Laske Laudatur Casion avulla

Pitkä matematiikka,
kevät 2023

Sisältö

Kevään 2023 matematiikan yo-kokeiden ratkaisut työasemalle ladattavan ja Abitista löytyvän ClassPad Managerin avulla laskettuina.

Pepe Palovaara

CASIO®

Fintegrity

FI – Matematiikka, pitkä oppimäärä

22.3.2023

Koe koostuu 13 tehtävästä, joista vastataan kymmeneen. Tehtävät on jaettu kolmeen osaan. A-osassa on neljä kaikille pakollista tehtävää. B1-osassa on viisi tehtävää, joista vastataan kolmeen. B2-osassa on neljä tehtävää, joista vastataan kolmeen. Kaikki tehtävät arvostellaan pistein 0–12, joten kokeen maksimipistemäärä on 120.

A-osassa saat käyttää koejärjestelmässä olevaa taulukkokirjaa ja perusohjelmia. A-osa palautetaan tehtävän 4 jälkeen olevalla painikkeella. Tämän jälkeen A-osan vastauksia ei voi enää muokata. A-osan palauttamisen jälkeen kaikki koejärjestelmän ohjelmat ovat käytettävissäsi. Voit vastata B-osien tehtäviin myös ennen A-osan palauttamista.

Useimmissa tehtävissä kaikkien osatehtävien vastaukset kirjoitetaan samaan vastauskenttään. Jaottele vastauksesi osatehtävien mukaisesti. Halutessasi voit tuottaa vastausten tueksi piirroksia, kaavioita tai taulukoita ja liittää niistä kuvakaappauksen mihin tahansa tekstivastaukseen.

Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

1. Monivalintatehtävä 12 p.

Valitse oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

1.1 Mittayksiköt 2 p.

Kuinka monta millimetriä on yksi kilometri? 10^6

1.2 Lieriö 2 p.

Lieriö, jonka pohja on monikulmio, on nimeltään särmiö

1.3 Kosinilause 2 p.

Suorakulmaisessa kolmiossa kosinilause on sama kuin Pythagoraan lause

1.4 Kulmakerroin 2 p.

Tason suoran $y = ax + b$ kulmakerroin on aina yhtä suuri kuin suoran yhtälöstä muodostetun funktion $f(x) = ax + b$ derivaatan arvo

1.5 Pistetulo 2 p.

Kahden vektorin pistetulo on aina reaaliluku

1.6 Leikkauspisteet 2 p.

Ympyrällä ja paraabelilla on tasossa korkeintaan neljä leikkauspistettä

2. Yhdistely 12 p.

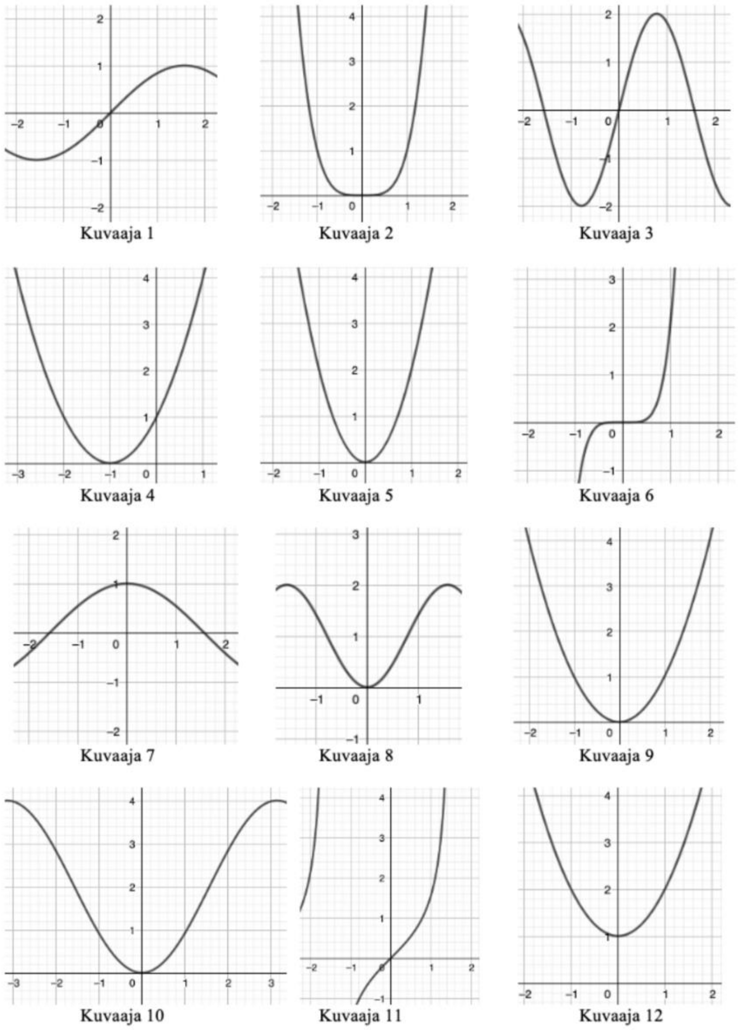
Aineisto

2.A Kuva: Funktioiden kuvaajat

Alla on annettu 12 yhtälöä. Yhdeksää niistä vastaa jokin kuvassa 2.A annetuista kuvaajista. Yhdistä kukin yhtälö sitä vastaavaan kuvaajaan tai merkitse, että sellaista ei ole.

Valitse oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 1 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

1. $y = x^2$ Kuvaaja 9 1 p.
2. $y = x^4$ Kuvaaja 2 1 p.
3. $y = x^3$ Ei kuvaajaa 1 p.
4. $y = x^2 + 1$ Kuvaaja 12 1 p.
5. $y = (x+1)^2$ Kuvaaja 4 1 p.
6. $y = 2x^2$ Kuvaaja 5 1 p.
7. $y = \cos x$ Kuvaaja 7 1 p.
8. $y = \sin x$ Kuvaaja 1 1 p.
9. $y = -2\cos x + 2$ Kuvaaja 10 1 p.
10. $y = -\cos(2x)$ Ei kuvaajaa 1 p.
11. $y = 2\sin(2x)$ Kuvaaja 3 1 p.
12. $y = 2\sin x$ Ei kuvaajaa 1 p.



3. Ratakisko 12 p.

Aineisto

3.A Kuva: Ratakisko

Kymmenen metriä pitkä museoratakisko on vääntynyt lämpölaajenemisen vuoksi mutkalle, mutta sen päät ovat pysyneet paikoillaan (katso liioiteltu kuva 3.A tilanteesta). Kiskon poikkeama sen alkuperäisestä sijainnista kohtisuoraan mitattuna on muotoa

$$f(x) = \frac{x^3 - 15x^2 + 50x}{1000},$$

kun x on etäisyys kiskon alkupäästä. Missä kohdissa kiskon poikkeama sen alkuperäisestä asemasta on suurin? Määritä myös suurin poikkeama. Muuttujan x ja poikkeaman yksikkönä on metri.

Poikkeama on suurin paikallisissa ääriarvokohdissa. Koska $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1000}\left(3x^2 - 30x + 50\right) = 0$ $\Leftrightarrow x = \frac{30 \pm 10\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow x = 5 \pm \frac{5\sqrt{3}}{3}$. Kohdat sijaitsevat n. 2,1 metriä kiskon päistä. Suurin poikkeama on symmetrian vuoksi sama molemmissa pisteissä $\left|f\left(5 \pm \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)\right| \approx 0{,}048$ metriä.

4. Suoran etäisyys kahdesta pisteestä 12 p.

Määritä kaikki suorat, joiden etäisyys pisteestä $A = (-2, 0)$ on 2 ja etäisyys pisteestä $B = (3, 0)$ on 3.

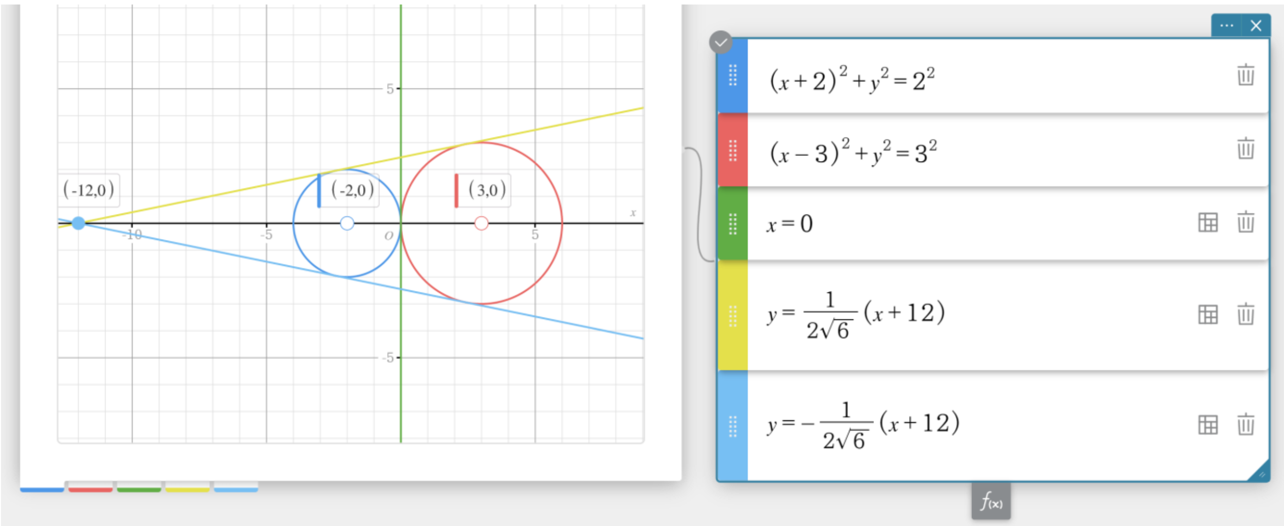
Suorien pitää sivuta ympyröitä $(x+2)^2 + y^2 = 2^2$ ja $(x-3)^2 + y^2 = 3^2$. Triviaali vastaus on y-akseli eli suora x=0, sillä ympyrät sivuavat toisiaan origossa ja niiden keskipisteet ovat x-akselilla. Lisäksi ehdot toteuttaa ympyröiden yhteiset tangentit, joita on kaksi.

Merkitään x matkaa pisteestä $(-2{,}0)$ siihen pisteeseen, jossa ympyröiden tangentit leikkaavat toisensa ja x-akselin.

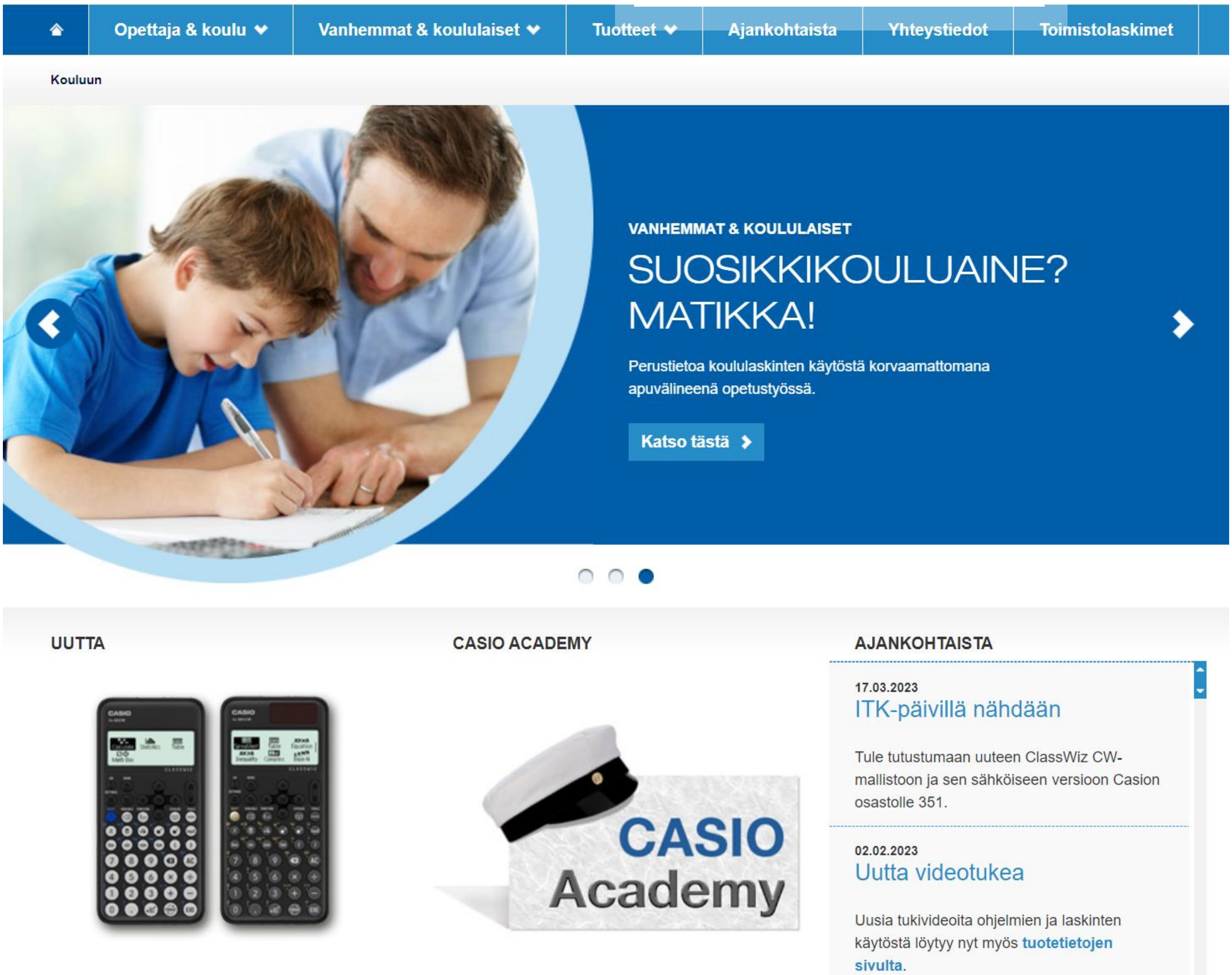
Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan $\frac{2}{x} = \frac{3}{x+5} \Leftrightarrow 3x = 2x + 10 \Leftrightarrow x = 10$. Tangenttien leikkauspiste x-akselilla on siis $(-12{,}0)$.

Koska ympyröiden keskipisteiden väli on 5 ja niiden säteiden erotus 1, saadaan suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on 5 ja toinen kateeteista 1. Tästä saadaan nousevan suoran suuntakulma $k = \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{1}{\sqrt{5^2 - 1^2}}\right)\right) = \frac{1}{2\sqrt{6}}$.

Laskevan suoran suuntakulma on symmetrian vuoksi $-\frac{1}{2\sqrt{6}}$. Suorat ovat siis $y = \pm\frac{1}{2\sqrt{6}}(x + 12)$.



(Kuva: ClassPad.net. Ohjelma on peruskäytöltään (esim. kuvaajien piirtäminen) ilmainen ja löytyy osoitteesta https://classpad.net/. Katso lisää viimeiseltä sivulta!)



B1-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

5. Taikaneliö 12 p.

Aineisto

5.A Kuva: Taikaneliö

16	3	2	13
5	10	11	8
9	$\frac{y-2}{2}$	$\frac{x-1}{2}$	12
4	x	y	1

Kuparikaiverrus Melankolia I (katso kuva 5.A) on saksalaisen Albrecht Dürerin tunnetuimpia teoksia. Teos sisältää 4×4 -taikaneliön, jossa jokaisen vaaka- ja pystyrivin lukujen summa on 34. Alla olevassa ruudukossa neljä taikaneliön ruutua on esitetty kahden tuntemattoman luvun x ja y avulla. Kun luvut x ja y asetetaan peräkkäin, saadaan tuloksena teoksen valmistumisvuosi. Ratkaise luvut x ja y ja kirjoita kyseessä oleva vuosiluku.

Kahdesta keskimmäisestä pystyrivistä saadaan yhtälöpari:

$$\left\{\begin{array}{l} x+\frac{y-2}{2}+10+3=34 \\ y+\frac{x-1}{2}+11+2=34 \end{array}\right|_{x,\,y}$$

$$\{x=15,\ y=14\}$$

Voidaan vielä tarkistaa alimmaisen vaakarivin paikkansapitävyys:

$4+15+14+1$

$$34$$

Kun luvut kirjoitetaan peräkkäin, saadaan vuosiluvuksi 1514.

6. Raketin nokkakartio 12 p.

Erään raketin kärki, eli niin sanottu nokkakartio, saadaan, kun alaspäin aukeava paraabeli pyörähtää symmetria-akselinsa ympäri. Kärjen korkeus on 4,5 metriä, ja sen halkaisija pohjan tasolla on 3,3 metriä. Määritä kärjen tilavuus.

Sijoitetaan paraabelin akseli y-akselille, jolloin paraabelin yhtälö on muotoa $y=ax^2+c$ ja se kulkee pisteiden (0;4,5) ja (1,65;0) kautta. Ratkaistaan parametrit a ja c:

$$\left\{\begin{array}{l} 0=a*1.65^2+c \\ 4.5=a*0^2+c \end{array}\right|_{a,\,c}$$

$$\left\{a=-\frac{200}{121},\ c=\frac{9}{2}\right\}$$

Paraabelin yhtälö on siis $y=-\frac{200}{121}x^2+\frac{9}{2}$. Kun tämä pyörähtää akselinsa ympäri, syntyy pyörähdyskappale välille $0\leq y\leq 4,5$ ja sen tilavuus saadaan laskettua integraalin avulla. Koska integroidaan y-akselin suunnassa, tarvitaan muuttujan y funktio:

$\text{solve}\left(y=-\frac{200}{121}x^2+\frac{9}{2},\ x\right)$

$$\left\{x=\frac{-11\cdot\sqrt{-2\cdot y+9}}{20},\ x=\frac{11\cdot\sqrt{-2\cdot y+9}}{20}\right\}$$

$$\pi\int_0^{4.5}\left(\frac{11\cdot\sqrt{-2\cdot y+9}}{20}\right)^2 dy$$

$$19.2442185$$

Raketin kärjen tilavuus on n. $19,2\text{m}^3$.

7. Vektoreiden summa 12 p.

Tarkastellaan vektoreita $\overline{u} = \overline{i} + 2\,\overline{j}$ ja $\overline{v} = \sin(2t)\overline{i} + \cos(4t)\overline{j}$, missä $t \geq 0$.

1. Määritä vektori $\overline{u} + \overline{v}$, kun $t = 0$, $t = \frac{\pi}{4}$ ja $t = \frac{3\pi}{4}$. **(4 p.)**
2. Mikä tasokuvio muodostuu vektorin $\overline{u} + \overline{v}$ kärkipisteestä, kun t saa arvot välillä $[0, \pi]$? Anna vastaus yhtälönä muodossa $y = f(x)$. Ratkaisussa voi käyttää esimerkiksi kaavaa $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$. **(8 p.)**

1. Ratkaistaan vektorit annetuilla t:n arvoilla:

u+v=i+2j+sin(2t)*i+cos(4t)*j|t=0

$$u+v=i+3\cdot j$$

$u+v=i+2j+\sin(2t)*i+\cos(4t)*j|t=\frac{\pi}{4}$

$$u+v=2\cdot i+j$$

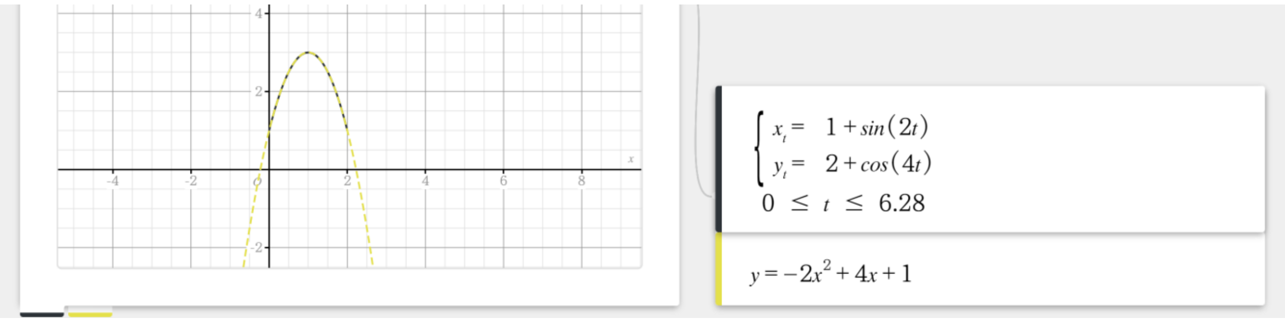
$u+v=i+2j+\sin(2t)*i+\cos(4t)*j|t=\frac{3\pi}{4}$

$$u+v=j$$

2. Parametrimuodossa käyrän piirtää funktio $\begin{cases} x=1+\sin(2t),\ 0\leq t\leq\pi \\ y=2+\cos(4t),\ 0\leq t\leq\pi \end{cases}$. Muokataan lauseketta trigonometristen sääntöjen mukaan:

$y=2+\cos(4t)=2+1-2(\sin(2t))^2=3-2(x-1)^2=-2x^2+4x+1=f(x)$.

Parametrin t arvoilla $0\leq t\leq\pi$ on $0\leq 2t\leq 2\pi$ ja funktio $\sin(2t)$ saa kaikki arvot väliltä $[-1,1]$. Siis $x=1+\sin(2t)$ arvot rajoittuvat välille $[0,2]$. Vektorin u+v kärkipiste piirtää paraabelin kaaren osan, jota vastaa funktion $y=-2x^2+4x+1$ kuvaaja, kun $0\leq x\leq 2$.



(Kuva: ClassPad.net)

CASIO

8. Polynomien vertailu 12 p.

1. Osoita induktiolla, että $k^3 \geq k^2 + 4$ kaikilla kokonaisluvuilla $k \geq 2$. **(6 p.)**
2. Osoita, että osatehtävän 8.1 epäyhtälö ei päde millään kokonaisluvulla $k < 0$. **(2 p.)**
3. Osoita, että epäyhtälö $x^3 \geq x^2 + 4$ pätee kaikilla reaaliluvuilla $x \geq 2$. **(4 p.)**

1. Alkuaskel: Kun k=2, niin väite on $2^3 = 8 \geq 2^2+4 = 8$, mikä on tosi.
Induktio–oletus: Jollekin k pätee $k^3 \geq k^2+4$.
Induktioväite: $(k+1)^3 \geq (k+1)^2+4$.
Induktioväitteen todistus: $(k+1)^3 = k^3+3k^2+3k+1 \geq k^2+4+3k^2+3k+1 = 4k^2+3k+1+4 \geq 4k^2+2k+1+4 \geq 2k^2+2k+1+4 = (k+1)^2+4$. Koska induktioväite on osoitettu oikeaksi hyödyntämällä induktio–oletusta, on induktioperiaatteen nojalla myös alkuperäinen väite tosi.

2. Koska k^2+1 on aina positiivinen ja k^3 aina negatiivinen, kun k<0, ei väite päde negatiivisille k:n arvoille.

3. Jos $k^3-k^2-4 \geq 0$ kaikille reaaliluvuille k, on väite todistettu. Merkitään tätä funktiona f(k), k on reaaliluku.
define $f(k)=k^3-k^2-4$

done

Lasketaan funktion pienin arvo annetulla välillä:
fmin(f(k),k)|k≥2

{MinValue=0, k=2}

Koska pienin arvo on 0, pätee väite kaikille reaaliluvuille k≥2.

ClassPad Managerin lataukset ja päivitykset löydät kansainväliseltä tukisivulta.

COMPUTER SOFTWARE

Get Started
You can use the software for free with the 90-day trial version.
Select your OS: Windows › Mac ›

To activate:
Activation Guide ›
Issue License Code from Claim Code
Member Login ›

https://edu.casio.com/softwarelicense/index.php

9. Integraalialgoritmi 12 p.

Aineisto

9.A Teksti: Integraali-pseudokoodi

Tekstissä 9.A on esitetty pseudokoodilla kirjoitettu algoritmi.

1. Minkä tuloksen algoritmi antaa, kun $a = 0, b = 1$ ja $n = 5$? **(2 p.)**
2. Tee taulukkolaskenta- tai ohjelmointitoteutus algoritmille, kun $a = -1, b =$ tapauksessa antaa? **(4 p.)**
3. Mitä integraalia algoritmi approksimoi? Selitä muuttujien a, b, n, h, r, k ja f roolit algoritmissa. **(6 p.)**

9.A Teksti: Integraali-pseudokoodi

```
integraali(a,b,n):
        h = (b-a)/n
        r = 0
        toista arvoilla k = 1, 2, ..., n
                f = (a+k*h)^2 + 1
                r = r + f*h
        palauta r
```

Lähde: YTL.

1. Algoritmi laskee

$$\frac{1}{5}(1+\left(\frac{1}{5}\right)^2+1+\left(\frac{2}{5}\right)^2+1+\left(\frac{3}{5}\right)^2+1+\left(\frac{4}{5}\right)^2+1+\left(\frac{5}{5}\right)^2)$$

1.44

2. Excelillä laskettuna taulukko näyttää tältä

=(A2+F2*D2)^2+1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a	b	n	h	f	k	r	approksimaatio	
2	-1	2	1000	0,003	1,994009	1	0,005982	6,004505	
3					1,988036	2	0,005964		
4					1,982081	3	0,005946		
998					4,964081	997	0,014892		
999					4,976036	998	0,014928		
1000					4,988009	999	0,014964		
1001					5	1000	0,015		

missä kaavat ovat E-sarake: =(A2+F2*D2)^2+1 ja G-sarake: =E2*D2 ja H2-solu: =SUMMA(G2:G1001). Approksimaatioksi saadaan n. 6,0045045.

3. Kyseessä on arvon laskeminen suorakaidesäännöllä integraalille $\int_{-1}^{2}(x^2+1)\,dx$.

Lausekkeen tarkka arvo on

$$\int_{-1}^{2}(x^2+1)\,dx \qquad 6$$

Muuttujien merkitykset

a=integraalin alaraja
b=integraalin yläraja
n=jakovälien lukumäärä
h=jakovälin pituus
r=osasumman arvo suorakulmioille
k=laskuri jakovälin indeksille
f=integroitavan funktion arvo

CASIO

B2-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

10. Positroniemissiotomografia 12 p.

Aineisto

10.A Taulukko: PET-kuvantamisen tulos

10.A Taulukko: PET-kuvantamisen tulos

aika	0	1	2	3	4	5	6
aktiivisuus	0	2,7	6,5	3,5	2,0	1,7	1,5

Lähde: YTL.

Positroniemissiotomografia (PET) on lääketieteellinen kuvantamismenetelmä, jonka avulla voidaan mallintaa sisäelinten toimintaa. PET-kuvan avulla on mahdollista muodostaa aika-aktiivisuuskäyrä, joka on muotoa $f(t) = g(t) + ue^{v-(t-w)^2}$, missä $u, v, w > 0$ ja

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t < 0, \\ a_1 t + b_1, & \text{kun } 0 \leq t < w, \\ a_2 t + b_2, & \text{kun } t \geq w. \end{cases}$$

1. Taulukko 10.A sisältää erään PET-kuvan mittausarvot ajan funktiona. Mittaus voidaan mallintaa funktion f avulla, kun $u = \frac{1}{5}$, $v = 3$, $w = 2$, $a_1 = \frac{5}{4}$, $b_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{4}$ ja $b_2 = 3$. Piirrä funktion f kuvaaja ja mittausarvot koordinaatistoon. **(4 p.)**
2. Miten parametrit u, v ja w vaikuttavat funktion kuvaajaan? **(4 p.)**
3. Mitkä ehdot parametrien w, a_1, b_1, a_2 ja b_2 tulee toteuttaa, jotta funktio f on jatkuva? **(4 p.)**

1. Määritellään funktio g(x), jossa on muuttuja x kuvaa aikaa:

$$\text{define } g(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{5}{4}x, & 0\leq x<2 \\ -\frac{1}{4}x+3, & x\geq 2 \end{cases}$$

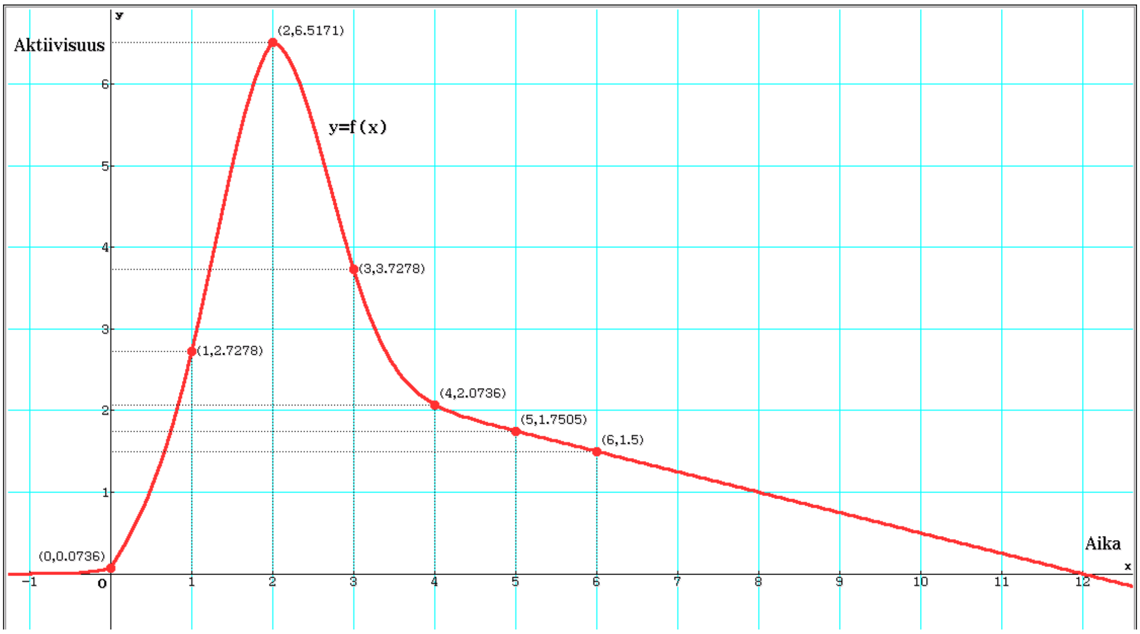
done

määritellään sen avulla funktio f:

$$\text{define } f(x)=g(x)+\frac{1}{5}*e^{3-(x-2)^2}$$

done

ja piirretään sen kuvaaja:



2. Parametri $u>0$ esiintyy vain kerran funktion lausekkeessa. Se on positiivisen termin $e^{v-(x-w)^2}$ kerroin. Kun u kasvaa, funktio arvot kasvavat eli kuvaaja muuttuu korkeammaksi. Kun u pienenee, funktion arvot pienenevät eli kuvaaja muuttuu matalammaksi.

Koska parametri $v>0$ on positiivisen termin $ue^{v-(x-w)^2}$, $u>0$, eksponentin positiivinen osa, niin funktion arvot kasvavat ja kuvaaja muuttuu korkeammaksi, kun v suurenee. Kun v pienenee, funktion arvot pienenevät ja sen kuvaaja muuttuu matalammaksi.

Parametri $w>0$ esiintyy funktiossa kaksi kertaa: positiivisen termin $ue^{v-(x-w)^2}$ eksponentin sisällä ja paloittain määritellyn funktion $g(x)$ lausekkeen vaihdon rajana. Kun w kasvaa, niin funktion lauseketta vaihdetaan myöhemmin ja kun w pienenee, sitä vaihdetaan aikaisemmin. Samalla w määritää termin $ue^{v-(x-w)^2}$ arvoa. Koska $(x-w)^2$ on luvun neliönä positiivinen ja sitä suurempi mitä suurempi lukujen x ja w erotus on, niin $-(x-w)^2$ on vastaavasti negatiivinen ja pienentää lausekkeen arvoa. Lauseke ja samalla funktio saa suurimman arvonsa, kun erotus on nolla eli $x=w$.

3. Vaikka w esiintyy funktiossa kahdessa eri roolissa, eksponenttifunktio $e^{v-(x-w)^2}$ on aina jatkuva riippumatta parametrin w arvosta ja tämä rooli ei aseta parametrille w ehtoja.

Paloittain määritellyn funktion lausekkeiden pitää toteuttaa jatkuvuuden ehdot lausekkeenvaihdon kohdissa, sillä polynomeina kaikki osat ovat jatkuvia. Samoin koko funktio f on jatkuva, kunhan vain g on jatkuva.

Liitoskohdissa funktion raja-arvon tulee olla sama kuin funktion arvon kyseisessä pisteessä. Saadaan ehdot

$\lim_{x\to 0-}(0) = \lim_{x\to 0+}(a_1x+b_1)=0$, josta $b_1=0$.

$\lim_{x\to w-}(a_1x+b_1) = \lim_{x\to w+}(a_2x+b_2)=a_2w+b_2$, josta $a_1w+0=a_2w+b_2$ eli $b_2=a_1w-a_2w=(a_1-a_2)w$.

11. Nopanheiton opetus 12 p.

1. Eeri haluaa valita kahdesta nopasta paremman. Hän heittää niitä kerran ja valitsee nopan, joka antaa suuremman tuloksen. Jos kumpikin noppa antaa saman tuloksen, hän valitsee toisen nopista. Kummassakin tapauksessa Eeri heittää valitsemaansa noppaa uudestaan. Millä todennäköisyydellä nopan tulos toisella heitolla on pienempi kuin ensimmäisellä heitolla? **(9 p.)**

2. Laajasti levinneen uutisen mukaan maailman kymmenen rikkaimman ihmisen omaisuus kaksinkertaistui koronapandemian kahden ensimmäisen vuoden aikana. Väite perustui ilmeisesti siihen, että ajanjakson lopulla oli laskettu kymmenen rikkaimman ihmisen omaisuuden arvo ja verrattu sitä heidän omaisuuteensa kaksi vuotta aikaisemmin. Tähän sisältyy ajatusvirhe, joka tulee esiin myös Eerin nopanheitossa. Mikä se on? **(3 p.)**

1. P("Valitun nopan tulos 2. kierroksella on pienempi kuin 1. kierroksella")
= P("Valittu noppa oli kuutonen ja heitetään korkeintaan viitonen tai valittu noppa oli viitonen ja heitetään korkeintaan nelonen tai... tai valittu noppa oli ykkönen ja heitetään korkeintaan 0")
= P("Valittu noppa oli kuutonen ja heitetään korkeintaan viitonen")
+ P("Valittu noppa oli viitonen ja heitetään korkeintaan nelonen")
.
.
.
+ P("Valittu noppa oli ykkönen ja heitetään korkeintaan nolla")=

$$\frac{11}{36}*\frac{5}{6}+\frac{9}{36}*\frac{4}{6}+\frac{7}{36}*\frac{3}{6}+\frac{5}{36}*\frac{2}{6}+\frac{3}{36}*\frac{1}{6}+\frac{1}{36}*\frac{0}{6}$$

$$\frac{125}{216}$$

2. Ongelma on siinä, mihin verrataan. Eerin nopanheitossa verrataan jo aiemman tuloksen perusteella valittuun noppaan eli tapahtumien välillä on riippuvuussuhde. Rikkaimpien ihmisten osalla neutraaliin tulokseen pitäisi verrata 10 rikkaimman ihmisen omaisuutta kaksi vuotta sitten ja nyt katsomatta henkilöiden nimiä ts. listattaisiin vain 10 rikkainta ja laskettaisiin omaisuudet yhteen molempina vertailun ajan hetkinä riippumatta siitä keitä listalla on tai mikä heidän sijoituksensa oli kaksi vuotta sitten.

12. Polynomikonstruktio 12 p.

Anna esimerkki polynomista $P(x)$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

Yhtälöllä $P(x) = 1$ on täsmälleen kaksi erisuurta ratkaisua, ja yhtälöllä $P(x) = -1$ on ainakin neljä erisuurta ratkaisua.

Täysien pisteiden arvoinen ratkaisu sisältää laskut, joista voidaan nähdä, että esimerkki toteuttaa vaaditut ehdot. Graafinen perustelu tai yhtälön ratkaisukäskyn käyttö eivät yksinään riitä täysiin pisteisiin.

Polynomin on oltava vähintään 4. astetta, jotta se saa saman arvon 4 kertaa. Valitaan P(x):n asteluvuksi 4 ja korkeimman asteen termin kerroin positiiviseksi. Nyt kuvaajan pitää käydä korkeudella −1 vähintään neljä kertaa ja korkeudella 1 tasan kaksi kertaa.

Käytetään 4. asteen polynomin sovitusta pisteisiin (−2,1), (2,1), (−1,5;−1),(−1,−1,),(1,−1) ja (1,5;−1), jotta nähdään polynomin kertoimien suuruusluokka.

Tied. Muok Graaf Laske

4. asteen regr

$y=a\cdot x^4+b\cdot x^3+c\cdot x^2+d\cdot x+e$

$a = 0.3809524$

$b = -1E\text{-}14$

$c = -1.238095$

$d = 0$

$e = -0.142857$

$r^2 = 1$

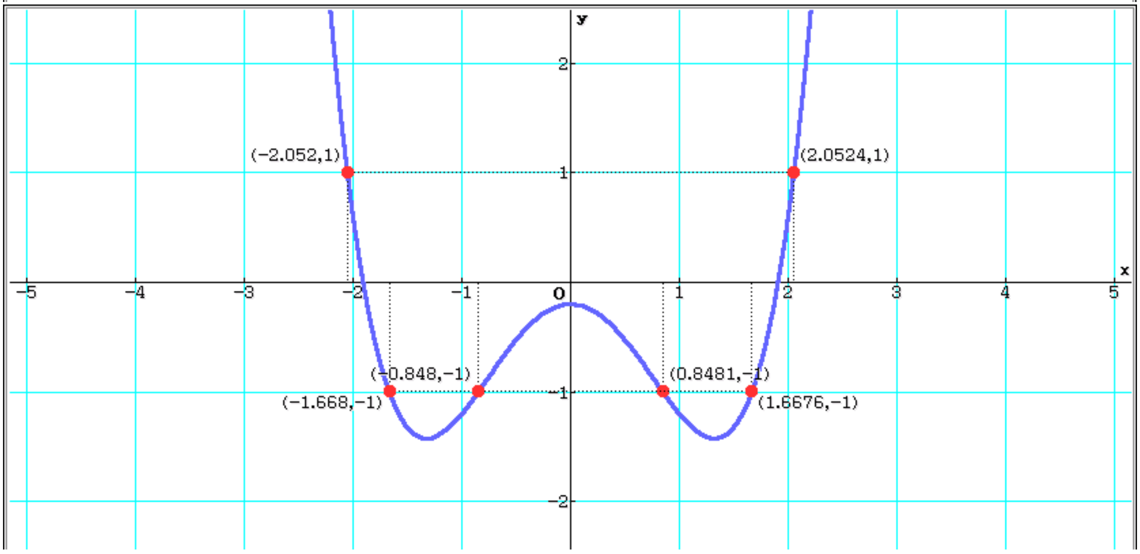
$MSe = 4.279E\text{-}24$

Lähtö>> Linkki Sulje

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	−2	1	a	0.38095						
2	2	1	b	−1E-14						
3	−1.5	−1	c	−1.2381						
4	−1	−1	d	0						
5	1	−1	e	−0.1429						
6	1.5	−1	r²	1						
7			MSe	4.3E-24						

Saadaan polynomi $P(x)\approx0.3809524x^4-1.238095x^2-0.142857$, joka likiarvoisesti toteuttaa annetut ehdot noin miljoonasosan tarkkuudella.

Muutetaan kertoimia hieman yksinkertaisemmiksi. Olkoon $P(x)=0.4x^4-1.4x^2-0.2$, jolloin sen kuvaaja näyttää toteuttavan annetut ehdot.



Piirretään polynomin P(x) kulkukaavio välille [−3, 3]. Polynomin derivaatan merkit vaihtuvat "− | + | − | +" eli funktio "vähenee | kasvaa | vähenee | kasvaa" ja derivaatan nollakohdat ovat "minimikohta | paikallinen maksimikohta | minimikohta".

y1=0.4·x^4−1.4·x^2−0.2

x	−3		−1.3		0		1.32		3
f´(x)	−35.	−	0	+	0	−	0	+	34.8
f(x)	19.6	↘	−1.4	↗	−0.2	↘	−1.4	↗	19.6

8·x^3/5−14·x/5

Koska polynomi on jatkuva funktio, riittää kulkukaavion lisäksi laskea polynomin arvot tutkittavien pisteiden läheisyydessä:

Define $P(x)=0.4x^4-1.4x^2-0.2$

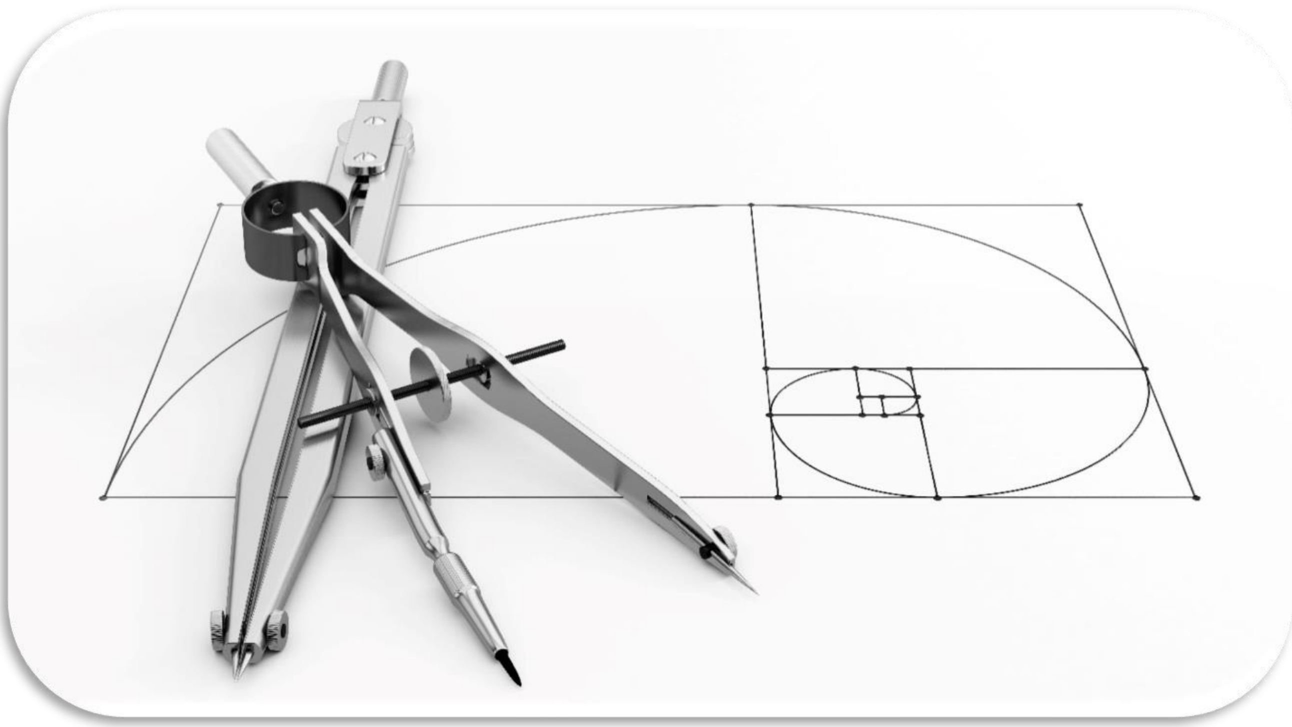
done

P({−2.1, −1.9, −1, 0, 1, 1.9, 2.1})

{1.40524, −0.04116, −1.2, −0.2, −1.2, −0.04116, 1.40524}

P(x) vähenee aidosti välillä [−2.1;−1.9] ja P(−2.1)<1<P(−1.9), joten se saa arvon 1 kyseisellä välillä täsmälleen kerran. Vastaavasti, P(x) kasvaa aidosti välillä [1.9;2.1] ja P(1.9)<1<P(2.1), joten se saa arvon 1 kyseisellä välillä täsmälleen kerran. Kun lisäksi ainoa paikallinen maksimiarvo P(0)<1, toteutuu P(x)=1 täsmälleen kaksi kertaa.

Koska P(x) kasvaa rajoitta pienillä ja suurilla x:n arvoilla ja funktion pienin arvo −1.425<−1 saadaan kahdessa eri pisteessä ja lisäksi funktion ainoa paikallinen maksimiarvo −0.2>−1, toteutuu P(x)=−1 ainakin neljässä erisuuressa kohdassa.



13. Integraalin ja raja-arvon järjestyksen vaihto (12 p.)

Olkoon $f(x,s) = \dfrac{1-s}{(1+x^2-2sx)^2}$, kun $0 < s < 1$ ja $0 \le x \le 1$. Tarkastellaan vasemmanpuoleista raja-arvoa $\lim\limits_{s\to 1}$, jota joskus merkitään $\lim\limits_{s\to 1^-}$.

1. Määritä $g(x) = \lim\limits_{s\to 1} f(x,s)$ kaikilla $0 \le x < 1$, ja laske $\int_0^1 g(x)\,dx$. **(3 p.)**
2. Määritä sellainen $x_0 < 1$, että $f(x_0,s) = f(1,s)$, ja laske $\int_{x_0}^1 f(x_0,s)\,dx$. **(3 p.)**
3. Osoita, että $f(x,s) \ge f(x_0,s)$, kun $x \in [x_0,1]$ ja x_0 on määritetty osatehtävässä 13.2. **(3 p.)**
4. Osoita, että $\int_0^1 \lim\limits_{s\to 1} f(x,s)\,dx \ne \lim\limits_{s\to 1} \int_0^1 f(x,s)\,dx$. **(3 p.)**

1. $\dfrac{1-s}{(1+x^2-2s*x)^2} \to \dfrac{1-1}{(x^2-2x+1)^2} = \dfrac{0}{(x-1)^4} = 0$, kun $s\to 1-$ ja $0 \le x < 1$.

Koska kaikille $0 \le x < 1$ funktion $g(x)$ raja-arvo on nolla, on myöskin vastaavan välin integraalin arvo nolla. Siis, $\int_0^1 g(x)dx = 0$.

2. Ratkaistaan yhtälöstä x_0:

$$\text{solve}\left(\frac{1-s}{(1+x_0^2-2s*x_0)^2} = \frac{1-s}{(1+1^2-2s*1)^2}, x_0\right) | x_0<1$$

$$\{x_0=2\cdot s-1, x_0=s-(s^2+2\cdot s-3)^{0.5}, x_0=s+(s^2+2\cdot s-3)^{0.5}\}$$

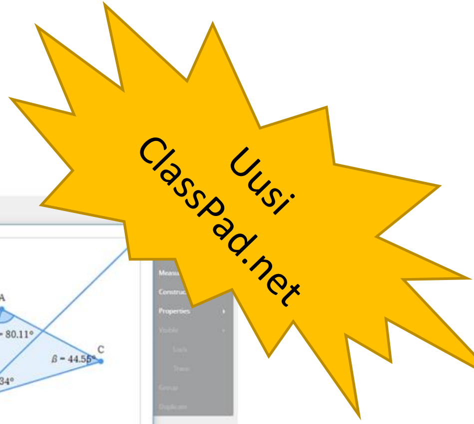
Kun $0<s<1$, niin lauseke $(s^2+2\cdot s-3)^{0.5}$ ei ole määritelty. Ainoa ratkaisu on $x_0=2\cdot s-1$.

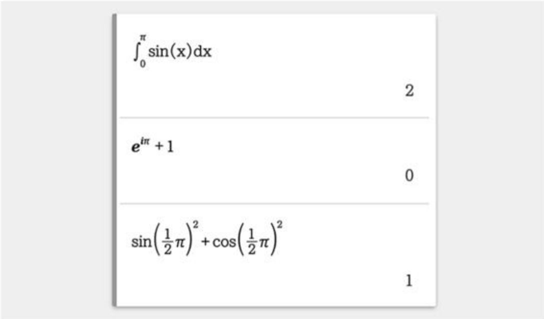
$$\int_{2\cdot s-1}^1 f(x_0,s)dx = \int_{2\cdot s-1}^1 f(2s-1,s)dx = \int_{2\cdot s-1}^1 \frac{1-s}{(1+(2s-1)^2-2s*(2s-1))^2}dx$$

$$= \int_{2\cdot s-1}^1 -\frac{0.25}{s-1}dx = -\frac{0.25}{s-1}*1-\left(-\frac{0.25}{s-1}*(2s-1)\right) = 0.5.$$

3. Funktion $f(x,s)$ merkin määrittää sen nimittäjä, sillä $1-s>0$ välillä $0<s<1$. Nimittäjä on $(1+x^2-2s*x)*(1+x^2-2s*x)$ eli kahden ylöspäin avautuvan paraabelin tulo. Koska $f(2s-1,s)=f(1,s)$, niin välillä $[2s-1,1]$ on kummankin paraabelin arvo on negatiivinen, joten niiden tulo ja koko funktio on positiivinen. Välillä $[2s-1,1]$ funktion pienin arvo saadaan välin päätepisteissä, joten $f(x,s) \ge f(2s-1,s)$.

4. Alussa määritettiin $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \lim\limits_{s\to 1}(f(x,s))dx = 0$. Kun vaihdetaan raja-arvon ja integraalin paikkaa, saadaan $\lim\limits_{s\to 1}\left(\int_0^1 f(x,s)dx\right) \ge \lim\limits_{s\to 1}\left(\int_{2s-1}^1 f(x,s)dx\right) \ge \lim\limits_{s\to 1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Niinpä integraali raja-arvolausekkeesta ei ole sama kuin raja-arvo integraalista.

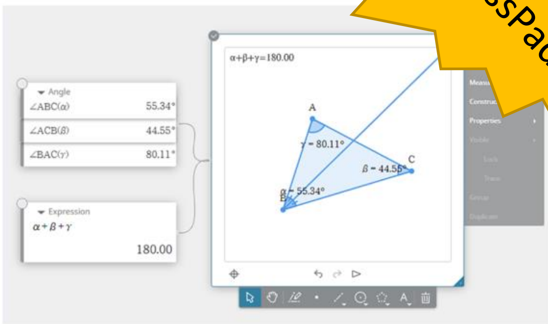




Funktionaalinen differentiaali- ja integraalilaskenta

Kaavojen syöttö erilaisten laskutoimitusten suorittamiseen

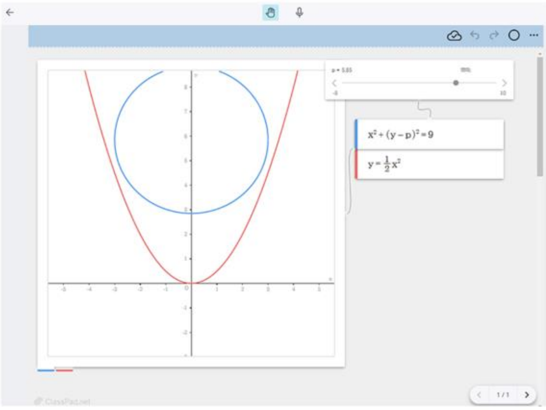
Hyödyllinen tarkistettaessa vastauksia ja tehtäessä monimutkaisia laskutoimituksia



Geometria

Muotoja voi piirtää helposti syöttämällä ne käsin kirjoitettuna tai numeroarvoina

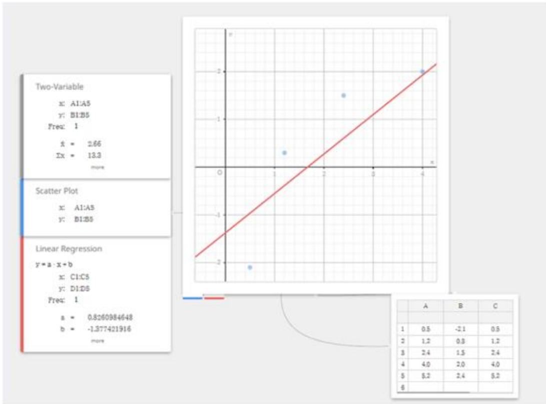
Kaavat ja lauseet voi tarkistaa visuaalisesti siirtämällä muotoja, mikä tehostaa tiedon ymmärtämistä ja säilymistä



Kuvaajat

Monenlaisia kuvaajia voi piirtää syöttämällä ne käsin kirjoitettuna tai kaavoina

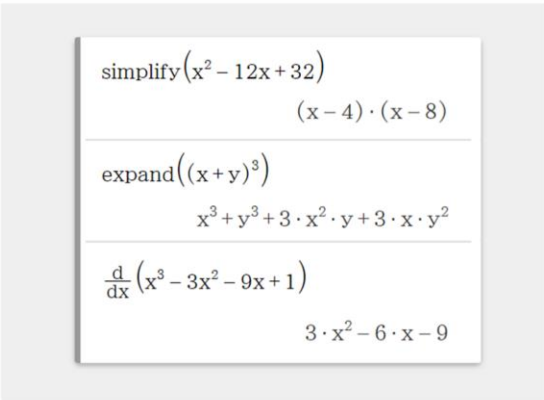
Kaavat ja lauseet voi tarkistaa visuaalisesti siirtämällä kuvaajia, mikä tehostaa tiedon ymmärtämistä ja säilymistä



Tilastot

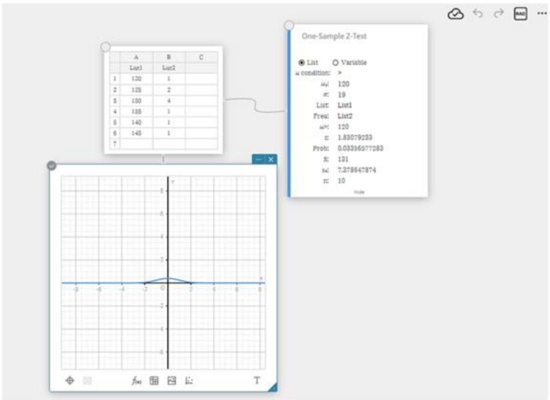
Tilastolliset laskut ja tilastolliset kuvaajat voi näyttää syöttämällä numeroarvot

Monimutkaiset kaaviot voi piirtää helposti, mikä vähentää taululle kirjoitukseen kuluvaa aikaa ja tehostaa luokkien toimintaa



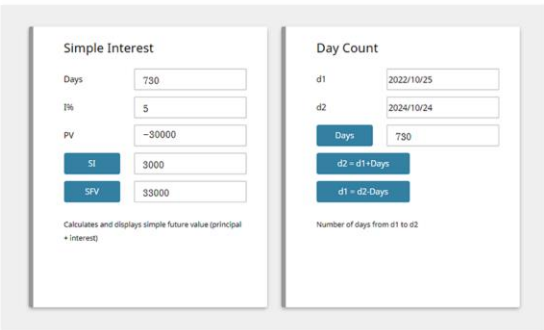
Tietokonealgebrajärjestelmä (CAS)

CAS on ohjelmisto symboliseen laskentaan.



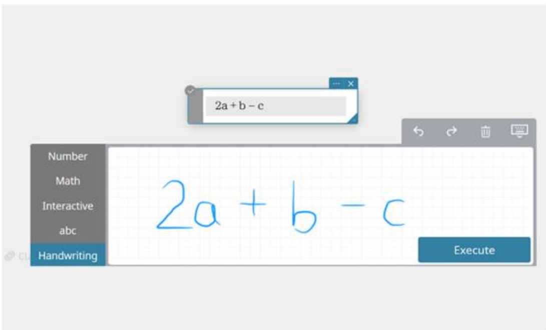
Edistynyt tilastolaskenta

Käytettävissä on edistyneitä tilastotoimintoja, kuten testi, intervalli, jakauma ja käänteinen regressio



Talouslaskelmat

Erilaisia talouslaskelmia voidaan tehdä



Käsinkirjoituksen tunnistus

Kaavoja ja funktioita voi kirjoittaa käsin