ClassPad 330 Plus studentexamen

Hösten 2012 kort matematik

Mer tid för matematik och mindre tid för att lära sig räknaren.

CASIO

Kära läsare!

Användningen av CAS-beräkningar i studentexamen är ännu i ett tidigt stadium i Finland. Svårigheten är att veta hur man ska poängsätta svaren, vilka beräkningssteg som måste vara synliga vid examen. Lärarna behöver utbildning och läroplanen förändringar. Även studentexamen kommer kanske att behövas göras om genom andra typer av uppgifter.

I detta häfte har man löst ett prov i kort matematik med hjälp av Casios ClassPad 330 Plus-räknare.Detta är det andra provet där det var tillåtet att använda symboliska räknare. Som ni kommer att märka har man nytta av symboliska räknare även i kort matematik.

I vissa lösningar har man svaret angetts direkt utan att visa mellanliggande steg och i andra uppgifter med dess olika delsteg. I lösningarna finns även kortfattade förklaringar om hur man kan och bör mata in olika uppgifter i räknaren.

Principen med att använda ClassPad 330 Plus är att uttryck och ekvationer matas in som de är. Därefter kan man markera ett uttryck eller en ekvation och sedan välja rätt åtgärd i Interactive-menyn. Uttryck kan kopieras genom att dra med pennan eller använda **Edit->Copy** mellan olika program.

I det här fallet behöver inte användaren veta syntaxen i räknaren och därmed undviker man misstag i beräkningarna. De erfarna användarna kan använda **Action** –menyn för att använda räknaren vid olika kommandon. För nybörjare eller studenter är det mycket roligare att börja räkna uppgifter utan att behöva lära sig mer om räknaren tack vare **Interactive-**menyn.

Jag tar gärna emot frågor och kommentarer. Kontaktuppgifter finns på baksidan. Ha så roligt med matematiken och med detta lösningshäfte!

Kempeleessä 10.10.2012 *Pepe*

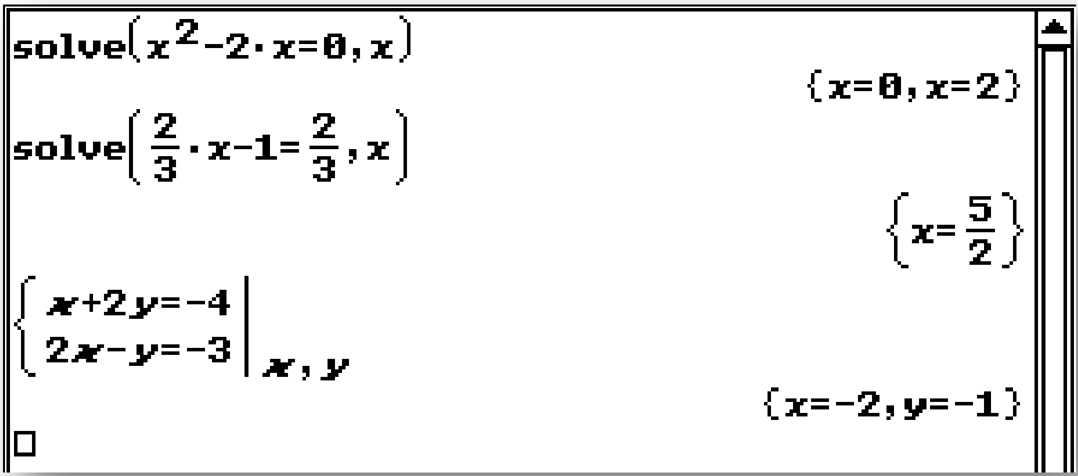
CASIO

1. a) Lös ekvationen $x^2 - 2x = 0$

   b) Lös ekvationen $\frac{2}{x}x - 1 = \frac{2}{3}$

   c) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$

Lösning med ClassPad

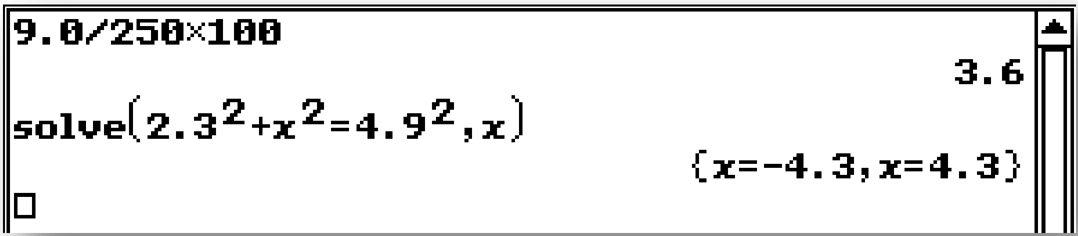


För uppgifterna a och b, lägg in ekvationerna och markera dem sedan med pennan genom att dra pennan över dem. Välj sedan: **Interactive -> Advanced** och sedan kommandot **Solve.** Tryck sedan **OK** för att godkänna. I uppgift C-bör man använda tangentbordet. Tryck ”keyboard” och sedan 2D. Där hittar du tangenten för ekvationssystem . Tryck EXE för att lösa ekvationen.

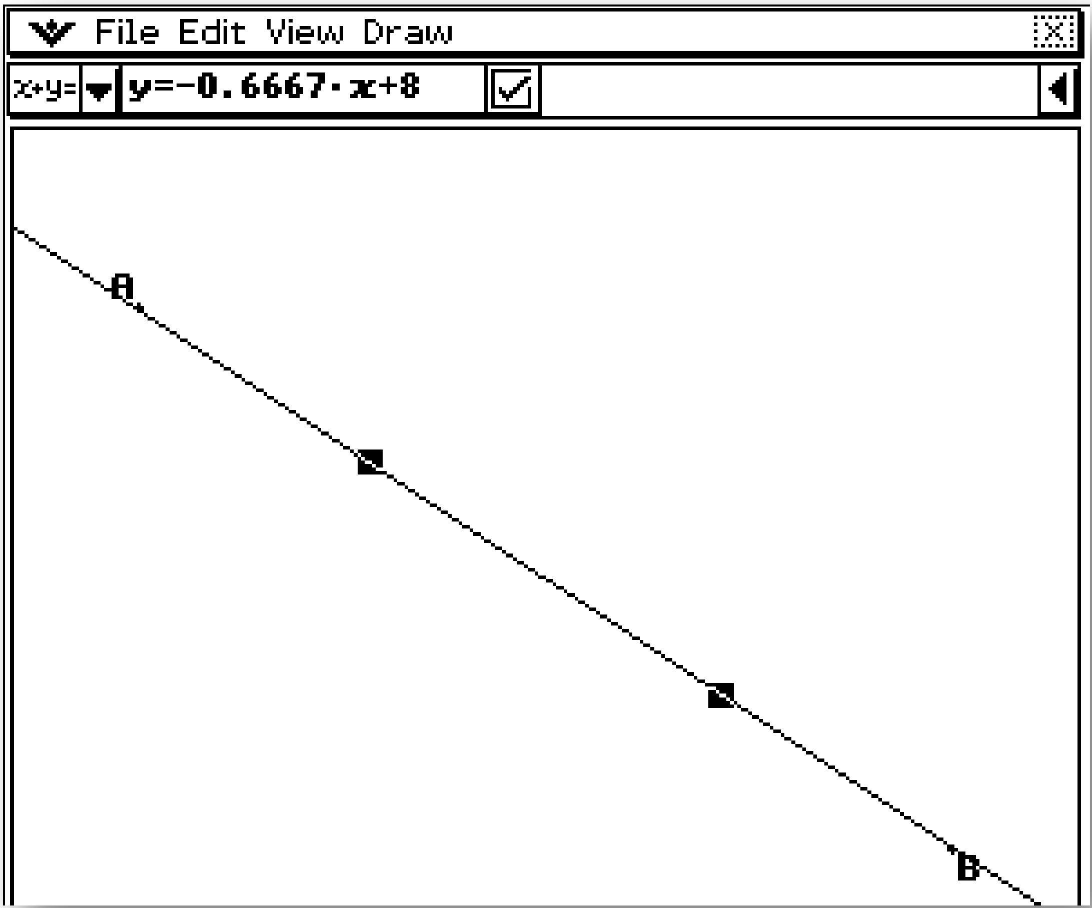
Du vet väl att det även finns programvara för PC? Du kan använda projektor eller Smartboard tillsammans med programvaran för att visa eleverna dina uträkningar. Ladda hem en gratis testversion: http://edu.casio.com

2. a) Bestäm salthalten i en medvursts med en noggrannhet av en tiondels procent, när 250 gram av medvursten innehåller 9,0 gram salt.
   b) I en rätvinklig triangel är längden av hypotenusan 4,9 m, medan en av kateterna har längden 2,3 m. Beräkna längden av den andra kateten med 0,1 meters noggrannhet.
   c) Bestäm ekvationen för den räta linje som går genom punkterna (0,8) och (12,0)

Lösning: Uppgift a och b med räknare:



För uppgift b gäller den positiva lösningen 4,3 m. I uppgift C kan man använda geometriprogrammet. Vi ritar två punkter A och B och ger dem koordinaterna från uppgiften. Därefter ritar vi en rät linje genom punkterna och genom att välja linjen med pennan, får vi linjens ekvation.



3. a) Beräkna derivatan av funktionen $f(x) = x(x+2)^2$ i punkten $x = 0$
   b) Lös ekvationen $2^{3x+1} = 32$
   c) $\log_4(3x) = 3$

Lösning: Med räknaren får man lösningarna till alla uppgifter. Skriv ekvationerna och markera dem sedan genom att dra pennan över dem. Välj därefter **Interactive -> Calculation -> diff** och **Interactive -> Advanced –> solve**

```
diff(x·(x+2)^2,x,1,0)
                                        4
```

$$\text{solve}(2^{3\cdot x+1}=32,x) \qquad \left\{x=\frac{4}{3}\right\}$$

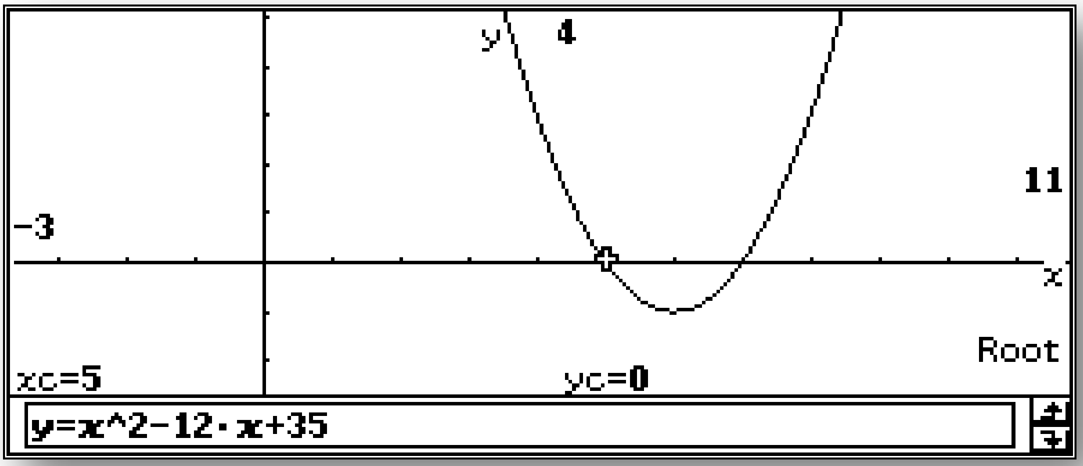
$$\text{solve}(\log_4(3\cdot x)=3,x) \qquad \left\{x=\frac{64}{3}\right\}$$

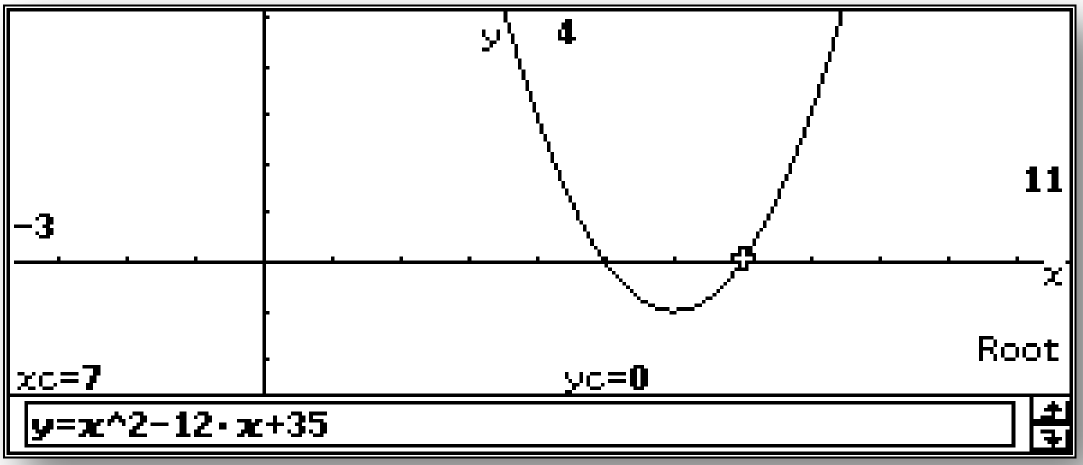
4. Vi betraktar parabeln $y = x^2 - 12x + 35$.
   a) I vilka punkter skär parabeln x-axeln?
   b) Bestäm koordinaterna för parabelns topp.

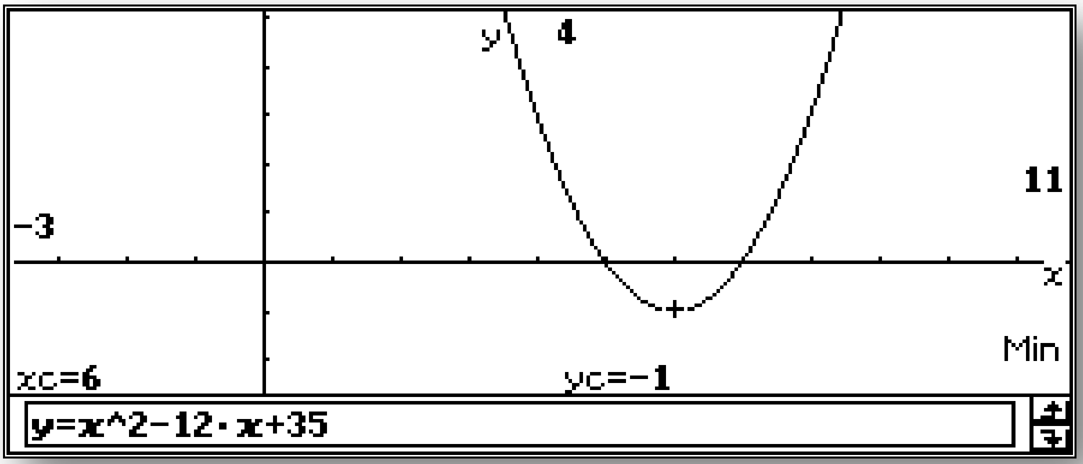
Lösning: Nollpunkterna kan beräknas i programmet **Main** genom att lägga in ekvationen som den är och sedan markera den. Välj därefter **Interactive** -> **Advanced -> Solve**, räknaren tar hand om syntaxen:

$$\text{solve}(x^2-12\cdot x+35=0,x) \qquad \{x=5,x=7\}$$

Ekvationens högra del kan även matas in **keyboard 2D.** Tryck sedan på symbolen för att displayen ska delas i två delar, varav nedre delen visar ett koordinatsystem. Genom att markera ekvationen och sedan dra den till koordinatsystemet får man den uppritad som en graf. Tangenterna och hittar minimipunkten och nollpunkterna (navigeringstangentens högerpil letar efter nästa nollpunkt). Se bilderna:


y
4
11
-3
x
Root
xc=5
yc=0
y=x^2-12·x+35


y
4
11
-3
x
Root
xc=7
yc=0
y=x^2-12·x+35

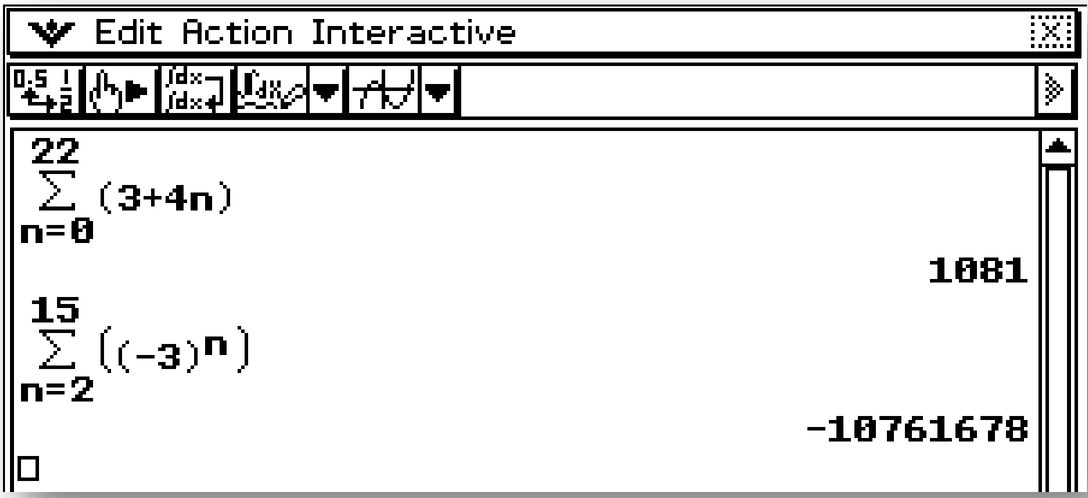

y
4
11
-3
x
Min
xc=6
yc=-1
y=x^2-12·x+35

5. Bestäm summorna

a) $\sum_{n=0}^{22} 3+4n$

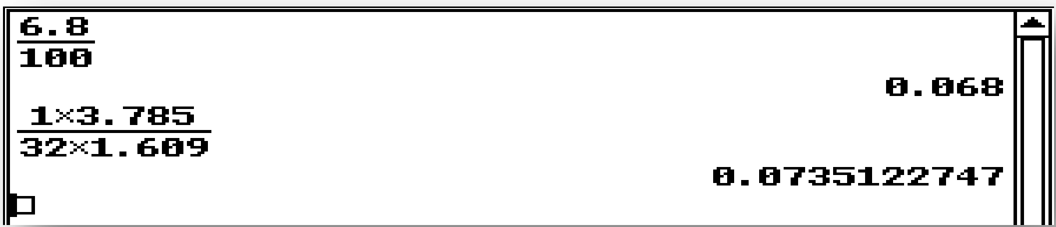
b) $\sum_{n=2}^{15}(-3)^n$

Lösning: **Under keyboard 2D** finns en funktion CALC, där det finns färdiga formler för summaberäkningar och vid användning av dessa får man exakta värden.



6. En viss japansk bilmodell förbrukar vid landvägskörning i genomsnitt 6,8 liter bensin på hundra kilometer. Med en amerikansk bil i samma storleksklass kan man köra 32 engelska mil på en gallon bensin. Vilkendera bilen förbrukar minst bränsle? En gallon är cirka 3,785 liter och en engelsk mil är ca 1,609 kilometer.

Lösning: Med räknaren får man genomsnittsförbrukningen:



Vi drar slutsatsen att den japanska bilen drar mindre bensin.

7. Den tyske astronomen Johannes Kepler (1571-1630) upptäckte sambandet mellan en planets avstånd från solen och dess omloppstid. Låt symbolen *x* beteckna en planets omloppstid och låt symbolen *y* beteckna dess avstånd från solen. Nedanstående tabell innehåller omloppstiden i år för de fem planeter som ligger närmast solen och deras avstånd från solen med den astronomiska enheten som mått.

Planet	Merkurius	Venus	Jorden	Mars	Jupiter
x	0,241	0,615	1,0	1,881	11,861
$\sqrt[3]{x}$					
y	0,387	0,723	1,0	1,523	5,203
$\sqrt{y}$					

a) Kopiera tabellen på ditt svarspapper och fyll i de värden som saknas med tre decimalers noggrannhet.

b) Vilken är Keplers formel för avståndet *y* uttryckt med hjälp av omloppstiden?

c) Saturnus har en omloppstid på 29,457 år. Hur långt från solen befinner sig Saturnus?

Lösning: I **Main**–programmet kan man beräkna tabellens första tomma rad och man kan även ställa in räknaren med tre decimalers noggrannhet genom att trycka på och sedan välja **Basic Format -> Number Format -> Fix 3**.

Dessa värden kan även läggas i **Spreadsheet**–programmet genom att använda **Copy-Paste** –funktionen som hittas under **Edit**.

	A	B	C	D	E	F	G
1	0.241	0.615	1.000	1.881	11.861		
2	0.622	0.850	1.000	1.234	2.281		
3	0.387	0.723	1.000	1.523	5.203		
4	0.622	0.850	1.000	1.234	2.281		
5							

Spreadsheet fungerar som Microsofts Excel, där värden i rad 4 kan matas in alternativt anges med formel i cell A4= √ **A3 EXE**. Denna procedur upprepar man även för de övriga cellerna i rad 4.

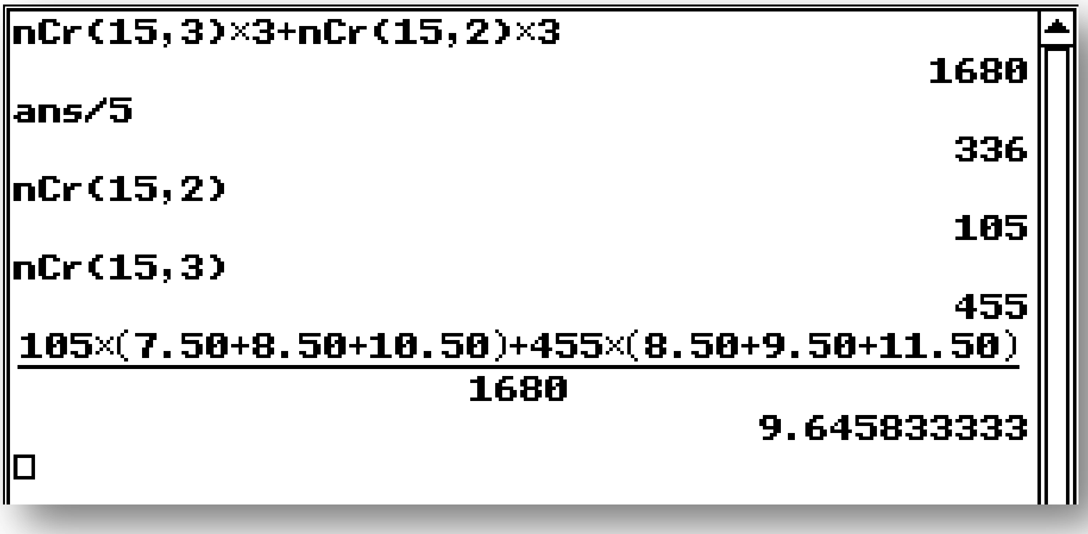
Genom att jämföra andra och fjärde raden får man sambandet mellan omloppstiden och avståndet. Räknaren kan användas för att lösa ekvationen med avseende på y genom att lägga in Saturnus omloppstid och vi får svaret för uppgift C genom att markera ekvationen och välja **Interactive -> Advanced ->solve**

$$\text{solve}\left(\sqrt{y}=x^{\frac{1}{3}},y\right) \qquad \left\{y=x^{\frac{2}{3}}\right\}$$

$$\text{solve}\left(\sqrt{y}=29.457^{\frac{1}{3}},y\right) \qquad \{y=9.538037154\}$$

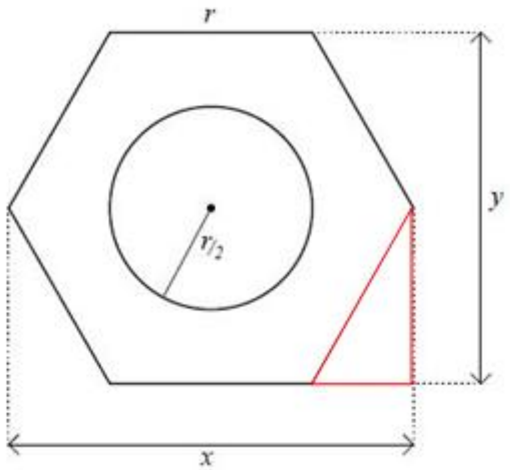
8. Fred brukar besöka en lunchrestaurang som serverar tre olika slags pizzor: standardpizzor som kostar 7,50 euro, rågpizzor som kostar 8,50 euro och pannpizzor som kostar 10,50 euro. Kunden ska välja två fyllningar bland 15 alternativ. För tilläggspriset en euro kan kunden välja en tredje fyllning. Fred försöker alltid äta en pizza som avviker från alla tidigare i fråga om antingen botten eller fyllningar.
   a) Hur många veckor kan göra det om han äter på restaurangen fem gånger i veckan?
   b) Vilket är medelpriset för der olika pizzorna?

Lösning: Välj **Keyboard mth** och där hittar man symbolen **nCr**

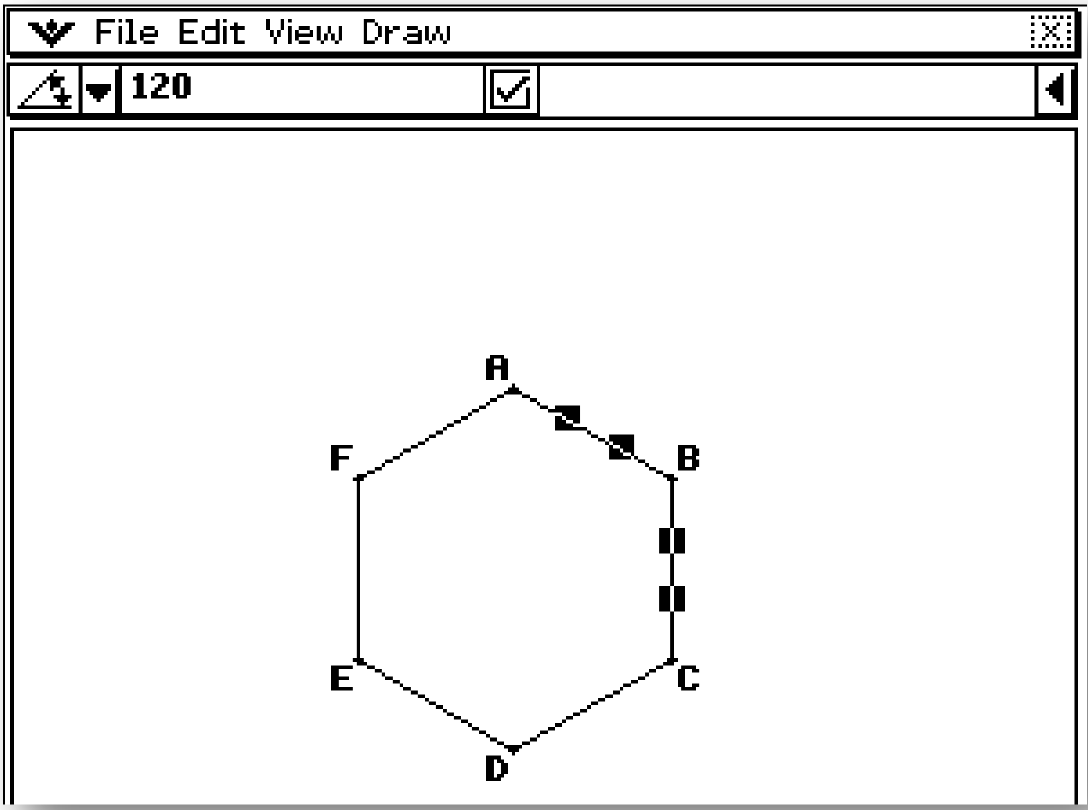


En direkt beräkning ger 336 veckor och genomsnittspriset blir 9.65 euro.

9. I figuren nedan finns en regelbunden sexhörning, vars sida har längden r.
   a) Härled ett uttryck för bredden x som en funktion av r.
   b) Härled ett uttryck för höjden y som en funktion av r.
   c) Beräkna arean av området mellan sexhörningen och cirkeln, när cirkelns radie är $\frac{r}{2}$.



Lösning: Med hjälp av **Geometri**–programmet kan man snabbt rita en regelbunden sexhörning och få dess vinkel på 120 grader genom att välja två sidor. I detta fall är triangeln rödmarkerad och en kateter har markerats med svarta punkter och hypotenusan är r och har vinkeln 60 grader.



Genom att utnyttja egenskaperna hos en rätvinklig triangel så får vi bredden *x* att vara lika med sidan *r* plus två kateter (de som är markerade med streckade linjer). Spara detta i variabeln *x* genom att använda tilldelningspilen =>. Höjden är y och är lika med två stycken av den längre katetern i samma triangel.

För att få fram arean mellan mellan sexhörningen och cirkeln, subtrahera cirkelns area från sexhörningens. Välj **Interactive -> Transformation** och kommandot **factorOut** där man bryter ut den gemensamma faktorn r^2. För att få en approximation av svaret, markera svaret och tryck på knappen .

$$r+2\cos(60)r \Rightarrow x \qquad 2\cdot r$$

$$2\sin(60)r \Rightarrow y \qquad \sqrt{3}\cdot r$$

$$x\,y-4\times\frac{1}{2}\times\cos(60)r\times\sin(60)r \Rightarrow kuusikul \qquad \frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot r^2}{2}$$

$$\pi\times\left(\frac{r}{2}\right)^2 \Rightarrow ympyra \qquad \frac{r^2\cdot\pi}{4}$$

$$kuusikul-ympyra \qquad \frac{-r^2\cdot\pi}{4}+\frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot r^2}{2}$$

$$\text{factorOut}\left(ans, r^2\right) \qquad r^2\cdot\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$r^2\cdot\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right) \qquad 1.812678048\cdot r^2$$

Observera: Tidigare svar kan alltid hänvisas till **ans**, som har gjorts i detta fall. Du kan ändra vinkelenheten genom att trycka med pennan längst ner på displayen där det en av de tre alternativen **Deg-Gra-Rad** står.

10. I en rak cirkulär kon är en rak cirkulär cylinder placerad så, att cylinderns nedre basyta ligger på konens basyta och cylinderns övre kant tangerar konens mantelyta. Diametern av cylinderns basyta är lika stor som cylinderns höjd och samtidigt hälften så stor som diametern av konens basyta. Hur många procent av konens volym utgör cylinderns volym? Ge ditt svar med en noggrannhet av en tiondels procent.

Lösning: Ange konens höjd till h och cylinderns höjd till 2r. Enligt uppgift är cylinderns diameter lika stor som höjden. Nu får vi konens och cylinderns uttryck i den här lösningen och de benämns som lierio (=cylinder) och kartio (=kon). Beräkna förhållandet mellan volymerna.

$$2\times 2r \qquad 4\cdot r$$

$$\pi r^2\times 2r \Rightarrow \text{lierio} \qquad 2\cdot r^3\cdot\pi$$

$$\frac{1}{3}\pi(2r)^2\times 4r \Rightarrow \text{kartio} \qquad \frac{16\cdot r^3\cdot\pi}{3}$$

$$\frac{\text{lierio}}{\text{kartio}} \qquad \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{8}\times 100 \qquad 37.5$$

Notera: ClassPad 330 Plus accepterar vilket namn som helst med 8 tecken. De här är användbart för uppgifter där man har många variabler eller om man vill namnge uppgiften med ett särskilt namn. Som till exempel i uppgift 15 i detta häfte där vektorer har namngetts.

11. Hos en vuxen människa beror skenbenets längd *y* av personens kroppslängd *x* enligt formlerna

$$y = 0{,}43x - 27(\text{kvinna})$$
$$y = 0{,}45x - 31(\text{ man})$$

Där enheterna är centimeter.

a) En arkeolog hittar ett 41 cm långt skenben av en kvinna. Hur lång var kvinnan?

b) Vid en utgrävning hittas resterna av en man som bedömts ha varit 175 cm lång. I närheten hittas ett skenben som är 42 cm långt. Kommer skenbenet från samma person?

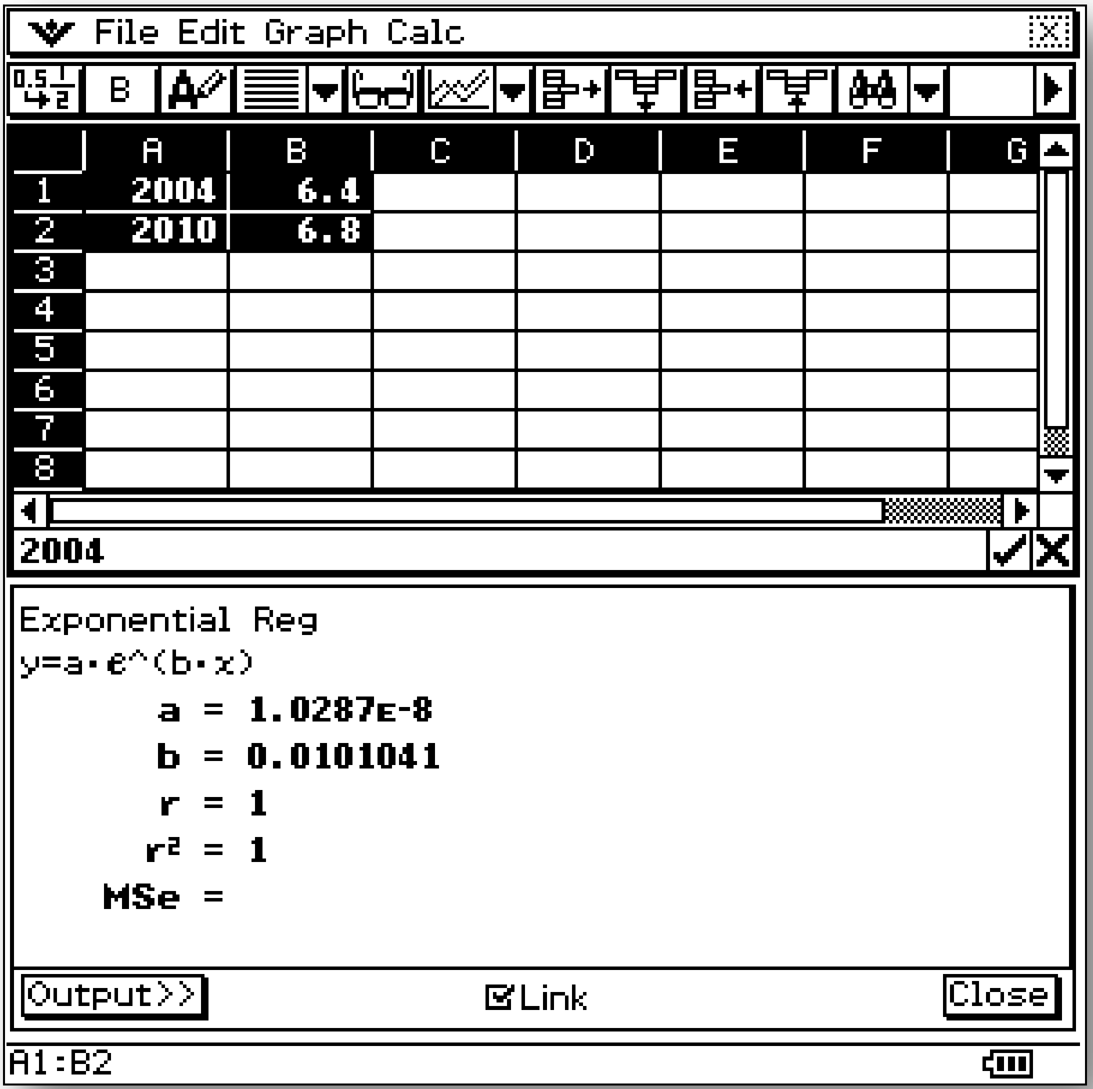
<http://tieku.fi/kulttuuri-ja-historia/menneisyyden-kulttuurit/joukkohauta-viikingit-menettivat-paansa-englannissa>. Hämtad 29.3.2011.

Lösning: Lägg in ekvationerna och ange benlängderna för att få personernas kroppslängder. I uppgift B kan inte benet tillhöra personen ifråga eftersom den kommer från någon som hade kroppslängden 162 cm

```
solve(41=0.43·x-27,x)
                                  {x=158.1}
solve(42=0.45·x-31,x)
                                  {x=162.2}
```

12. Befolkningstillväxten i världen beskrivs ofta med hjälp av en exponentiell modell. År 2004 var jorden befolkning 6,4 miljarder, medan år 2010 var cirka 6,8 miljarder. Vilket år kommer jordens befolkning överskrida 10 miljarder enligt modellen?

Lösning: Lägg in de angivna värdena i **Spreadsheet**–programmet och välj **Calc -> Regressions -> Exponential Reg** för att hitta den exponentiella regressionen.



Svaret blir år 2048 när man lägger in värdet 10 miljarder människor i ekvationen.

$$\mathrm{solve}\left(10=1.0287\mathrm{E}{-8}\cdot e^{0.0101041\cdot x},x\right)$$

$$\{x=2048.17549\}$$

13. Karolina och Petter satte vardera in 10 000 euro på banken för ett år. Karolina valde en tidsbunden tolv månaders deposition som med en årlig ränt på 2,20 %. Av räntan innehöll banken källskatten som uppgick till 30 %. Petter placerad först sina pengar på ett tidsbundet sex månaders konto med en årlig ränta på 2,35 %. Efter ett halvt år placerad han kapitalet, inklusive räntan minskad med källskatten på 30 % som banken dragit av, på ett annat tidsbundet sex månaders konto. Detta konto hade en årsränta på 2,00 %. Av räntan innehöll banken som tidigare källskatten på 30 %. Vem gjorde den bästa placeringen och hur var dess värde efter ett år?

Lösning: Beräkna räntan för de båda insättningarna under ett år

$$0.022\times0.7\times10000\Rightarrow \mathrm{karoliin}$$

$$154$$

$$0.0235\times\frac{1}{2}\times0.7\times10000$$

$$82.25$$

$$0.02\times\frac{1}{2}\times0.7\times(10000+\mathrm{ans})+\mathrm{ans}\Rightarrow \mathrm{petteri}$$

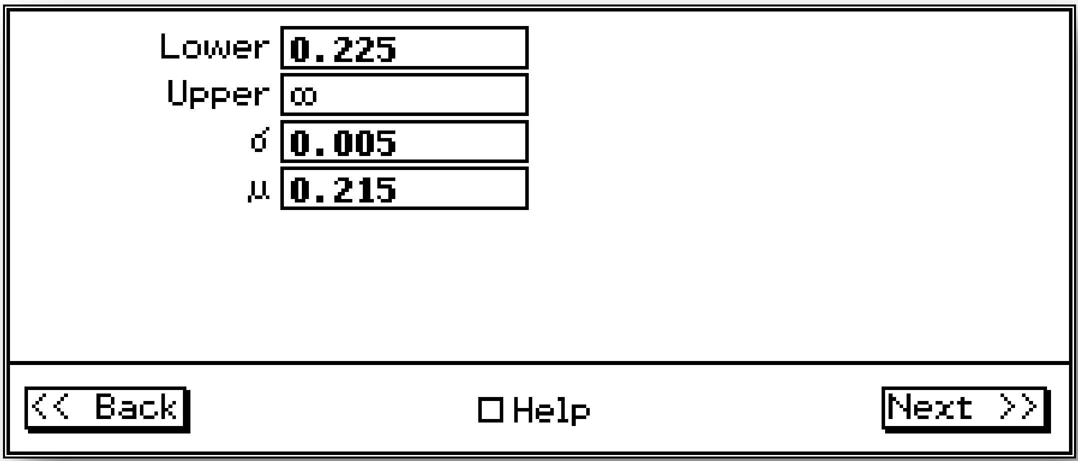
$$152.82575$$

Eftersom Karolina fick högre ränta än Petter så var hennes placering bättre. Värdet av Karolinas insättning i slutet av året var 10154 euro.

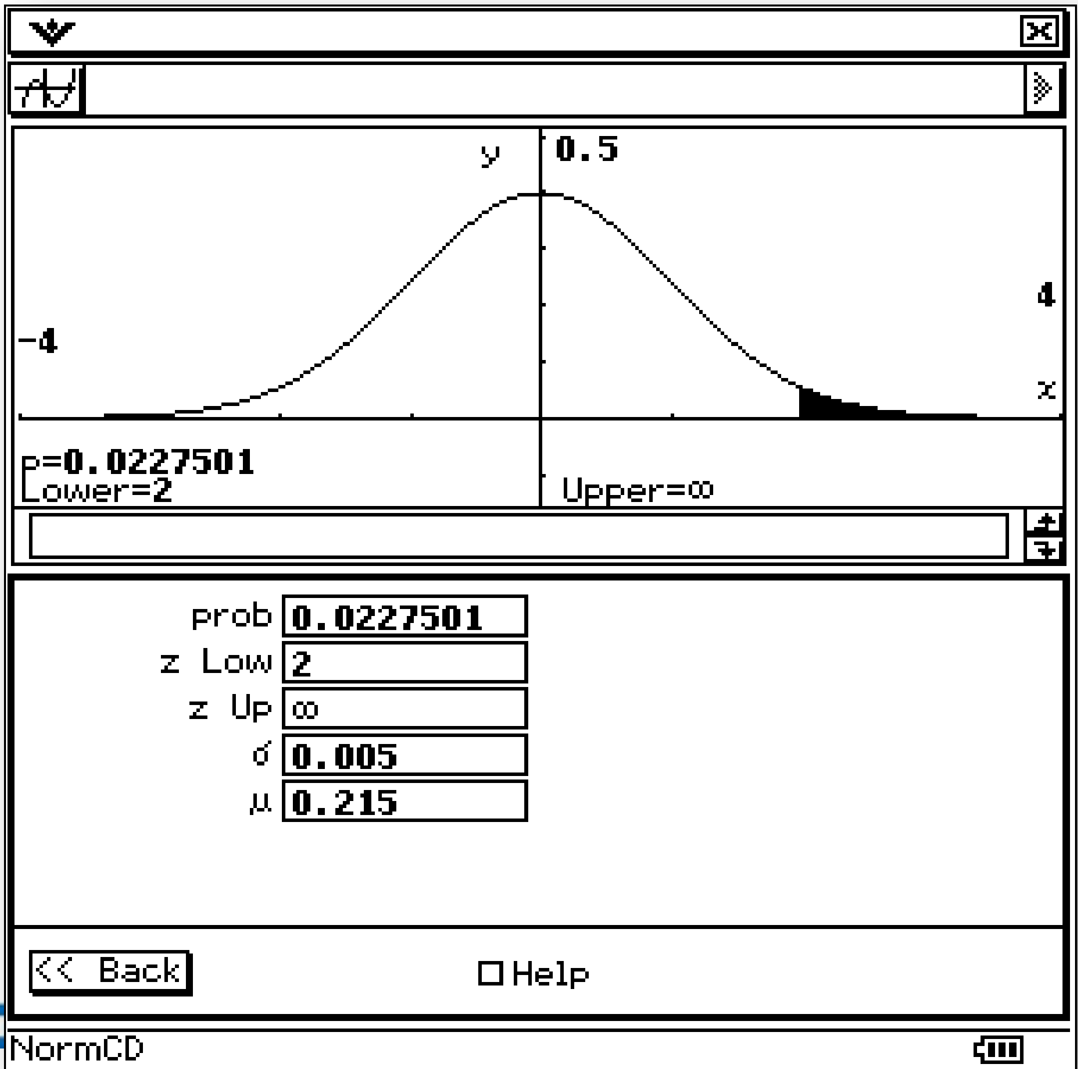
14. I en undersökning mättes halten av ett tillsatsämne i hundra flaskor läsk. Medelvärdet av halten var $\bar{x}$ =0,215 % och standardavvikelsen s= 0,005 %. Halten av tillsatsämnet är normalfördelad. Hur stor är sannolikheten för att halten av tillsatsämnet i en flaska ska överskrida den högsta tillåtna halten på 0,225 %?

Lösning: Avvikelserna beräknas enklast i programmet **Statistics.** Välj **Calc -> Distribution** som innehåller olika typer av avvikelser. Välj **Normal CD,** dvs kumulativ normalfördelning eller kumulativ sannolikhetsberäkning.

Kumulativ sannolikhetsberäkning. Lägg in de givna värdena,

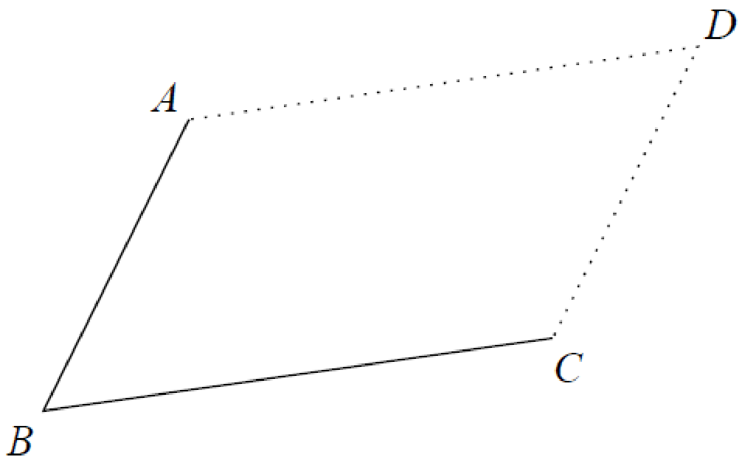


tryck på **Next** och sannolikheten blir ca 2.3%. Tryck för att rita en graf av normalfördelningen.



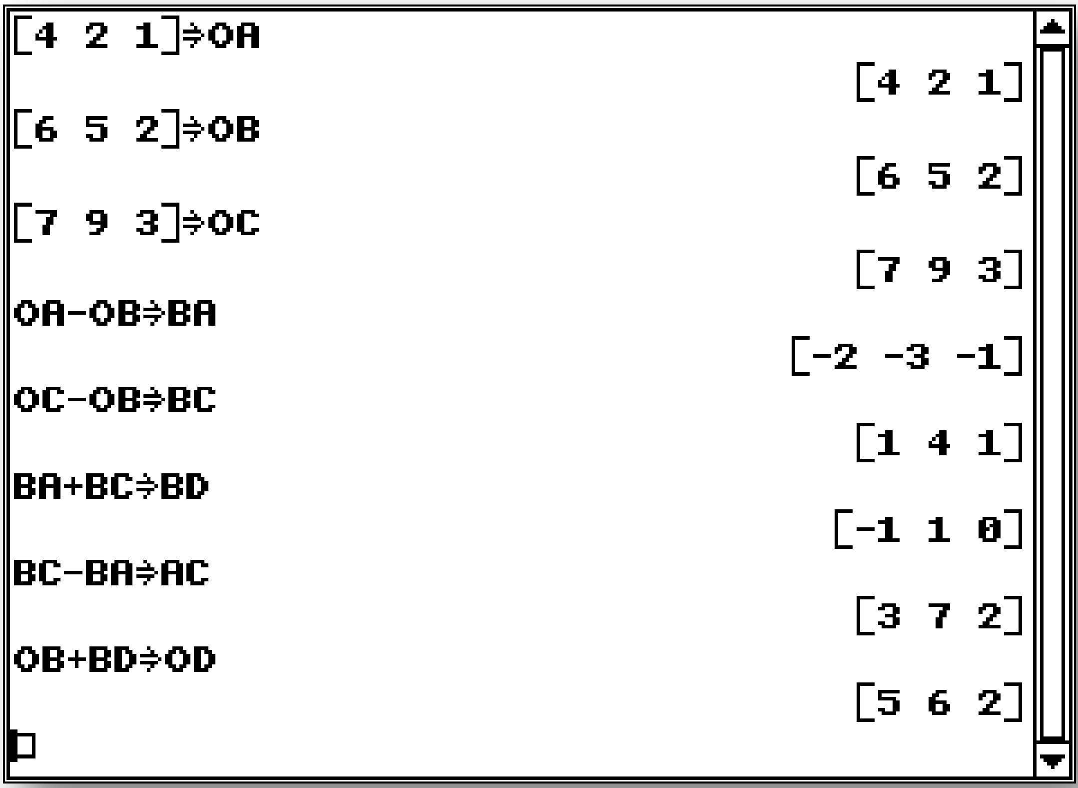
Notera: **ClassPad 330 Plus** använder oändligheten matematiskt korrekt i beräkningarna. Även om normalfördelningen närmar sig snabbt den horisontella axeln och man skulle kunna mata in ett stort tal som övre gräns, så är det lättare och matematiskt korrekt att istället använda sig av oändligheten (symbolen finns i tangentbordet under flikarna **mth** och **2D)**.

15. Ortsvektorerna $\overrightarrow{OA} = 4\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$, $\overrightarrow{OB} = 6\bar{i} + 5\bar{j} + 2\bar{k}$ och $\overrightarrow{OC} = 7\bar{i} + 9\bar{j} + 3\bar{k}$ bestämmer tre hörn A, B och C i en parallellogram. Bestäm ortsvektorn $\overrightarrow{OD}$ för det fjärde hörnet D samt parallellogrammens diagonalvektorer $\overrightarrow{AC}$ och $\overrightarrow{BD}$.



Lösning: ClassPad 330 Plus behandlar vektorer i matrisform. Av koefficienter kan man göra matriser i horisontell eller vertikalform, men för studenter brukar det vara lättare att använda sig av horisontell matrisform då det liknar vektorform.

Under k**eyboard 2D** hittar man matrisverktyget [■□] och när man dubbelklickar på den så får man en 3x1 matris.



Diagonalen $\overline{BD} = -\bar{\imath} + \bar{\jmath}$ ja $\overline{AC} = 3\bar{\imath} + 7\bar{\jmath} + 2\bar{k}$ och vektorn i punkten D $\overline{OD} = 5\bar{\imath} + 6\bar{\jmath} + 2\bar{k}$.

Casio Scandinavia AS, Finland Filial

Keilaranta 4

02150 Espoo

info@casio.fi

tilaus@casio.fi

Pepe Palovaara

Skolkoordinator Finland

Telefon: +358 (0)44 72 75 776

E-postadress: pepe.palovaara@casio.fi