Laske Laudatur Casion avulla

Lyhyt matematiikka,
syksy 2023

Sisältö

Syksyn 2023 matematiikan yo-kokeiden ratkaisut työasemalle ladattavan ja Abitista löytyvän ClassPad Managerin avulla laskettuina höystettynä selainpohjaisella ClassPad.net -sovelluksella.

Pepe Palovaara

FI – Matematiikka, lyhyt oppimäärä

19.9.2023

Koe koostuu 13 tehtävästä, joista vastataan kymmeneen. Tehtävät on jaettu kolmeen osaan. A-osassa on neljä kaikille pakollista tehtävää. B1-osassa on viisi tehtävää, joista vastataan kolmeen. B2-osassa on neljä tehtävää, joista vastataan kolmeen. Kaikki tehtävät arvostellaan pistein 0–12, joten kokeen maksimipistemäärä on 120.

A-osassa saat käyttää koejärjestelmässä olevaa taulukkokirjaa ja perusohjelmia. A-osa palautetaan tehtävän 4 jälkeen olevalla painikkeella. Tämän jälkeen A-osan vastauksia ei voi enää muokata. A-osan palauttamisen jälkeen kaikki koejärjestelmän ohjelmat ovat käytettävissäsi. Voit vastata B-osien tehtäviin myös ennen A-osan palauttamista.

Useimmissa tehtävissä kaikkien osatehtävien vastaukset kirjoitetaan samaan vastauskenttään. Jaottele vastauksesi osatehtävien mukaisesti. Halutessasi voit tuottaa vastausten tueksi piirroksia, kaavioita tai taulukoita ja liittää niistä kuvakaappauksen mihin tahansa tekstivastaukseen.

Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

A-osa

Vastaa neljään tehtävään.

1. Funktiot ja lukujonot 12 p.

Valitse oikea vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

1. Jos $f(x) = x^2 + 2$, niin $f(2) =$ $\boxed{6}$ 2p.
2. Jos $g(x) = \sqrt{x}$, niin $g(16) =$ $\boxed{4}$ 2p.
3. Jos $f(x) = x^2 + 2$ ja $h(x) = x^3 - 2$, niin $f(x) + h(x) =$ $\boxed{x^3 + x^2}$ 2p.
4. Jos $f(x) = x^2 + 2$ ja $h(x) = x^3 - 2$, niin $f(x) \cdot h(2) =$ $\boxed{6x^2 + 12}$ 2p.
5. Jos $a_n = 3n + 1$, niin $a_4 =$ $\boxed{13}$ 2p.
6. Jos aritmeettisessa lukujonossa $a_0 = 3$ ja $a_1 = 7$, niin $a_3 =$ $\boxed{15}$ 2p.

2. Vaatekaupassa 12 p.

1. Farkkujen alkuperäinen hinta on 56,00 euroa ja alennusmyynnissä hintaa alennetaan 30 %. Mikä on alennettu hinta? **(4 p.)**
2. Takin alkuperäinen hinta on 79,00 euroa ja alennettu hinta 55,30 euroa. Mikä on alennusprosentti? **(4 p.)**
3. Vaatteiden arvonlisäverokanta on 24 %. Kuinka monta euroa paidan 45,00 euron myyntihinnasta on arvonlisäveroa? **(4 p.)**

1. $0{,}7 \cdot 56 = 39{,}20€$

2. $k \cdot 79 = 55{,}30 \;\Leftrightarrow\; k = \dfrac{55{,}30}{79} = 0{,}7 \;\Rightarrow\; \textit{alennusprosentti on } 30\%.$

3. $1{,}24 \cdot x = 45{,}00 \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{45}{1{,}24} = 36{,}29€$ on veroton hinta. ALV:n määrä on $45 - 36{,}29 = 8{,}71€$

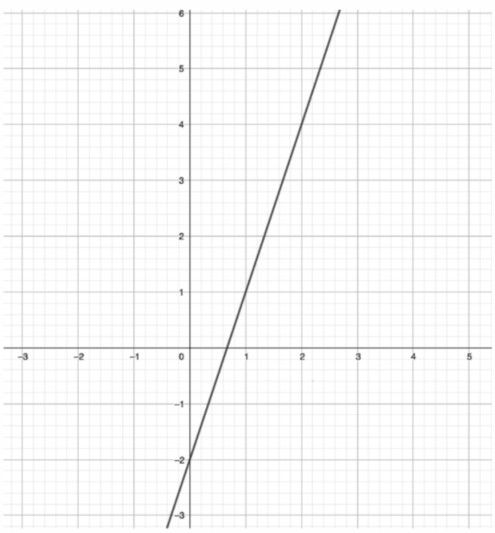
3. Tuntemattomia muuttujia 12 p.

Aineisto

3.A Kuva: Suora

1. Kuvassa 3.A on suora $y = ax + b$, jonka kertoimet a ja b ovat kokonaislukuja. Päättele kuvaajan perusteella kertoimien arvot ja perustele, miten päädyit ratkaisuun. **(4 p.)**
2. Ratkaise p murtolukuna yhtälöstä $\left(\frac{3}{5} + \frac{3}{4}\right) \cdot p = \frac{3}{5}$. **(2 p.)**
3. Ratkaise q murtolukuna yhtälöstä $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) : q = \frac{1}{2}$. **(2 p.)**
4. Ratkaise x yhtälöstä $\dfrac{4n^{2^3}(n^2)^3}{2n} \cdot x = 8n^{10}$. **(4 p.)**

3.A Kuva: Suora



Lähde: YTL.

1. $y = 3x - 2$, sillä suora kulkee pisteen (0,-2) kautta ja nousee kolme ruutua jokaista etenevää ruutua kohden.

Kertoimien arvot ovat siis $a = 3$ ja $b = -2.$

2. $5 \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{4}\right) \cdot p = 3 \;\Leftrightarrow\; \left(3 + \frac{15}{4}\right) \cdot p = 3 \;\Leftrightarrow\; \frac{27}{4}p = 3 \;\Leftrightarrow\; p = 3 \cdot \frac{4}{27} = \frac{4}{9}$

3. $2 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = q \;\Leftrightarrow\; 2 \cdot \frac{-1}{6} = q \;\Leftrightarrow\; q = -\frac{1}{3}$

4. $x = 8n^{10} : \dfrac{4n^8 \cdot n^6}{2n} = 8n^{10} \cdot \dfrac{2n}{4n^{14}} = \dfrac{16n^{11}}{4n^{14}} = 4n^{-3} = \dfrac{4}{n^3}$

4. Pythagoraan kolmikot 12 p.

Positiiviset kokonaisluvut a, b ja c muodostavat *Pythagoraan kolmikon*, jos $a^2 + b^2 = c^2$.

Näitä kolmikoita voidaan muodostaa seuraavasti. Olkoot m ja n positiivisia kokonaislukuja, joille $m > n$. Tällöin luvut $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ ja $c = m^2 + n^2$ muodostavat Pythagoraan kolmikon.

1. Muodosta yllä esitetyllä tavalla jokin Pythagoraan kolmikko. **(3 p.)**
2. Anna esimerkki kolmesta positiivisesta kokonaisluvusta, jotka eivät muodosta Pythagoraan kolmikkoa. **(3 p.)**
3. Määritä luvut m ja n silloin, kun Pythagoraan kolmikkona ovat luvut $a = 15$, $b = 8$ ja $c = 17$. **(3 p.)**
4. Perustele, että jos a, b ja c on muodostettu lukujen m ja n avulla kuten tehtävän alkutekstissä, niin $a^2 + b^2 = c^2$. **(3 p.)**

1. Olkoot $m = 2$ ja $n = 1$, jolloin $m > n$ ja $m,n \in \mathbb{Z}_+$. Nyt luvut ovat $a = 2^2 - 1^1 = 3$,
$b = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ ja $c = 2^2 + 1^2 = 5$ ja Pythagoraan lause toteutuu $3^2 + 4^2 = 5^2 \Leftrightarrow 25 = 25$.

2. Esim. $a = 2$, $b = 3$ ja $c = 4$ eivät toteuta Pythagoaan lausetta: $2^2 + 3^2 \neq 4^2 \Leftrightarrow 13 \neq 16$.

3. Koska $b = 2mn = 8$, niin $mn = 4$. Positiivisista kokonaisluvuista tuloksi saadaan neljä, kun
$m = 4$ ja $n = 1$ $(m > n)$. Tarkistetaan muut ehdot: $a = 4^2 - 1^2 = 15$ ja $c = 4^2 + 1^2 = 17$. Luvuiksi käyvät siis 4 ja 1.

4. $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2 \Leftrightarrow m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4$

$\Leftrightarrow m^4 - m^4 - 4m^2n^2 + 4m^2n^2 + n^4 - n^4 \Leftrightarrow 0 = 0$

B1-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

5. Laskettelumatka 12 p.

Lukion 32 opiskelijan ryhmä varaa laskettelumatkaa varten linja-auton, jonka kustannukset jaetaan tasan osallistujien kesken. Neljä opiskelijaa joutuu perumaan lähtönsä, jolloin jokainen osallistuja maksaa lopulta 15 euroa alkuperäistä hintaa enemmän. Kuinka paljon yhden osallistujan matka lopulta maksoi?

Merkitään kokonaiskustannusten määrää x, jolloin koko reissun hinnaksi saadaan

solve$\left(\frac{x}{32}=\frac{x}{32-4}-15, x\right)$

$\{x=3360\}$

Yksi osallistuja maksoi

$\frac{3360}{28}$

120

Vastaus: 120 euroa.

6. Postimerkin lisäpainama 12 p.

Aineisto

6.A Kuva: Postimerkki

Karoliinien saariryhmä oli yksi Saksan keisarikunnan siirtomaista. Siirtomaan ensimmäinen postimerkkisarja valmistettiin Saksan postimerkeistä painamalla niihin teksti "Karolinen". Lisäpainamasta on kaksi eri tyyppiä, *loiva* ja *jyrkkä*, joiden luettelohinnat ovat 1 800 ja 180 euroa. Loivan lisäpainaman kaltevuuskulma on noin 48° vaakatasosta mitattuna ja jyrkän lisäpainaman 56°.

1. Arvioi kuvan 6.A postimerkin lisäpainaman kaltevuuskulmaa. Onko lisäpainama loivaa vai jyrkkää tyyppiä? **(6 p.)**
2. Lisäpainaman ympärille piirretään mahdollisimman pieni suorakulmio. Arvioi, kuinka monta prosenttia suorakulmio peittää postimerkin pinta-alasta. Valkoisia reunoja ei lasketa mukaan postimerkin pinta-alaan. **(6 p.)**

Tehtävän voi ratkaista joko sopivalla ohjelmalla tai mittaamalla lukuarvoja näytöltä. Molemmissa vaihtoehdoissa täytyy käydä ilmi ratkaisutavan välivaiheet.

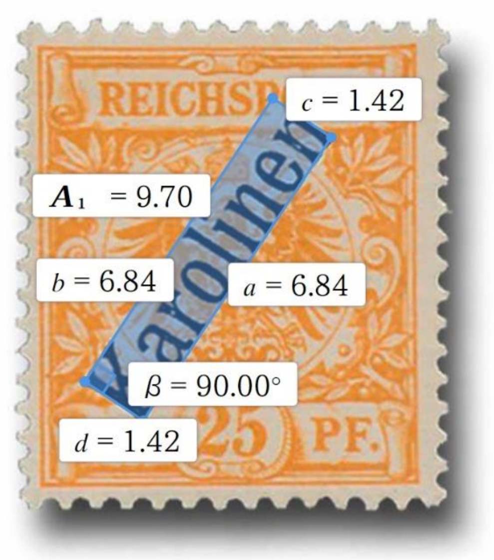
6.A Kuva: Postimerkki

Lähde: Storf Internationales Handelshaus GmbH & Co. KG. storf-handel.de. Viitattu: 12.3.2022.

ClassPad.net: geometria-sovellukseen voidaan avata kuva, jonka päälle työkaluista saadaan kulmamitta. Asetetaan kulmamitan keskipiste tekstin alanurkkaan ja luetaan kulman suuruudeksi noin. 56°. Kyseessä on siis jyrkkää tyyppiä oleva merkki.

Jatketaan piirtämällä monikulmio-työkalun avulla nelikulmio tekstin ympärille. Valitaan vastakkaiset sivut ja asetetaan ne yhtä pitkiksi Adjustment > Congruent. Lukitaan sivujen pituudet valitsemalla ne yksi kerrallaan ja klikkaamalla Lock. Toistetaan sama toisille vastakkaisille sivuille. Valitaan kaksi viereistä sivua ja asetetaan ne kohtisuoraan valikosta Adjustment > Perpendicular. Klikataan suorakaide aktiiviseksi ja katsotaan sen pinta-ala valikosta Measurement > Area.

Piirretään toinen suora suorakulmio postimerkin aihion ympärille edellä kuvatulla tavalla ja katsotaan sen pinta-ala. Nyt voidaan laskea kysytty suhde valikosta Measurement > Expression > A1/A2 > Enter. Tekstin ympärille piirretty suorakulmio peittää n. 14% merkin pinta-alasta.



Huom. Koska kyse on suhteellisesta osuudesta, ei mittayksiköllä ole merkitystä. Kokeile sovellusta osoitteessa https://classpad.net.

7. Urheilusukat 12 p.

Kilpajuoksijalla on kuusi urheilusukkaa sekaisin pienessä korissa. Kolmessa sukassa on merkki L ja kolmessa R. Juoksija ottaa korista umpimähkään kaksi sukkaa peräkkäin. Määritä todennäköisyys sille, että

1. ensimmäisessä sukassa on merkki L **(2 p.)**
2. molemmissa sukissa on merkki L **(4 p.)**
3. sukissa on eri merkit. **(6 p.)**

1. Kyseessä on klassinen todennäköisyys, joka lasketaan jakamalla suotuiset alkeistapaukset kaikilla alkeistapauksilla $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2. P("1. sukassa on L ja 2. sukassa on L") on kertolaskusäännön nojalla P("1. sukassa on L")*(P"2. sukassa on L") = $\frac{3}{6}*\frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.

3. Edellä laskettiin todennäköisyys sille, että molemmissa sukissa on L. Koska L-sukkia ja R-sukkia on yhtä paljon, on todennäköisyys saada R-pari on sama $\frac{1}{5}$.

Vastatapahtuman avulla todennäköisyys saada LR-pari on $1-\frac{1}{5}-\frac{1}{5} = \frac{3}{5}$.

8. Polynomifunktio 12 p.

Olkoon $p(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 48x$.

1. Laske derivaatta $p'(x)$ ja ratkaise derivaatan nollakohdat. **(4 p.)**
2. Millä väleillä funktio p on kasvava? **(4 p.)**
3. Määritä funktion p pienin arvo. Missä kohdassa se saavutetaan? **(4 p.)**

1. Määritetään funktio p(x)

define $p(x)=x^4-4x^3-8x^2+48x$

done

ja sen derivaattafunktio p´(x)

define $p´(x)=\frac{d}{dx}(p(x))$

done

p´(x)

$4\cdot x^3-12\cdot x^2-16\cdot x+48$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat

solve$(4\cdot x^3-12\cdot x^2-16\cdot x+48=0, x)$

$\{x=-2, x=2, x=3\}$

Vastaus: Derivaattafunktion nollakohdat ovat $x=-2$, $x=2$ tai $x=3$.

2. Koska p on parillinen potenssifunktio ja sen korkeimman asteen termin kerroin on positiivinen, on se ylöspäin avautuva. Koska sen derivaatalla on kolme nollakohtaa, funktio p

- vähenee, kun $x \leq -2$
- kasvaa, kun $-2 \leq x \leq 2$
- vähenee, kun $2 \leq x \leq 3$
- kasvaa, kun $x \geq 3$

Vastaus: Funktio p kasvaa, kun $-2 \leq x \leq 2$ ja kun $x \geq 3$.

3. Polynomifunktiona p on kaikkialla jatkuva ja derivoituva. Koska se on ylöspäin avautuva, niin pienin arvo saadaan paikallisessa minimikohdassa. Edellisen kohdan perusteella riittää tutkia kohdat p(−2) ja p(3).

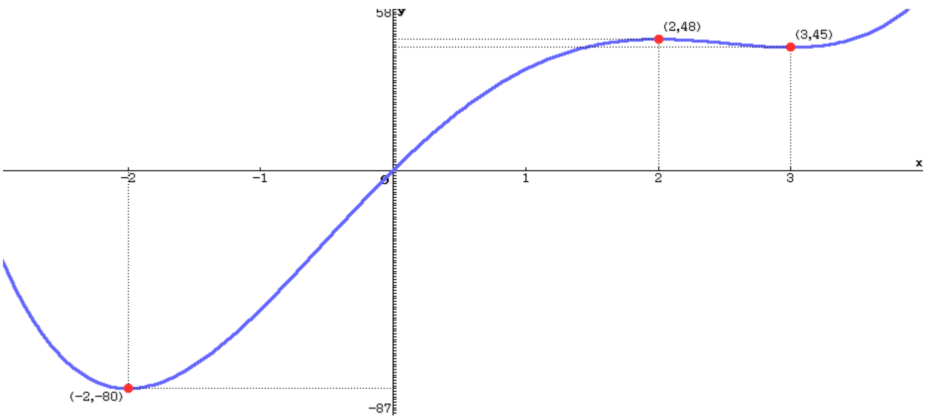
p(−2)

−80

p(3)

45

Vastaus: Funktion p pienin arvo on −80 ja se saadaan kohdassa $x=-2$.

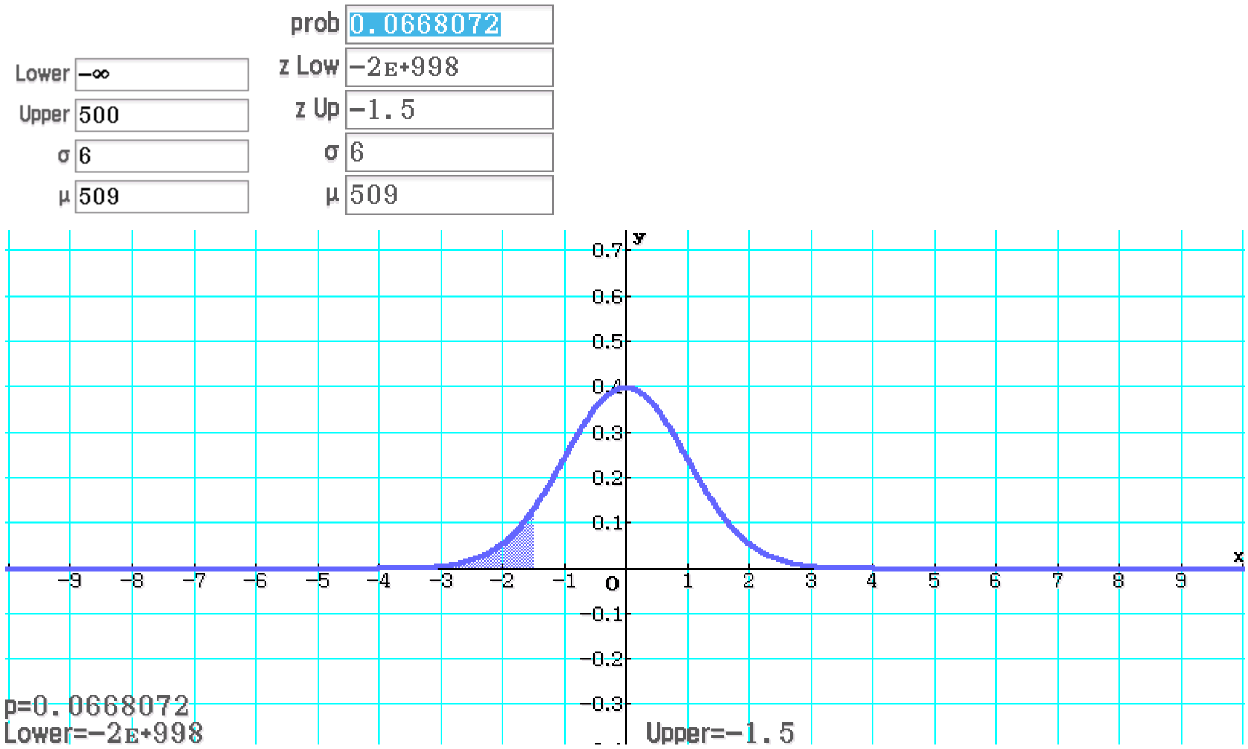


9. Luottamusväli 12 p.

Pakkauskone on säädetty täyttämään puolen kilon muropaketteja. Laadunvalvonnassa punnitaan 100 pakettia, joiden painon keskiarvoksi saadaan 509 grammaa ja keskihajonnaksi 6,0 grammaa. Oletetaan, että paketin paino noudattaa normaalijakaumaa N(509; 6,0).

1. Millä todennäköisyydellä paketin paino on korkeintaan 500 grammaa? **(4 p.)**
2. Määritä paketin painon keskiarvon keskivirhe ja 95 %:n luottamusväli, eli luottamusväli 95 %:n luottamustasolla. **(8 p.)**

1. Syötetään arvot normaalijakauman kertymäfunktion sovellukseen ja normitetaan ne. Todennäköisyydeksi saadaan n. 0,07. Laskun voi havainnollistaa kuvaajalla.



2. Keskiarvon keskivirhe $S=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, jonka arvoksi saadaan

$S=\frac{6}{\sqrt{100}}$

S=0.6

Siispä 95% luottamusväliksi saadaan 509±1,96*0,6 eli alaraja on

509−1.96*0.6

507.824

ja yläraja

509+1.96*0.6

510.176

Vastaus: Keskiarvon keskivirhe on 0,6 ja 95% luottamusväli on n. 507,8g−510,2g.

B2-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

10. Matematiikan merkintöjä 12 p.

Kuinka seuraavat sanalliset kuvaukset voidaan ilmaista symbolein?

Valitse parhaiten soveltuva vaihtoehto. Vastauksia ei tarvitse perustella. Oikea vastaus 1 p. tai 2 p., väärä vastaus 0 p., ei vastausta 0 p.

Jos olet aloittanut tehtävään vastaamisen, mutta et haluakaan jättää tehtävää arvosteltavaksi, poista vastauksesi valitsemalla pudotusvalikosta tyhjä rivi.

10.1 Luvun 6 kuutiojuuri. 1 p.

$\sqrt[3]{6}$

10.2 Parilliset kokonaisluvut. 1 p.

$2k, \ k \in \mathbf{Z}$

10.3 Luvun $\frac{7}{5}$ käänteisluvun ja vastaluvun summan itseisarvo. 2 p.

$|\frac{5}{7} + (-\frac{7}{5})|$

10.4 Luvut A ja B ovat suoraan verrannolliset verrannollisuuskertoimella k. 1 p.

$A : B = k$

10.5 Kun kerrotaan kaksi samakantaista potenssia, niin eksponentit lasketaan yhteen. 1 p.

$x^n x^m = x^{n+m}$

10.6 Tuotteen lopullinen hinta, kun alkuperäistä hintaa 129 € alennetaan ensin 10 % ja alennettua hintaa myöhemmin vielä 20 %. 1 p.

$0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 129$ €

10.7 Lukusuoran pisteen x etäisyys pisteestä -2 on 3. 1 p.

$|x - (-2)| = 3$

10.8 Tason pisteen (x, y) etäisyys pisteestä $(1, -3)$ on 4. 2 p.

$\sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} = 4$

10.9 Suorien $2x - 3y = 1$ ja $-x + 4y = -2$ leikkauspiste. 1 p.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + 4y = -2 \end{cases}$$

10.10 Funktion f arvo kohdassa 2 on suurempi kuin funktion g arvo kohdassa -3. 1 p.

$f(2) > g(-3)$

11. Rokottamisen tehokkuus (12 p.)

Tutkijat ovat kehittäneet yksinkertaistetun mallin rokottamisesta viruspandemiassa. Mallin mukaan viruspandemia saadaan maassa hallintaan, jos $H \geq \frac{1-\frac{1}{R_0}}{E}$. Tässä

- $R_0 > 0$ on viruksen perusuusiutumisluku
- $E > 0$ on rokotteen tehokkuus
- H on rokotettujen osuus maan väestöstä.

Muuttujat E ja H ovat prosenttilukuja sadasosina, eli esimerkiksi 1 % on $0{,}01$.

1. Oletetaan, että $R_0 = 3$. Määritä pienin mahdollinen H, jolla viruspandemia saadaan hallintaan rokotteella, jonka tehokkuus E on 80 %. **(4 p.)**
2. Mutaation seurauksena perusuusiutumisluku kasvaa arvoon $4{,}5$. Mikä on rokotteen pienin mahdollinen tehokkuus E, jolla viruspandemia saadaan hallintaan, jos H on 80 %? **(4 p.)**
3. Anna esimerkki näiden kolmen muuttujan arvoista, joilla viruspandemiaa ei voi mallin mukaan saada hallintaan. **(4 p.)**

1. Ratkaistaan muuttujan H arvo sijoittamalla annetut arvot malliin

$$H \geq \frac{1-\frac{1}{3}}{0.8}$$

$$H \geq 0.8333333333$$

Vastaus. Pienin muuttujan H arvo on n. 83%.

2. Ratkaistaan epäyhtälöstä E, johon on sijoitettu annetut arvot

$$\text{solve}\left(0.8 \geq \frac{1-\frac{1}{4.5}}{E}, E\right) | E>0$$

$$\{E \geq 0.9722222222\}$$

Vastaus: Pienin mahdollinen tehokkuus rokotteelle on n. 0,97%.

3. Asetetaan rokotteen tehokkuus alas, esim. arvoon E=0,1. Tällöin voidaan valita perusuusiutumisluvuksi esim. 2, jolloin

$$\frac{1-\frac{1}{2}}{0.1}$$

$$5$$

Nyt rokotettujen osuuden pitäisi olla 5 eli 500% väestöstä, mikä ei ole mahdollista.

COMPUTER SOFTWARE

https://edu.casio.com/softwarelicense/index.php

12. Maailman väestö (12 p.)

Aineisto

12.A Taulukko: Väestömäärä YK:n arvioiden mukaan

Taulukossa 12.A on esitetty maailman väestömäärä vuodesta 1950 vuoteen 2020.

1. Mallinna väestömäärää sovittamalla aineistoon regressiosuora $y = a + bx$, kun x on vuosi ja y väestömäärä. **(4 p.)**
2. Väestönkasvua voi mallintaa myös lukujonolla $y_n = c\,q^n$, missä n on vuosi ja y_n on väestömäärä. Määritä parametrit c ja q käyttämällä vuosien 2010 ja 2020 väestömääriä. Vaihtoehtoisesti voit käyttää mallia $y_n = c\,e^{kn}$, joka on käytössä tietyissä ohjelmistoissa. **(4 p.)**
3. Määritä ennusteet vuoden 2040 väestömäärästä osatehtävien 12.1 ja 12.2 mallien perusteella. **(2 p.)**
4. Arvioi osatehtävien 12.1 ja 12.2 mallien hyviä tai huonoja puolia. Mainitse kummastakin mallista yksi seikka. **(2 p.)**

12. Maailman väestö

12.A Taulukko: Väestömäärä YK:n arvioiden mukaan

Vuosi	Väestömäärä (miljoonaa)
1950	2536
1960	3035
1970	3700
1980	4458
1990	5327
2000	6143
2010	6957
2020	7795

Lähde: United Nations (YK). *Population Division, World Population Prospects 2022.* https://population.un.org/wpp/Download/Standard/Population/. Viitattu: 5.1.2022.

1. Syötetään vuosiluvut ja väestömäärä miljoonina ihmisinä tilastosovellukseen. Sovitetaan aineistoon lineaarinen regressiomalli y=a+bx, jolloin malliksi saadaan
y=−147711.7024+76.9297619·x.
Vastaus: Regressiosuora on y=−147711,7024+76,9297619x.

	vuosi	väestö
1	1950	2536
2	1960	3035
3	1970	3700
4	1980	4458
5	1990	5327
6	2000	6143
7	2010	6957
8	2020	7795

Stat Calculation

Linear Reg

y=a+b·x

a	=−147711.7
b	=76.929762
r	=0.9976978
r²	=0.9954009
MSe	=19141.026

OK

vajaa	väki
2010	6957
2020	7795

Stat Calculation

Exponential Reg

y=a·e^(b·x)

a	=8.2074E-7
b	=0.0113734
r	=1
r²	=1
MSe	=

OK

2. Sovittamalla eksponenttifunktion regressiomalli aineistoon vuosilta 2010 ja 2020 saadaan malliksi

$y_n=8.207382119*10^{-7}\cdot e^{0.01137341556\cdot n}$

Vastaus: Kertoimet eksponentiaalisessa mallissa ovat $c=8,207382119*10^{-7}$ ja $q=e^{0,01137341556}$.

3. Ennusteet vuodelle 2040 ovat

$-147711.7024+76.9297619\cdot 2040$

9225.011876

ja

$8.207382119*10^{-7}\cdot e^{0.01137341556\cdot 2040}$

9785.980695

Vastaus: Lineaarisen mallin mukaan väkimäärän ennuste vuodelle 2040 olisi n. 9225 miljoonaa ihmistä ja eksponentiaalisen mallin mukaan n. 9786 miljoonaa ihmistä.

4. Lineaarinen malli osuu paremmin aineistoon, joten sen arvio lähitulevaisuuteen antaa tarkemman vastauksen, mutta menneisyydessä tulee vääjäämättä piste, jolloin maailman väkiluku olisi negatiivinen. Eksponentiaalinen malli lähtee rajuun kasvuun vuosien edetessä eikä se mallinna luotettavasti ihmismäärän kasvua, sillä rajaksi tulee esim. ravinto, taudit ja maapallon asuttavan alueen koko.

13. Peräkkäiset kruunat 12 p.

Kolikkoa heitetään useita kertoja peräkkäin. Tällöin merkintä F_n ilmaisee kaikkien sellaisten tapausten lukumäärän, joissa n:ssä heitossa esiintyy vähintään kaksi peräkkäistä kruunaa. Tiedetään, että palautuskaava

$$F_{n+3} = 2F_{n+2} - F_n + 2^n$$

pätee, kun $n \geq 1$.

1. Määritä F_1, F_2 ja F_3 laskemalla eri tapausten lukumäärät. **(4 p.)**
2. Kolikkoa heitetään kuusi kertaa. Millä todennäköisyydellä saadaan vähintään kaksi peräkkäistä kruunaa? **(4 p.)**
3. Kolikkoa heitetään kuusi kertaa. Millä todennäköisyydellä saadaan vähintään kaksi kruunaa? **(4 p.)**

1. Lasketaan pyydetyt lukumäärät. Merkitään kl = klaava ja kr = kruuna.
Koska 1 heitossa ei voi olla kahta peräkkäistä kruunaa, on $F_1=0$.

Kahdella heitolla kaksi peräkkäistä kruunaa sisältäviä tapauksia on vain 1 eli {kr, kr}. Siis $F_2=1$.

Kolmella heitolla vähintään kaksi peräkkäistä kruunaa sisältäviä tapauksia ovat {kr, kr, kl} ja {kl, kr, kr} ja {kr, kr, kr} eli $F_3=3$.

Vastaus: $F_1=0$, $F_2=1$ ja $F_3=3$.

2. Palautuskaavan avulla

$F_4=2*F_3-F_1+2^1=2*3-0+2=8$

$F_5=2*F_4-F_2+2^2=2*8-1+4=19$

$F_6=2*F_5-F_3+2^3=2*19-3+8=43$

Todennäköisyys saadaan jakamalla suotuisten tapausten määrä kaikilla alkeistapauksilla eli tässä tapauksessa kaikilla erilaisilla kruunien esiintymisillä kuudessa heitossa.

$$\frac{43}{nCr(6,0)+nCr(6,1)+nCr(6,2)+nCr(6,3)+nCr(6,4)+nCr(6,5)+nCr(6,6)}$$

0.671875

Vastaus: Noin 0,67

3. P("Saadaan vähintään 2 kruunaa 6 heitolla")=1−("Saadaan 0 tai 1 kruuna 6 heitolla")=1−(("Saadaan 0 kruuna 6 heitolla")+("Saadaan 1 kruuna 6 heitolla"))=

$$1-\left(\left(\frac{1}{2}\right)^6+nCr(6,1)*\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)$$

0.890625

Vastaus: Noin 0,89.