratkaisu: Jakaumalaskuja on helpoin käsitellä sovelluksessa **Statistics**, josta valikosta **Calc -> Distribution** pitää sisällään monta erilaista jakaumaa. Valitaan niistä **Normal CD** eli kertymäfunktion alle jäävän kumulatiivisen todennäköisyyden laskeminen. Syötetään annetut arvot

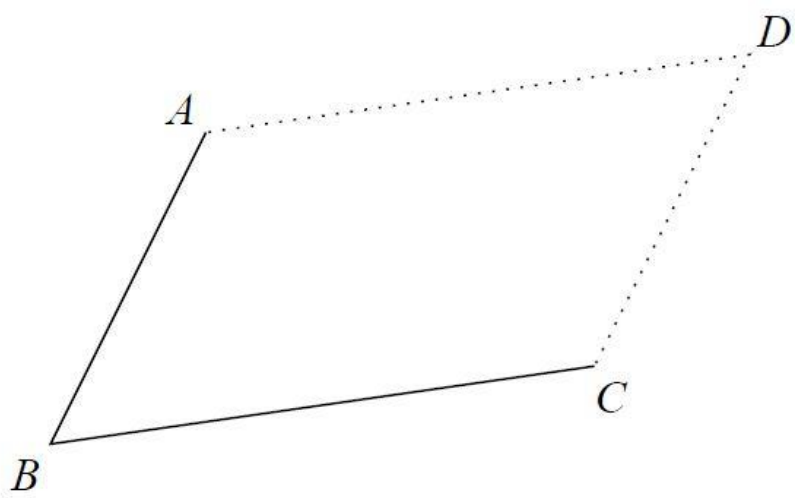


ja kosketaan näppäintä **Next**, jolloin saadaan todennäköisyydeksi n. 2.3%. Kuvaajan painikkeesta voidaan myös piirtää tilannetta vastaava normaalijakauman kuvaaja



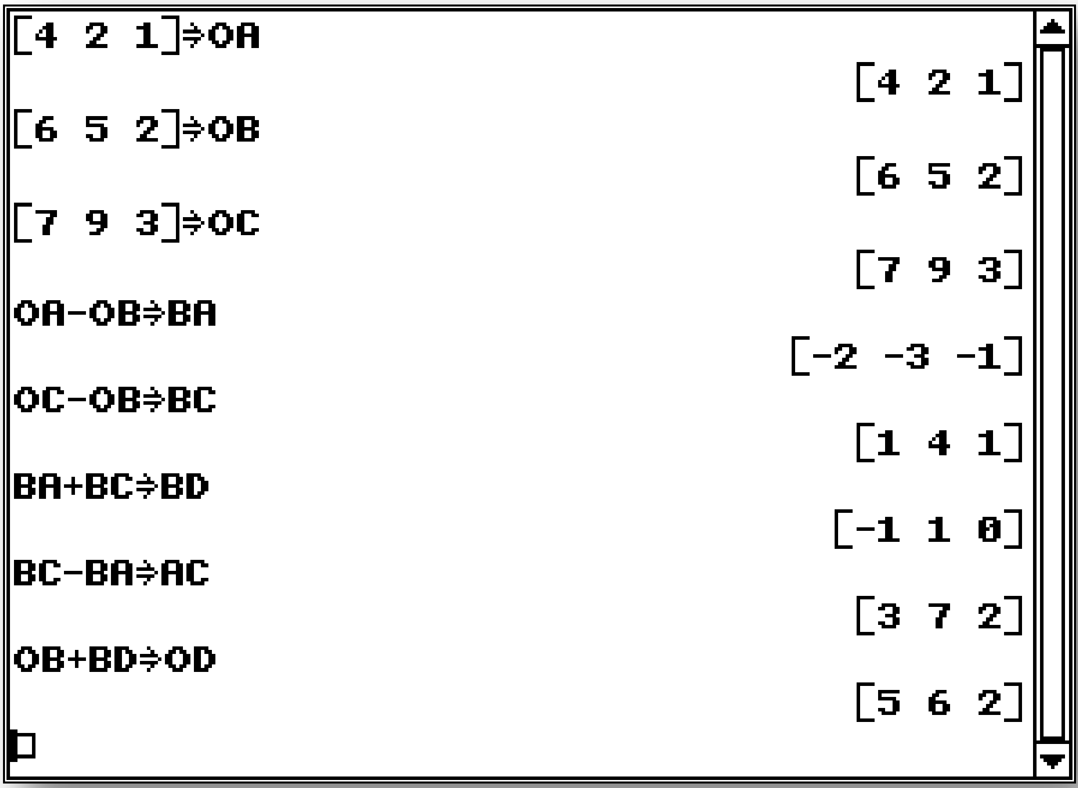
Huomautus: **ClassPad 330 Plus** käyttää ääretöntä laskuissa matemaattisesti oikein. Vaikka normaalijakauma lähestyykin hyvin nopeasti vaaka-akselia ja ylärajaksi voitaisiin vastaustarkkuuden siitä kärsimättä syöttää jokin iso luku, niin helpompaa ja matemaattisesti korrektimpaa on käyttää ylärajan kohdalla ääretöntä. Se löytyy keyboardin välilehdiltä **mth** ja **2D**.

15. Paikkavektorit $\overline{OA} = 4\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{OB} = 6\overline{i} + 5\overline{j} + 2\overline{k}$ ja $\overline{OC} = 7\overline{i} + 9\overline{j} + 3\overline{k}$ määrittävät suunnikkaan kolme kärkipistettä A, B ja C. Määritä neljännen kärjen D paikkavektori $\overline{OD}$ sekä suunnikkaan lävistäjävektorit $\overline{AC}$ ja $\overline{BD}$.



Ratkaisu: ClassPad 330 Plus käsittelee vektoreita matriisimuodossa. Kertoimista voi tehdä vaaka- tai pystymatriisin, mutta vaakamatriisin on opiskelijoille helpompi sen muistuttaessa ulkoasultaan enemmän vektorimuotoa.

Keyboardin välilehdeltä **2D** löytyy matriisityökalu [■□] ja koskemalla sitä kahdesti saadaan kolmepaikkainen matriisi. Matriisit voi halutessaan sijoittaa muutujiksi kuten tässä malliratkaisussa on tehty.



Tästä luetaan lävistäjiksi $\overline{BD} = -\bar{\imath} + \bar{\jmath}$ ja $\overline{AC} = 3\bar{\imath} + 7\bar{\jmath} + 2\bar{k}$ ja pisteen D paikkavektoriksi $\overline{OD} = 5\bar{\imath} + 6\bar{\jmath} + 2\bar{k}$.

Casio Scandinavia AS, Finland Filial

Keilaranta 4

02150 Espoo

info@casio.fi

tilaus@casio.fi

Pepe Palovaara

School Coordinator Finland

Puhelin: +358 (0)44 72 75 776

E-Mail: pepe.palovaara@casio.fi